# Algorithmes de calcul formel et numérique

B. Parisse
Institut Fourier
UMR 5582 du CNRS
Université de Grenoble

Giac/Xcas est un logiciel libre de calcul formel dont une caractéristique est de nécessiter peu de ressources sans sacrifier les performances (en particulier sur les calculs polynomiaux). Ce document décrit une partie des algorithmes de calcul formel et numérique qui y sont impleémentés, l'objectif à long terme est de couvrir l'essentiel des algorithmes implémentés. Ce n'est pas le manuel d'utilisation de Xcas, ni un manuel de programmation ou d'exercices illustrés avec Xcas (voir le menu Aide, Manuels : Référence calcul formel, Programmation, Exercices, Amusements...). Ce texte regroupe donc des résultats mathématiques qui ont été ou sont utilisés dans Giac (ou sont susceptibles de l'être), ils sont en général accompagnés de preuves et souvent d'illustrations avec Xcas.
Pour plus d'informations sur Giac/Xcas, cf. :
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html`

N.B. : La version HTML de ce document comporte des champs de saisie interactifs, ceux-ci apparaissent comme des commandes "mortes" dans la version PDF (elles sont exécutées une fois pour toutes par la version non interactive de `giac`). La version HTML est optimisée pour le navigateur Firefox. Elle est générée avec `hevea.inria.fr` de Luc Maranget, ou le fork de Yannick Chevallier pour le support mathjax, ainsi qu'une version modifiée de `itex2MML` de Jacques Distler pour la conversion en MathML. Si vous avez une machine très puissante, vous pouvez exécuter toutes les commandes interactives en cliquant sur le bouton Exécuter. En-dessous de ce bouton se trouve la console de l'interpréteur du logiciel de calcul formel.

# Table des matières

# Chapitre 1

# Plan et index

L'index commence page suivante dans la version PDF.

Quelques conseils de lecture :

— Des aspects calcul numérique sont abordés dans les sections **??** (représentation des données), **??** (intégration numérique), **??** (point fixe, Newton), **??** (Gauss, LU, conditionnement, Schur...), **??** et **??** (interpolation, approximation polynomiale), **??** (transformée de Fourier discrète),
— Des aspects calcul exact sont abordés dans les sections **??** (représentation des données), **??** (PGCD), **??** (résultant), **??** (racines), **??** (bases de Gröbner), **??** (corps finis), **??** et **??** (factorisation des entiers et polynômes), **??** (calcul de primitives), **??** (algèbre linéaire), **??** (moyenne arithmético-géométrique),
— le lecteur physicien trouvera peut-être un intérêt aux chapitres tirés de mon cours de licence L2 courbes et équations différentielles pour la physique, sections **??**, **??**, **??**, **??**, **??**, **??**, ainsi que le calcul de la répartition du rayonnement solaire sur Terre **??**

# Chapitre 2

# Trousse de survie Xcas

Cette section peut être vue comme un tutoriel très abrégé pour rapidement prendre en main Xcas par des exemples au niveau fin de licence master de mathématique et préparation aux concours de recrutement d'enseignants. Le lecteur pourra consulter le tutoriel calcul formel (menu Xcas, Aide, Débuter en calcul formel, tutoriel) pour plus de détails ou/et à un niveau mathématique moins élevé.

## 2.1 Utilisation comme super-calculatrice

— On saisit une ligne de commande, on tape sur la touche Entree pour l'évaluer. On peut saisir plusieurs commandes sur une même ligne en les séparant par `;` (affiche le résultat) ou `:;` (n'affiche pas le résultat). La syntaxe respecte les priorités usuelles des opérateurs, attention il faut toujours saisir le signe `*` pour effectuer une multiplication (sauf raccourcis dans lécriture de monômes comme `2x`). Mettez des parenthèses en cas de doute.

```
2x^3; x/2/y; x/(2*y);
```

$$2x^3, \frac{x}{2y}, \frac{x}{2y}$$

— Si on entre des données exactes, les calculs sont exacts

```
1/2-1/3
```

$$\frac{1}{6}$$

on peut alors convertir en approché avec `evalf`

```
evalf(sin(1))
```

$$0.841470984808$$

Si on entre au moins une donnée approchée (nombre avec point décimal), les calculs sont approchés

```
1/2.0-1/3
```

$$0.166666666667$$

Les nombres flottants peuvent être saisis avec lécriture standard mantisse/exposant séparés par `e`

```
Avogadro:=6.02e23; eps:=1e-10;
```

$$6.02 \times 10^{23}, 1.0 \times 10^{-10}$$

— On peut stocker des résultats dans des variables pour les réutiliser ensuite
```
a:=pi^2/6; evalf(a);
```

$$\frac{\pi^2}{6}, 1.64493406685$$

On peut effacer le contenu d'une variable avec `purge`, elle redevient alors libre (elle s'évalue en elle-même)
```
purge(a); a;
```

$$\frac{\pi^2}{6}, a$$

Les noms de variable peuvent contenir plusieurs lettres
```
xy/y; x*y/y;
```

$$\frac{\mathrm{xy}}{y}, x$$

— Les noms de commande et mots-clefs du logiciel sont en général affichés avec une couleur spécifique. Les menus permettent de trouver les commandes par thème (menus Outils dans Xcas pour les plus courantes, menu Graphe avec des assistants pour les représentations graphiques les plus courantes, menu Cmd pour un ensemble plus complet). La ligne de commande permet en général de compléter un début de nom de commande (touche tabulation). L'appui sur la touche tabulation après un nom de commande ou la sélection du menu Aide, Index dans Xcas ouvre l'aide en ligne courte, avec une description rapide de la commande et quelques exemples types que l'on peut copier-coller et adapter. On peut aussi obtenir une aide plus détaillée (boutons Details dans Xcas).

— Les listes sont délimitées par des crochets et servent à représenter des vecteurs. Les listes de listes de même taille servent à représenter des matrices. On accède à un élément d'une liste en donnant le nom de variable de la liste puis l'indice de l'élément entre crochet, en commençant à 0 (mettre deux crochets pour commencer à 1).
```
v:=[1,2]; M:=[[1,2],[3,4]]; w:=M*v; w[0];
 w[[1]]; M[0,0]:=-1; M*v;
```

$$[1,2], \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, [5,11], 5, 5, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, [3,11]$$

— Pour afficher les étapes intermédiaires de certains calculs, exécutez

```
step_infolevel:=1
```

1

pour ne pas les afficher

```
step_infolevel:=0
```

$$0$$

## 2.2 Calcul exact

### 2.2.1 Arithmétique

— division euclidienne des entiers

```
a:=25; b:=7; q:=iquo(25,7); r:=irem(25,7); b*q+r;
```

$$25, 7, 3, 4, 25$$

— PGCD, identité de Bézout sur les entiers

```
a:=25; b:=7; gcd(a,b); u,v,d:=iegcd(a,b);
 a*u+b*v; u,v:=iabcuv(a,b,37); a*u+b*v
```

$$25, 7, 1, [2, -7, 1], 1, [-3, 16], 37$$

— restes chinois entiers

```
ichinrem([2,13],[3,17])
```

$$[54, 221]$$

— primalité, décomposition en facteurs premiers

```
a:=2^64+1;isprime(a); ifactor(a);
```

$$18446744073709551617, \text{false}, 67280421310721 \cdot 274177$$

— puissance modulaire rapide

```
a:=256789; b:=1234567; m:=345678; powmod(a,b,m);
```

$$256789, 1234567, 345678, 318763$$

— division euclidienne des polynômes, la variable par défaut est $x$, sinon il faut la spécifier en dernier argument

```
a:=x^4+5x^2+7x+1; b:=x^3+4x^2+x+1; q:=quo
(a,b); r:=rem(a,b); quo(a,b,y)
```

$$x^4+5x^2+7x+1, x^3+4x^2+x+1, x-4, 20x^2+10x+5, \frac{x^4+5x^2+7x+1}{x^3+4x^2+x+1}$$

— PGCD, identité de Bézout sur les polynômes

```
a:=x^4+5x^2+7x+1; b:=x^3+4x^2+x+1; gcd(a,b
); u,v,d:=egcd(a,b); normal(a*u+b*v); u,v:=abcuv
(a,b,x^2,x); normal(a*u+b*v)
```

$$x^4+5x^2+7x+1, x^3+4x^2+x+1, 1, \left[-16x^2-66x-19, 16x^3+2x^2+75x+124, 105\right], 105, \left[\frac{5x^2+18x}{105}\right.$$

— factorisation sur le corps des coefficients par défaut, sinon ajouter l'extension algébrique souhaitée (éventuellement obtenue avec `solve`)

```
factor(x^4-2); solve(x^4-2=0); factor(x^4-2,2^
(1/4)); cfactor(x^4-2,2^(1/4));
```

$\left(x^2-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right), \left[-2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{4}}\right], \left(x-2^{\frac{1}{4}}\right)\left(x+2^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right), \left(x-2^{\frac{1}{4}}\right)\left(x+2^{\frac{1}{4}}\right)\left(x$

`sqrfree` permet d'effectuer une factorisation partielle en produit de facteurs premiers entre eux et sans racines multiples.

— évaluation d'un polynôme
`p:=x^5+4x+7; horner(p,2); p(x=2); subst(p,x=2);`

$$x^5+4x+7, 47, 47, 47$$

— Résultant de 2 polynômes
`p:=randpoly(7); q:=randpoly(7); resultant(p,q,x);`

$x^7+86x^6-97x^5-82x^4+7x^3-27x^2+26x-89, x^7+63x^6-49x^5-86x^4-64x^3-30x^2+70x+22,$

`m:=sylvester(p,q); det(m);`

$$\begin{bmatrix} 1 & 86 & -97 & -82 & 7 & -27 & 26 & -89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 86 & -97 & -82 & 7 & -27 & 26 & -89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 86 & -97 & -82 & 7 & -27 & 26 & -89 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 86 & -97 & -82 & 7 & -27 & 26 & -89 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 86 & -97 & -82 & 7 & -27 & 26 & -89 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 86 & -97 & -82 & 7 & -27 & 26 & -89 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 86 & -97 & -82 & 7 & -27 & 26 & -89 \\ 1 & 63 & -49 & -86 & -64 & -30 & 70 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 63 & -49 & -86 & -64 & -30 & 70 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 63 & -49 & -86 & -64 & -30 & 70 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 63 & -49 & -86 & -64 & -30 & 70 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 63 & -49 & -86 & -64 & -30 & 70 & 22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 63 & -49 & -86 & -64 & -30 & 70 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 63 & -49 & -86 & -64 & -30 & 70 & 22 \end{bmatrix}, 16$$

— décomposition en éléments simples
`partfrac(1/(x^4-1))`

$$\frac{1}{4\,(x-1)}-\frac{1}{4\,(x+1)}-\frac{1}{2\,(x^2+1)}$$

— polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
`p:=(x^5+4x+7) \% 11; gcd(p,p');`

$$(1\,\%\,11)\,x^5+(4\,\%\,11)\,x+(-4)\,\%\,11, 1\,\%\,11$$

— Corps fini non premier de caractéristique $p$ :
`GF(p,n)` crée un corps fini $K$ de cardinal $p^n$, et affecte une variable pour le générateur du groupe multiplicatif $K^*$, par défaut $g$. Les éléments du corps sont alors représentés par des polynômes en le générateur
`GF(3,5); g^10; g^(3^5);`

$$GF(3, k^5+k^3+2\cdot k^2+2\cdot k+1, [k, K, g], \text{undef}), (g^4+g^3+g^2+g), g$$

on peut travailler avec des polynômes ou des matrices à coefficients dans $K$

```
p:=(g+x)^7; normal(p); quo(p,x^6+g*x^3+x+g^2-2)
```

$$((g)+x)^7, x^7+(g)\,x^6+\left(-g^3\right)x^4+\left(-g^4\right)x^3+\left(\left(-g^4+g^3+g^2-g\right)\right)x+\left(\left((g^4-g^3+g^2-g+1)\right), (g)+\right.$$

### 2.2.2 Algèbre linéaire exacte

— Pivot de Gauss : `rref` crée des 0 de part et d'autre de la diaginale, `ref` en-dessous de la diagonale, `ker` renvoie une liste de vecteurs formant une base du noyau d'une application linéaire

```
m:=[[1,2],[3,4]]; rref(m); ref(m);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
m:=[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]; ker(m);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

— Factorisation LU

```
m:=ranm(3,3); p,l,u:=lu(m); permu2mat(p)*m-l*u;linsolve
(p,l,u,[1,2,3]);
```

$$\begin{pmatrix} 18 & -49 & -33 \\ -70 & 8 & 63 \\ -64 & 2 & 62 \end{pmatrix}, [0,2,1], \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{32}{9} & 1 & 0 \\ -\frac{35}{9} & \frac{53}{50} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 & -49 & -33 \\ 0 & -\frac{1550}{9} & -\frac{166}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{167}{25} \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \left[\frac{2155}{20708}, -\right.$$

— Déterminant

```
m:=ranm(100,100):; det(m);
```

"Done", $-128907058525305613041586957638312579781302990124302516137338064891980106318724$

On peut forcer l'utilisation d'un algorithme (voir l'aide détaillée de `det`).

— Réduction des endomorphismes

```
m:=[[1,2],[3,4]]; p,d:=jordan(m); normal
(inv(p)*m*p); pmin(m);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{33}-3 & -\sqrt{33}-3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{33}+5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{33}+5}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{33}+5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{33}+5}{2} \end{bmatrix}, [1,-5,-2]$$

— Polynome d'endomorphisme

```
m:=[[1,2],[3,4]]; p:=charpoly(m); horner(p,m);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, [1,-5,-2], \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Forme de Hermite et Smith d'une matrice à coefficients entiers

```
m:=ranm(3,3); ihermite(m); ismith(m);
```

$$\begin{pmatrix} -71 & -57 & 91 \\ 97 & 81 & -28 \\ 96 & -61 & -66 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1665 & 1192 & 27 \\ 1049 & 751 & 17 \\ 13693 & 9803 & 222 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 116357 \\ 0 & 1 & 73309 \\ 0 & 0 & 956927 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -23 & 0 & -17 \\ 1049 & 751 & 17 \\ 13693 & 9803 & 222 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2.3 Calcul scientifique

### 2.3.1 Analyse numérique

— Résolution approché déquation par méthode itérative ou par bisection
`fsolve(x=cos(x),x=0.3); fsolve(x=cos(x),x=-4..4)`

$$0.739085133215, [0.739085133215]$$

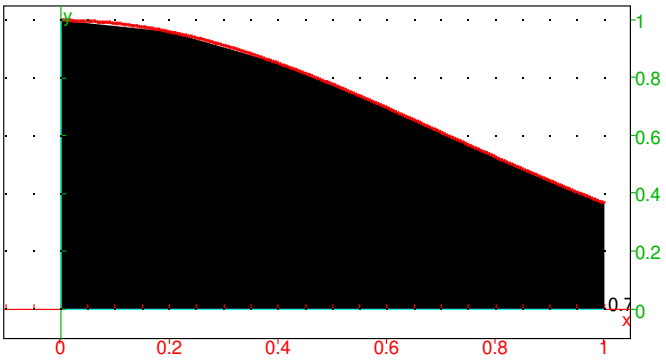
— Approximation polynômiale :
`lagrange([1,2,3,4],[-3,5,2,7])`

$$\left(\left(\frac{19}{6}(x-3)-\frac{11}{2}\right)(x-2)+8\right)(x-1)-3$$

— Intégration numérique
`int(exp(-x^2),x,0.0,1.0);`

$$0.746824132812$$

on peut forcer une méthode avec `gaussquad` ou `romberg` ou de petit ordre avec `plotarea`
`plotarea(exp(-x^2),x=0..1.0,5,trapezes)`



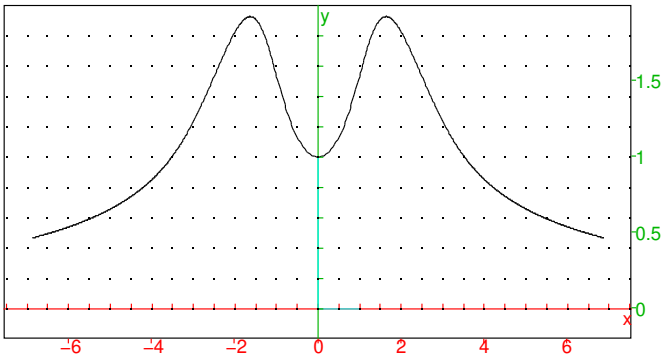
— Équations différentielles ordinaires $y' = f(t, y) = \sin(ty)$ avec condition initiale $(t_0, y_0) = (0, 1)$, valeur en $t = 2$

```
odesolve(sin(t*y),[t,y],[0,1],2)
```

$$[1.82241255674]$$

Tracé sur l'intervalle $t \in [-10, 10]$

```
odeplot(sin(t*y),[t=-10..10,y],[0,1])
```




### 2.3.2 Algèbre linéaire numérique

— factorisation LU et résolution de système,

```
m:=ranm(3,3,uniformd,0,1); p,l,u:=lu(m);
 v:=[1,2,3]; linsolve(m,v); linsolve(p,l,u,v);
```

$$\begin{pmatrix} 0.113295841962 & 0.781943215989 & 0.707931899466 \\ 0.702865943313 & 0.0740828420967 & 0.791446186136 \\ 0.70198591426 & 0.214816368651 & 0.251141090412 \end{pmatrix}, [1, 0, 2], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.161191252813 & 1 \\ 0.998747941822 & 0.1828908 \end{bmatrix}$$

— factorisation QR

```
q,r:=qr(m); q*r-m;
```

$$\left[\begin{pmatrix} -0.113316200712 & 0.984990060438 & 0.130207601527 \\ -0.702992245144 & -0.172094833744 & 0.690061788151 \\ -0.702112057954 & 0.0133397540417 & -0.711941506753 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} -0.999820336808 \\ 3.11284409992 \times 10 \\ -4.13476631595 \times 10 \end{bmatrix}\right.$$

— factorisation de Cholesky

```
m:=ranm(3,3);n:=trn(m)*m; cholesky(n);
```

$$\begin{pmatrix} -30 & 16 & -61 \\ -92 & -1 & 73 \\ 51 & -79 & 32 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11965 & -4417 & -3254 \\ -4417 & 6498 & -3577 \\ -3254 & -3577 & 10074 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{11965}{11965}\sqrt{11965} & 0 \\ -\frac{4417}{11965}\sqrt{11965} & \frac{58238681\sqrt{69682}}{11965\cdot 582386} \\ -\frac{3254}{11965}\sqrt{11965} & -\frac{57171723\sqrt{69682}}{11965\cdot 58238} \end{bmatrix}$$

— Conditionnement d'une matrice pour la norme 1, euclidienne ou infinie

```
cond(m,1); cond(m,2); cond(m,inf);
```

$$6.66566309196, 3.21215397512, 5.39023165578$$

— Réduction des endomorphismes

```
p,d:=jordan(evalf(m)); eigenvalues(m); eigenvects
(m);
```

$$\begin{bmatrix} 0.608442461946 & -0.298034960949 - 0.23104194391\mathrm{i} & 0.231437130328 + 0.29854473 \\ 0.719053901965 & 0.0457199610197 + 0.717441391449\mathrm{i} & -0.718668541327 - 0.0457981 \\ 0.335796451098 & 0.666007772205 - 0.1219248718\mathrm{i} & 0.12213341858 - 0.66714694 \end{bmatrix}$$

— Valeurs singulières

```
svl(m); u,s,q:=svd(m); u*diag(s)*trn(q);
```

$$[37.9599997195, 110.581613147, 121.933363995], \begin{bmatrix} 0.0724207810316 & -0.558567160455 \\ 0.880038674609 & 0.425649659254 \\ -0.469347591522 & 0.711916494287 \end{bmatrix}$$

— Factorisation de Schur

```
restart;p,u:=schur(m); trn(p)*m*p-u;
```

"Error : Bad Argument Type"

# Chapitre 3

# Calculer sur ordinateur

## 3.1 Représentation des entiers

**Proposition 1 Division euclidienne de deux entiers :** *si $a$ et $b$ sont deux entiers, $a \geq 0, b > 0$, il existe un unique couple $(q, r)$ tel que*

$$a = bq + r, \quad r \in [0, b[$$

Preuve : On prend pour $q$ le plus grand entier tel que $a - bq \geq 0$.
Exemple : `iquorem(23,7)`

$$[3, 2]$$

La division euclidienne permet d'écrire un nombre entier, en utilisant une base $b$ et des caractères pour représenter les entiers entre 0 et $b - 1$. Nous écrivons les nombres entiers en **base** $b = 10$ avec comme caractères les chiffres de 0 à 9. Les ordinateurs utilisent des circuits binaires pour stocker les informations, il est donc naturel d'y travailler en base 2 en utilisant comme caractères 0 et 1 ou en base 16 en utilisant comme caractères les chiffres de 0 à 9 et les lettres de A à F. En général, pour trouver l'écriture d'un nombre en base $b$ (par exemple $b = 2$), on effectue des divisions euclidienne successives par $b$ du nombre puis de ses quotients successifs jusqu'à ce que le quotient soit 0 et on accolle les restes obtenus (premier reste à droite, dernier reste à gauche). Inversement, pour retrouver un entier $d$ à partir de son écriture $d_n...d_0$, on traduit les divisions euclidiennes successives en

$$\begin{aligned} d &= (...((d_n b + d_{n-1})b + d_{n-2})... + d_1)b + d_0 \\ &= d_n b^n + d_{n-1}b^{n-1} + ... + d_0 \end{aligned}$$

Par exemple, vingt-cinq s'écrit en base 16 `0x19` car 25 divisé par 16 donne quotient 1, reste 9

```
convert(25,base,16)
```

$$[9, 1]$$

En base 2, on trouverait `0b11001` car $25 = 2^4 + 2^3 + 1$.

```
convert(25,base,2)
```

$$[1, 0, 0, 1, 1]$$

On peut effectuer les opérations arithmétiques de base (+,-,*, division) directement en base 2 (ou 16). Par exemple la table de l'addition est 0+0=0, 0+1=1+0=1 et 1+1=0 je retiens 1, donc :

```
  01001111
+ 01101011
----------
  10111010
```

**Exercice** : comment passe-t-on simplement de la représentation d'un nombre en base 2 à un nombre en base 16 et réciproquement ?

Les microprocesseurs peuvent effectuer directement les opérations arithmétiques de base sur les entiers "machine" (déclinés en plusieurs variantes selon la taille et la possibilité d'avoir un signe). Noter que la division de deux entiers $a$ et $b$ n'a pas la même signification que la division de deux réels, comme elle ne tomberait pas forcément juste, on calcule le quotient et le reste de la division euclidienne.

Ces entiers machines permettent de représenter de manière exacte des petits entiers relatifs par exemple un entier machine signé sur 4 octets est compris entre $[-2^{31}, 2^{31} - 1]$.

Ces entiers machines permettent de faire très rapidement du calcul exact sur les entiers, mais à condition qu'il n'y ait pas de dépassement de capacité, par exemple pour des entiers 32 bits, $2^{30} + 2^{30} + 2^{30} + 2^{30}$ renverra 0. Ils sont utilisables avec tous les langages de programmation traditionnels.

Les logiciels de calcul formel et certains logiciels de programmation permettent de travailler avec des entiers de taille beaucoup plus grande, ainsi qu'avec des rationnels, permettant de faire du calcul exact, mais on paie cette exactitude par un temps de calcul plus long, de plus pas mal de méthodes numériques ne gagnent rien à faire des calculs intermédiaires exacts. Néanmoins, l'utilisation d'un logiciel de calcul formel permettra dans certains cas d'illustrer certains phénomènes dus au calcul approché.

## 3.2 Les réels

On se ramène d'abord au cas des réels positifs, en machine on garde traditionnellement un bit pour stocker le signe du réel à représenter.

### 3.2.1 Virgule fixe et flottante.

La première idée qui vient naturellement serait d'utiliser un entier et de déplacer la virgule d'un nombre fixe de position, ce qui revient à mulitplier par une puissance (négative) de la base. Par exemple en base 10 avec un décalage de 4, `1234.5678` serait représenté par `12345678` et `1.2345678` par `12345` (on passe de l'entier au réel par multiplication par $10^{-4}$. L'inconvénient d'une telle

représentation est qu'on ne peut pas représenter des réels grands ou petits, comme par exemple le nombre d'Avogadro, la constante de Planck, etc.

D'où l'idée de ne pas fixer la position de la virgule, on parle alors de représentation à virgule flottante ou de nombre flottant : on représente un nombre par deux entier, l'un appelé **mantisse** reprend les chiffres significatifs du réel sans virgule, l'autre l'exposant, donne la position de la virgule. Attention, le séparateur est un point et non une virgule dans la grande majorité des logiciels scientifiques. On sépare traditionnellement la mantisse de l'exposant par la lettre `e`. Par exemple `1234.5678` peut être représenté par `12345678e-8` (mantisse `12345678`, exposant -8) mais aussi par `1234567800e-10`.

Naturellement, sur un ordinateur, il y a des limites pour les entiers représentant la mantisse $m$ et l'exposant $e$. Si on écrit les nombres en base $b$, la mantisse $m$ s'écrira avec un nombre $n$ fixé de chiffres (ou de bits en base 2), donc $m \in [0, b^n[$. Soit un réel $x$ représenté par

$$x = mb^e, \quad m \in [0, b^n[$$

Si $m \in [0, b^{n-1}[$, alors on peut aussi écrire $x = m'b^{e-1}$ avec $m' = mb \in [0, b^n[$, quelle écriture faut-il choisir ? Intuitivement, on sent qu'il vaut mieux prendre $m'$ le plus grand possible, car cela augmente le nombre de chiffres significatifs (alors que des 0 au début de $m$ ne sont pas significatifs). Ceci est confirmé par le calcul de l'erreur d'arrondi pour représenter un réel. En effet, si $x$ est un réel non nul, il ne s'écrit pas forcément sous la forme $mb^e$, on doit l'arrondir, par exemple au plus proche réel de la forme $mb^e$. La distance de $x$ à ce réel est inférieure ou égale à la moitié de la distance entre deux flottants consécutifs, $mb^e$ et $(m+1)b^e$, donc l'erreur d'arrondi est inférieure ou égale à $b^e/2$. Si on divise par $x \geq mb^e$, on obtient une erreur relative d'arrondi majorée par $1/(2m)$. On a donc intérêt à prendre $m$ le plus grand possible pour minimiser cette erreur. Quitte à mulitplier par $b$, on peut toujours se ramener (sauf exceptions, cf. ci-dessous), à $m \in [b^{n-1}, b^n[$, on a alors une erreur d'arrondi relative majorée par

$$\frac{1}{2b^{n-1}}$$

On appelle **flottant normalisé** un flottant tel que $m \in [b^{n-1}, b^n[$. Pour écrire un réel sous forme de flottant normalisé, on écrit le réel en base $b$, et on déplace la virgule pour avoir exactement $n$ chiffres non nuls avant la virgule et on arrondit (par exemple au plus proche). L'exposant est égal au décalage effectué. Notez qu'en base 2, un flottant normalisé commence forcément par 1, ce qui permet d'économiser un bit dans le stockage.

Ainsi, l'erreur d'**arrondi** commise lorsqu'on représente un réel (connu exactement) par un double normalisé est une erreur relative inférieure à de $2^{-53}$ ($b = 2$ et $n = 52 + 1$ pour les doubles).

Exemples :

— en base 10 avec $n = 6$, pour représenter $\pi = 3,14159265...$, on doit décaler la virgule de 5 positions, on obtient `314159.265...` on arrondit à 314159 donc on obtient `314159e-5`.

— en base 2 avec $n = 10$, pour représenter trois cinquièmes ($3/5$ en base 10, noté $11/101$ en base 2), on pose la division en base 2 de `11` par `101`, ce qui donne

```
 11         | 101
 110        ---------
-101        | 0.1001
----        |
  010       |
   100      |
   1000     |
  - 101     |
  -----     |
    011     |
```

on retrouve le nombre de départ donc le développement est périodique et vaut `0.1001 1001 1001 ...`. On décale le point de 10 positions, on arrondit, donc trois cinquièmes est représenté par la mantisse `1001100110` et l'exposant `-10`. On observe aussi sur cet exemple que $3/5$ dont l'écriture en base 10 `0.6` est exacte, n'a pas d'écriture exacte en base 2 (de même que 1/3 n'a pas d'écriture exacte en base 10).

Il existe une exception à la possibilité de normaliser les flottants, lorsqu'on atteint la limite inférieure de l'exposant $e$. Soit en effet $e_m$ le plus petit exposant des flottants normalisés et considérons les flottants $x = b^{e_m}(1 + 1/b)$ et $y = b^{e_m}$. Ces flottants sont distincts, mais leur différence n'est plus représentable par un flottant normalisé. Comme on ne souhaite pas représenter $x - y$ par 0, (puisque le test $x == y$ renvoie faux), on introduit les flottants **dénormalisés** , il s'agit de flottants dont l'exposant est l'exposant minimal représentable sur machine et dont la mantisse appartient à $[0, b^{n-1}[$. Par exemple 0 est représenté par un flottant dénormalisé de mantisse 0 (en fait 0 a deux reprśentation, une de signe positif et une de signe négatif).

Enfin, on utilise traditionnellement une valeur de l'exposant pour représenter les nombres plus grands que le plus grand réel reprśentable sur machine (traditionnellement appelé plus ou moins infini) et les erreurs (par exemple 0./0. ou racine carrée d'un nombre réel négatif, traditionnellement appelé NaN, Not a Number).

**Exercice** : quels sont les nombres réels représentables exactement en base 10 mais pas en base 2 ? Si on écrit $1/10$ en base 2 avec 53 bits de précision, puis que l'on arrondit avec 64 bits de précision, ou si on écrit $1/10$ en base 2 avec 64 bits de précision, obtient-on la même chose ?

Les ordinateurs reprśentent généralement les flottants en base 2 (cf. la section suivante pour plus de précisions), mais cette représentation n'est pas utilisée habituellement par les humains, qui préfèrent compter en base 10. Les ordinateurs effectuent donc la conversion dans les routines d'entrée-sortie. Le format standard utilisé pour saisir ou afficher un nombre flottant dans un logiciel scientifique est composé d'un nombre à virgule flottante utilisant le point comme séparateur décimal (et non la virgule) suivi si nécessaire de la lettre `e` puis de l'exposant, par exemple `1.23e-5` ou `0.0000123`. Dans les logiciels de calcul formel, pour distinguer un entiers représentés par un entier d'un entier représenté par un flottant on écrit l'entier suivi de `.0` par exemple `23.0`.

**Remarque** :
Les microprocesseurs ayant un mode **BCD** peuvent avoir un format de représentation des flottants en base 10, les nombres décimaux comme par exemple 0.3 peuvent être représentés exactement. Certains logiciels, notamment maple, uti-

lisent par défaut des flottants logiciels en base 10 sur des microprocesseurs sans mode BCD, ce qui entraine une baisse de rapidité importante pour les calculs numériques (on peut partiellement améliorer les performances en utilisant `evalhf` en maple).

### 3.2.2 Les flottants au format `double`

Cette section développe les notions de la section précédente pour les flottants machine selon la norme IEEE-754, utilisables dans les langage de programmation usuels, elle peut être omise en première lecture. La représentation d'un double en mémoire se compose de 3 parties : le bit de signe $s = \pm 1$ sur 1 bit, la mantisse $M \in [0, 2^{52}[$ sur 52 bits, et l'exposant $e \in [0, 2^{11}[$ sur 11 bits. Pour les nombres "normaux", l'exposant est en fait compris entre 1 et $2^{11} - 2$, le nombre représenté est le rationnel

$$(1 + \frac{M}{2^{52}})2^{e+1-2^{10}}$$

Pour écrire un nombre sous cette forme, il faut d'abord chercher par quel multiple de 2 il faut le diviser pour obtenir un réel $r$ dans $[1, 2[$, ce qui permet de déterminer l'exposant $e$. Ensuite on écrit la représentation en base 2 de $r - 1 \in [0, 1[$. Exemples :

- -2
  Signe négatif. Il faut diviser sa valeur absolue 2 par $2^1$ pour être entre 1 et 2 dont $e+1-2^{10} = 1$, l'exposant est $e = 2^{10}$. On a alors $r = 1$, $r-1 = 0$. Représentation
  `1 10000000000 00000000...0000`
- 1.5=3/2
  Signe positif, compris entre 1 et 2 dont l'exposant vérifie $e + 1 - 2^{10} = 0$ soit $e = 2^{10} - 1 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$. On a $r - 1 = 1/2 = 2^{-1}$. D'où la représentation
  `0 01111111111 10000000...0000`
- 6.4=32/5
  Positif. Il faut le diviser par $2^2$ pour avoir $8/5 \in [1, 2[$ donc $e+1-2^{10} = 2$ soit $e = 2^{10} + 1$. Ensuite $r = 3/5$ qu'il faut écrire en base 2 (cf. section précédente), on écrit donc les 52 premiers éléments du développement avec une règle d'arrondi du dernier bit au nombre le plus proche. Ici le bit suivant le dernier `1001` est un `1`, on arrondit donc à `1010`. D'où la représentation
  `0 1000000001 100110011001...10011010`

On observe que la représentation en base 2 de 6.4 a du être arrondie (car elle est infinie en base 2) bien qu'elle soit exacte (finie) en base 10. Seuls les entiers et les rationnels dont le dénominateur est une puissance de 2 peuvent être représentés exactement. Ceci entraine des résultats qui peuvent surprendre comme par exemple le fait que `0.5 - 5*0.1` n'est pas nul.

Des représentations spéciales (avec $e = 0$ ou $e = 2^{11} - 1$) ont été introduites pour représenter $\pm\infty$ (pour les flottants plus grands en valeur absolue que le plus grand flottant représentable), et pour représenter les nombres non nuls plus petits que le plus petit flottant représentable de la manière exposée ci-dessus (on parle de flottants dénormalisés), ainsi que le nombre NaN (Not a Number) lorsqu'une opération a un résultat indéfini (par exemple 0/0).

Remarque : Sur les processeurs compatibles avec les i386, le coprocesseur arithmétique i387 gère en interne des flottants avec 80 bits dont 64 bits de mantisse. Sur les architectures 64 bits (x86 ou AMD), le jeu d'instruction SSE permet de travailler avec des flottants de 128 bits. Le compilateur gcc permet d'utiliser ces flottants longs avec le type `long double` ou les types `__float80` et `__float128` en utilisant un drapeau de compilation du type `-msse`

### 3.2.3 Opérations sur les flottants

Les opérations arithmétiques de base sur les flottants se font de la manière suivante :

- addition et soustraction : on détecte s'il faut additionner ou soustraire en valeur absolue en analysant les signes, on détermine l'exposant le plus grand et on décale la partie mantisse du flottant dont l'exposant est le plus petit pour se ramener à additionner deux entiers (partie mantisses correspondant au même exposant), on décale à nouveau la partie mantisse en modifiant l'exposant après l'opération pour normaliser le flottant
- multiplication : on additionne les exposants et on multiplie les parties mantisses (vus comme des entiers), on arrondit et on ajuste l'exposant si nécessaire
- division : on soustrait les exposants et on divise les parties mantisses (division "à virgule"), on tronque et on ajuste l'exposant si nécessaire

### 3.2.4 Erreurs

La représentation des nombres réels par des doubles présente des avantages, les opérations arithmétiques sont faites au plus vite par le microprocesseur. Les coprocesseurs arithmétiques (intégrés sur les microprocesseurs de PC) proposent même le calcul des fonctions usuelles (trigonométriques, racine carrée, log et exp) sur le type double et utilisent des formats de représentation interne ayant plus de 64 bits pour les doubles, ce qui permet de limiter les erreurs d'arrondi. Par contre, des erreurs vont être introduites, on parle de calcul approché par opposition au calcul exact sur les rationnels. En effet, la représentation doit d'abord arrondir tout réel qui n'est pas un rationnel dont le dénominateur est une puissance de 2. Ensuite chaque opération va entrainer une propagation de ces erreurs et va y ajouter une erreur d'arrondi sur le résultat. Enfin, l'utilisation du type double peut provoquer un dépassement de capacité (par exemple `100!*100!`).

Pour diminuer ces erreurs et les risques de dépassement de capacité, il existe des types flottants multiple précision, qui permettent de travailler avec un nombre fixé à l'avance de décimales et une plage d'exposants plus grande. Les calculs sont plus longs mais les erreurs plus faibles. Attention, il s'agit toujours de calcul approché ! De plus, pour des quantités dont la valeur est déterminée de manière expérimentale, la source principale de propagation d'erreurs est la précision des quantités initiales, il ne sert souvent à rien d'utiliser des types flottants multiprécision car les erreurs dus à la représentation (double) sont négligeables devant les erreurs de mesure. Dans ce cas, il est pertinent lorsqu'on évalue $f(x)$ avec $x$ mal connu de calculer aussi $f'(x)$, en effet :

$$f(x(1+h)) = f(x) + xhf'(x) + O(h^2)$$

l'erreur relative sur $f(x)$ est donc au premier ordre multipliée par

$$|\frac{xf'(x)}{f(x)}|$$

Par exemple, l'erreur relative sur $e^x$ est au premier ordre l'erreur relative sur $x$ multipliée par $|x|$.

```
a:=convert(100,interval); (right(a)-left
(a))/evalf(a,12)
```

$$[0.999999999999991e2..0.100000000000000e3], 0.136424205265939 \times 10^{-13}$$

```
b:=exp(a); (right(b)-left(b))/evalf(b,12)
```

$$[0.268811714181369e44..0.268811714181736e44], 0.136443784064836 \times 10^{-11}$$

### 3.2.5 Erreur absolue, relative, arrondi propagation des erreurs.

On a vu précédemment que pour représenter un réel, on devait l'arrondir, ce qui introduit une erreur même si le réel est connu exactement (par exemple 1/10). Voyons comment se propagent les **erreurs** dans les opérations arithmétiques de base : on distingue l'addition, la multiplication et l'inversion. La soustraction se ramène à l'addition car le calcul de l'opposé n'introduit aucune erreur nouvelle. Pour l'addition, si $|x - x_0| \leq \varepsilon_0$ et si $|y - y_0| \leq \varepsilon_1$ alors par l'inégalité triangulaire ($|a + b| \leq |a| + |b|$), on a :

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_1$$

on dit que les erreurs *absolues* s'additionnent.

**Définition 2** *L'***erreur absolue** *est définie comme un majorant de la valeur absolue de la différence entre le nombre réel et son représentant double :*

$$|x - x_0| \leq \varepsilon$$

Mais comme il faut représenter $x_0 + y_0$ en machine, on doit ajouter une erreur d'arrondi, qui est proportionnelle à la valeur absolue de $x_0 + y_0$ d'où la notion d'erreur *relative* :

**Définition 3** *L'***erreur relative** *est égale à l'erreur absolue divisée par la valeur absolue du nombre*

$$|x - x_0| \leq \varepsilon |x_0|$$

Remarquons au passage que les erreurs de mesure expérimentales sont pratiquement toujours des erreurs relatives.

Donc lorsqu'on effectue une addition (ou une soustraction) de deux réels sur machine, on doit additionner les deux erreurs absolues sur les opérandes et ajouter une erreur d'arrondi (relative de $2^{-53}$, à titre d'exercice, on pourra vérifier que cette

erreur d'arrondi est majorée par l'erreur absolue de la somme $x + y$ dès l'instant où $x$ et $y$ ont eux-même une erreur d'arrondi).

Lorsqu'on effectue une multiplication de deux nombres $x, y$ dont les représentants $x_0, y_0$ sont non nuls, on a

$$\left|\frac{xy - x_0y_0}{x_0y_0}\right| = \left|\frac{x}{x_0}\frac{y}{y_0} - 1\right| = \left|(\frac{x}{x_0} - 1)(\frac{y}{y_0} - 1) + (\frac{x}{x_0} - 1) + (\frac{y}{y_0} - 1)\right|$$

l'erreur relative est donc la somme des erreurs relatives et du produit des erreurs relatives (on peut souvent négliger le produit devant la somme). Il faut aussi y ajouter une erreur relative d'arrondi de $2^{-53}$ sur $x_0y_0$.

On observe que la multiplication est une opération posant moins de problèmes que l'addition, car on manipule toujours des erreurs relatives, par exemple si l'erreur relative sur deux doubles $x$ et $y$ non nuls est de $2^{-53}$, alors l'erreur relative sur $xy$ sera de

$$2^{-53} + 2^{-53} + 2^{-106} + 2^{-53} \approx 3 \times 2^{-53}$$

Lorsque l'erreur relative sur les données est grande devant $2^{-53}$, l'erreur relative d'arrondi final est négligeable, on peut alors dire que les erreurs relatives s'additionnent pour un produit (c'est aussi vrai pour un quotient : exercice !). Par contre, si on additionne deux nombres dont le représentant de la somme est proche de 0, la somme des erreurs absolues peut devenir non négligeable par rapport à la somme des représentants, entrainant une erreur relative très grande. Par exemple si $x$ est représenté par $x_0 = 1 + 2^{-52}$ avec une erreur d'arrondi de $2^{-53}$ et $y$ par $y_0 = -1$ avec la même erreur d'arrondi, l'addition de $x$ et $y$ renvoie $2^{-52}$ avec une erreur absolue de $2 * 2^{-53}$ (ici il n'y a pas d'arrondi lorsqu'on fait la somme). C'est une erreur relative de 1 (qui domine largement l'erreur d'arrondi) ce qui signifie que dans la mantisse, seul le premier bit sur les 52 a un sens, la perte de précision est très grande.

Une autre conséquence importante est que l'addition de réels sur machine n'est pas une opération associative, par exemple

$$(2.0^{-53} + 2.0^{-53}) + 1.0 \to 1 + 2^{-52}$$

alors que

$$2.0^{-53} + (2.0^{-53} + 1.0) \to 1$$

Dans Xcas, il n'y a que 48 bits de mantisse :

```
(2.^(-48)+(2.^(-48)+1.))-1.;   ((2.^(-48)+2.^
(-48))+1.)-1.
```

$$0.0, 7.1054273576 \times 10^{-15}$$

Si on a plusieurs termes à additionner, il faut commencer par additionner entre eux les termes les plus petits, pour que les petits termes ne soient pas absorbés un à un dans les erreurs d'arrondi (les petits ruisseaux font les grands fleuves).

Exercice : pour calculer la valeur numérique d'une dérivée de fonction, il vaut mieux calculer $(f(x + h) - f(x - h))/(2h)$ que $(f(x + h) - f(x))/h$ car le terme d'erreur est en $O(h^2)$ et non en $O(h)$. Attention toutefois à ne pas prendre $h$ trop petit, sinon $x + h = x$ en flottants et même si $x + h \neq x$, l'erreur absolue

sur $f(x+h)-f(x-h)$ est (au moins) d'ordre $\varepsilon|f(x)|$, donc l'erreur relative est d'ordre $\varepsilon/h|f(x)|$. Par exemple pour `h=1e-8` le reste est en $O(h^2)$ donc de l'ordre des erreurs d'arrondi mais l'erreur relative sur $f(x+h)-f(x-h)$ est d'ordre $\epsilon/h$ largement supérieure (en flottants double-précision). On choisira plutôt $h$ tel que $\epsilon/h$ soit proche de $h^2$, donc de l'ordre de `1e-5`, qui fournira une valeur approchée avec une erreur relative de l'ordre de `1e-10`. Exemple : calcul de la dérivée numérique de $\exp(\sin(x))$ en $x=1$

```
f(x):=exp(sin(x)); seq(taux_accroissement
(f(x),1.0-10^(-k),1.0+10^(-k))-f'(1.0),k,1,11)
```

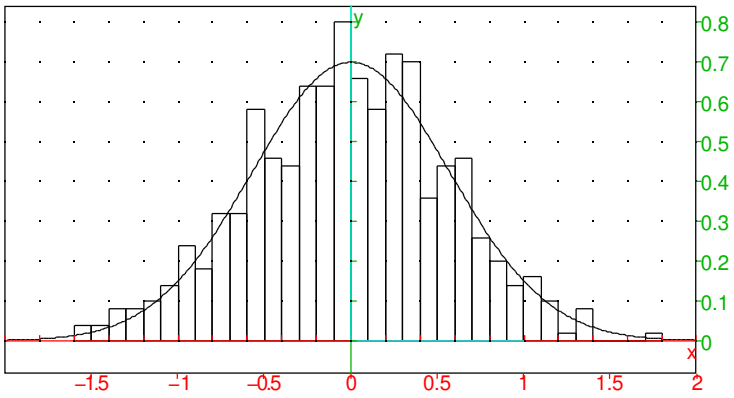
$x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$, $\big[-0.00673280473483, -6.75236243595\times10^{-5}, -6.75255783733\times10^{-7}, -6.74652511634\times10^{-9},$

Remarquons néanmoins que les erreurs calculées ici sont des majorations des erreurs réelles (ou si on préfère l'erreur obtenue dans le pire des cas), statistiquement les erreurs sur les résultats sont moindres, par exemple si on effectue $n$ calculs susceptibles de provoquer des erreurs indépendantes suivant une même loi d'espérance nulle, la moyenne des erreurs divisée par l'écart-type de la loi tend vers une loi normale centrée réduite. De manière plus déterministe, on a l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev

$$P(|X|>\alpha)\leq\frac{n\sigma^2}{\alpha^2}$$

où $X$ est la variable aléatoire somme des $n$ erreurs, $\alpha$ l'erreur et $n\sigma^2$ la variance de la somme $n$ erreurs supposées indépendantes, cette probabilité tend vers 0 pour $n$ grand si $\alpha$ est d'ordre $n$, et ne tend pas vers 0 si $\alpha$ est de l'ordre de $\sqrt{n}$. Exemple : somme de $n=400$ nombres répartis sur $[-1,1]$ selon la loi uniforme (représentant des erreurs), on divise par $\sqrt{n}$ =20, on effectue plusieurs tirages (par exemple 500) on trace l'histogramme et on compare avec la loi normale de moyenne nulle (l'espérance de la somme) et d'écart-type celui de la loi uniforme.

```
m:=ranm(400,500,-1..1):;gl_x=-2..2;histogram
(sum(m)/20,-1,0.1); plot(normald(0,0.57),-2..2)
```




Attention, si on effectue la somme de $n$ réels $\sum_j x_j$, les erreurs d'arrondis ne satisfont pas à ces hypothèses. En effet, l'erreur d'arrondi à chaque opération est une erreur relative, l'erreur absolue correspondante est $\epsilon|x_1 + x_2|$ puis $\epsilon|x_1 + x_2 + x_3|$ puis ... $\epsilon|x_1 + x_2 + ... + x_n|$, que l'on peut majorer par

$$\epsilon((n-1)|x_1| + (n-2)|x_2| + ... + |x_n||)$$

La majoration de l'erreur d'arrondi dépend donc de l'ordre des termes, on a intérêt à sommer en commençant par les termes les plus petits en valeur absolue. Mais on peut faire mieux, il est possible de corriger les erreurs d'arrondi dans une somme avec le programme suivant pour une liste (on peut bien sur adapter à la somme d'une expression dépendant d'une variable entière sans stocker de liste) :

```
Somme(l):={
  local x,s,c;
  s:=0.0;
  c:=0.0;
  pour x in l faire
```

```
    c += (x-((s+x)-s));
    s += x;
  fpour;
  print(c);
  return s+c;
}:;
```

En effet, $c$ devrait valoir 0 sans erreurs d'arrondis, avec les erreurs d'arrondis, on a le premier calcul $s+x$ qui donnera une erreur opposée à celui du calcul de $s$ à la ligne suivante, le 2ième calcul effectué $(s+x)-s$ donne une erreur absolue en $\epsilon|x|$ au pire (car c'est une erreur relative par rapport à $(s+x)-s$), et la 3ième erreur d'arrondi est négligeable (puisque la somme vaut 0). On a donc une erreur absolue sur $s+c$ qui est au premier ordre au pire en $O(\epsilon \sum |x_i|)$, bien meilleure que la majoration $\epsilon((n-1)|x_1|+(n-2)|x_2|+...+|x_n||)$ calculée précédemment.

Par exemple

```
n:=25000; l:=seq(1/j,j,1,n):; Somme(l);
```

25000, "Done", 10.7038667686

à comparer avec

```
S:=sum(1/j,j,1,n):; evalf(S); sum(1. /j,j,1,n);
```

"Done", 10.7038667686, 10.703866768

(le calcul de $S$ est fait en exact, celui de `sum(1. /j,j,1,n)` est approché sans correction).

En conclusion, il est souvent très difficile de calculer une majoration rigoureuse de l'erreur pour des calculs (sauf les plus simples), et cette majoration est en général bien trop pessimiste. Lorsqu'on doute de la précision d'un calcul, un test peu couteux consiste à refaire ce calcul en utilisant des flottants en précision plus grande et tester si le résultat varie en fonction du nombre de chiffres significatifs utilisés, ou faire varier légèrement les données et observer la sensibilité du résultat. Si on veut travailler en toute rigueur sans pour autant calculer les erreurs à priori, il faut utiliser un logiciel utilisant des intervalles pour représenter les réels (section suivante)

## 3.3 L'arithmétique d'intervalle.

Certains systèmes de calcul formel peuvent manipuler directement des intervalles réels, par exemple par l'intermédiaire de la bibliothèque C MPFI. Les opérations arithmétiques sur des intervalles renvoient alors le meilleur intervalle possible contenant toutes les valeurs possibles lorsque les opérandes parcourent leurs intervalles respectifs. Exemple en Xcas (version 1.1.1 et ultérieures) : `[-1..2]*[-1..2]` renvoie `[-2..4]`. Attention ici on parcourt toutes les valeurs possibles de $xy$, $x \in [-1,2], y \in [-1,2]$. Ce qui est différent du carré d'un intervalle ou plus généralement de l'évaluation d'un polynôme en un intervalle, `horner(x^2,[-1..2])` renvoie ainsi `[0..4]`.

Les fonctions disponibles sont souvent moins riches qu'en arithmétique flottante, le calcul d'une fonction non monotone sur un intervalle peut s'avérer délicat,

alors que si la fonction est monotone, il suffit de calculer l'image des deux bornes de l'intervalle. Pour les polynômes, Xcas décompose les coefficients en deux parties $P = P_+ - P_-$ en fonction du signe, puis utilise la monotonie de $P_+$ et $P_-$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ respectivement.

L'arithmétique d'intervalle dans $\mathbb{C}$ est beaucoup plus difficile à mettre en oeuvre puisqu'il n'y a plus d'ordre ni de monotonie, on doit alors s'en remettre à des estimations sur les parties réelles et imaginaires qui ne tiendront pas compte du phénomène ci-dessus sur la différence entre $xy,\ x \in [-1,2], y \in [-1,2]$ et $x^2,\ x \in [-1,2]$.

## 3.4 Calcul exact et approché, types, évaluation.

Dans les langages de programmation traditionnel (C, Pascal,...), il existe déjà des types permettant une représentation exacte des données (type entier) ou une représentation approchée (type flottant). Mais ces types de donnée de base occupent une taille fixe en mémoire, le type entier est donc limité à un intervalle d'entiers (par exemple $[0, 2^{32} - 1]$ pour un entier non signé sur une machine utilisant un processeur 32 bits) alors que le type flottant peut représenter des nombres réels, mais est limité à une précision en nombre de digits de la mantisse et de l'exposant (par exemple 12 chiffres significatifs et un exposant compris entre -499 et 499).

En calcul formel, on souhaite pouvoir calculer rigoureusement d'une part, et avec des paramètres dont la valeur n'est pas connue d'autre part ; il faut donc s'affranchir de ces limites :

- pour les entiers relatifs, on utilise des entiers de *précision arbitraire* dont la taille en mémoire est dynamique (déterminée pendant l'exécution et non à la compilation),
- pour les nombres complexes, on utilise un couple de nombres réels,
- pour les rationnels, on utilise un couple d'entiers relatifs,
- pour les irrationnels algébriques (par exemple $\sqrt{2}$), on utilise un polynôme irréductible dont ils sont racines,
- pour les paramètres ($x, y, z, t...$), on utilise un type structuré contenant un champ de type chaine de caractères pour représenter le nom du paramètre et un champ pour attribuer une valeur à (ou une hypothèse sur) ce paramètre,
- pour les nombres transcendants (par exemple $\pi$), on est obligé d'introduire un paramètre auquel on attribue une valeur numérique, qui ne sera utilisée qu'au moment où on veut une approximation numérique d'une expression contenant ce nombre transcendant, on parle de constante,
- lorsqu'on a besoin d'une approximation numérique d'un nombre, on peut utiliser des conversions de ces types en un type flottant. On peut aussi pour lutter contre les erreurs d'arrondi utiliser des nombres flottants étendus dont la précision est dynamique ou même des intervalles de flottants étendus,
- il faut aussi un nouveau type, appelé expression ou symbolique, permettant d'appliquer une fonction qu'on ne peut évaluer directement sur les objets précédents, par exemple $\sin(x)$. Il doit s'agir d'une opération de clôture, au sens où appliquer une fonction à un objet symbolique ne nécessite pas la création d'un nouveau type (en général on renvoie un objet symbolique).

Enfin, il faut pouvoir évaluer un objet (en particulier symbolique) : par exemple

évaluer $\sin(x)$ lorsqu'on assigne une valeur à $x$. Dans cet exemple, on voit qu'il faut d'abord remplacer $x$ par sa valeur avant de lui appliquer la fonction sinus. C'est le mécanisme général de l'évaluation, mais il y a quelques exceptions où on souhaite empêcher l'évaluation d'un ou plusieurs arguments d'une fonction avant l'évaluation de la fonction. Par exemple si on veut calculer la valeur numérique d'une intégrale par des méthodes de quadrature, on ne souhaitera pas rechercher une primitive de la fonction à intégrer. Dans le jargon, on parle alors de "quoter" un argument (l'origine du terme vient probablement de la notation `'` du langage Lisp). Certaines fonctions doivent toujours quoter leurs arguments (par exemple la fonction qui permet de purger le contenu d'un paramètre), on parle parfois d'auto-quotation.

## 3.5 Forme normale et reconnaissance du 0.

Une fois défini ces types de base représentant les nombres d'un système de calcul formel, il faut pouvoir comparer ces nombres, en particulier décider si deux représentations distinctes correspondent au même nombre ou, ce qui revient au même, par soustraction décider quand un nombre est nul. Par exemple $4/2$ et $2$ représentent le même nombre. Lorsqu'on dispose d'un algorithme permettant de représenter un nombre d'une manière unique, on parle de forme normale. C'est par exemple le cas pour les nombres rationnels, la forme normale usuelle est la fraction irréductible de dénominateur positif. C'est aussi le cas pour les fractions rationnelles de polynômes à coefficients entiers représentées par une fraction irréductible, avec au dénominateur un coefficient de plus haut degré positif. Malheureusement, il n'est pas toujours possible de trouver une forme normale pour diverses raisons théoriques ou pratiques :

- on ne connaît pas toujours le statut de certaines constantes (par exemple la constante d'Euler),
- il n'existe pas d'algorithmes permettant de déterminer s'il existe des relations algébriques entre constantes,
- il n'existe pas forcément une seule forme plus simple, par exemple :

$$\frac{(\sqrt{2}+1)x+1}{x+\sqrt{2}+1} = \frac{x+\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)x+1}$$

  Ce cas se présente fréquemment avec les extensions algébriques.
- en pratique il peut être trop coûteux d'utiliser une forme normale, par exemple le polynôme $(x^{1000}-1)/(x-1)$ possède 1000 monômes

En résumé, au mieux on a une forme normale, au pire on risque de ne pas reconnaître un zéro, entre les deux on peut ne pas avoir de forme normale mais être capable de reconnaître à coup sûr une expression nulle (par contre, si le système de calcul formel détermine qu'une expression est nulle, alors elle l'est).

Il n'existe pas d'algorithme solution pour le problème de la reconnaissance du zéro pour une classe d'expressions "assez générale". Heureusement, dans la plupart des cas pratiques on sait résoudre ce problème, en se ramenant le plus souvent au cas des polynômes et fractions rationnelles. Par exemple, pour simplifier une expression trigonométrique, on remplace les fonctions trigonométriques $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ par leur expression en fonction de $t = \tan(x/2)$, on est ainsi ramené à une fraction rationnelle en $t$ que l'on écrit sous forme normale.

Les polynômes ont un rôle central dans tout système de calcul formel puisque sauf dans les cas les plus simples (fractions d'entiers par exemple), la simplification d'expressions fait appel à un moment ou à un autre à des calculs de PGCD de polynômes. Le PGCD de polynômes est un algorithme très sollicité auquel nous consacrerons une section. En effet, l'application brutale de l'algorithme d'Euclide pose des problèmes d'efficacité ce qui a obligé à inventer des méthodes plus efficaces. Anticipons rapidement sur un exemple qui montre l'un des problèmes majeurs des algorithmes de calcul formel, l'explosion en taille (ici des coefficients des restes successifs). Voici donc les restes successifs lorsqu'on applique l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de $P(x) = (x+1)^7 - (x-1)^6$ avec sa dérivée (les deux polynômes sont premiers entre eux) :

$$7(x+1)^6 - 6(x-1)^5$$
$$\frac{162}{49}x^5 + \frac{-390}{49}x^4 + \frac{1060}{49}x^3 + \frac{-780}{49}x^2 + \frac{474}{49}x + \frac{-78}{49}$$
$$\frac{157780}{729}x^4 + \frac{-507640}{2187}x^3 + \frac{290864}{729}x^2 + \frac{-101528}{729}x + \frac{28028}{729}$$
$$\frac{1}{49}(\frac{1400328}{2645}x^3 + \frac{-732888}{2645}x^2 + \frac{1133352}{3703}x + \frac{-732888}{18515})$$
$$\frac{1}{2187}(\frac{2161816376832}{4669921}x^2 + \frac{-555436846944}{4669921}x + \frac{301917024864}{4669921})$$
$$\frac{1}{907235}(\frac{469345063045455}{129411872}x + \frac{-47641670106615}{129411872})$$
$$\frac{5497465490623352995840}{209648836272383412129}$$

Le lecteur voulant tester d'autres exemples pourra utiliser le programme `Xcas` suivant :

```
pgcdderiv(a):={
  local b,r,res;
  b:=diff(a,x);
  res:=NULL;
  for (;b!=0;){
    res:=res,b;
    r:=rem(a,b);
    a:=b;
    b:=r;
  }
  return(res);
}
```

```
P:=(x+1)^7-(x-1)^6;pgcdderiv(P)
```

$$(x+1)^7-(x-1)^6\,,7\,(x+1)^6-6\,(x-1)^5\,,\frac{162}{49}x^5-\frac{390}{49}x^4+\frac{1060}{49}x^3-\frac{780}{49}x^2+\frac{474}{49}x-\frac{78}{49},\frac{157780}{729}x^4$$

## 3.6 Valeur générique des variables et hypothèses

Lorsqu'on utilise un symbole sans lui affecter de valeurs en mathématiques on s'attend à une discussion en fonction du paramètre représenté par ce symbole. Ce

qui nécessiterait de créer un arborescence de calculs (on retrouve ici les problèmes d'explosion évoqués dans la section précédente). La plupart des systèmes de calcul formel contournent la difficulté en supposant que le paramètre possède une valeur générique (par exemple la solution de $(t^2-1)x = t-1$ sera $x = 1/(t+1)$) ou choisissent une branche pour les fonctions possédant un point de branchement (par exemple pour résoudre $x^2 = t$ en fonction de $t$). Certains systèmes demandent de manière interactive à l'utilisateur si la variable est par exemple positive ou différente de 1 mais cela s'oppose à un traitement automatique. On peut aussi anticiper ce type de décision en faisant des hypothèses sur une paramètre, la plupart des systèmes de calcul formel actuel proposent cette possibilité.

## 3.7 Structures de données

On a vu plus haut qu'on souhaitait manipuler des entiers de taille non fixe, des réels de précision fixe ou non, des fractions, des nombres complexes, des extensions algébriques, des paramètres, des expressions symboliques. La plupart des systèmes proposent un type générique qui recouvre ces divers types de scalaire. On peut par exemple utiliser un type structuré comportant un champ type et la donnée ou un pointeur sur la donnée (avec dans ce cas un pointeur sur un compteur de références de la donnée pour pouvoir la détruire dès qu'elle n'est plus référencée [1]). En programmation orientée objet, on utiliserait plutôt un type abstrait dont dérivent ces différents scalaires et le polymorphisme.

Il faut aussi un type pour les vecteurs, les matrices et les listes. Il faut prendre garde à la méthode utilisée par le système lorsqu'on modifie un élément d'un vecteur, matrice ou liste : soit on effectue une copie de tout l'objet en modifiant l'élément, soit on modifie l'élément de l'objet original. La première méthode (par valeur) est plus aisée à comprendre pour un débutant mais la seconde méthode (par référence) est bien plus efficace.

On peut se poser la question de savoir s'il faut inclure ces types dans le type générique ; en général la réponse est affirmative, une des raisons étant que les interpréteurs qui permettront de lire des données dans un fichier texte sont en général basé sur le couple de logiciels `lex(flex)/yacc(bison)` qui ne peut compiler qu'à destination d'un seul type. Ceci permet également d'unifier en un seul type symbolique les fonctions ayant un ou plusieurs arguments en voyant plusieurs arguments comme un vecteur d'arguments. Les fonctions sont le plus souvent elle-même incluses dans le type générique permettant ainsi à l'utilisateur de saisir des commandes ou programmes fonctionnels (on peut utiliser une fonction comme argument d'une commande).

Pour des raisons d'efficacité, les systèmes de calcul formel utilisent souvent des représentations particulières pour les polynômes dont on a dit qu'ils jouaient un rôle central. Pour les polynômes à une variable, on peut utiliser la liste des coefficients du polynôme, on parle alors de représentation dense. On peut aussi décider de ne stocker que les coefficients non nuls, on parle alors de représentation creuse

1. Certains systèmes de calcul formel (calculatrices par exemple) utilisent d'ailleurs des méthodes spécifiques pour gérer le problème de la fragmentation de la mémoire, appelés "garbage collector". Ce type de méthode est intégré dans des langages comme Lisp ou Java, en C/C++ on trouve des libraries pour cela, par exemple GC de Boehm, incluse dans la distribution de GCC.

(on stocke alors un couple formé par le coefficient et le degré du monôme correspondant). Pour les polynômes à plusieurs variables, on peut les considérer comme des polynômes à une variable à coefficients polynomiaux, on parle alors de représentation récursive. On peut aussi décider de ne pas briser la symétrie entre les variables (pas de variable principale), on parle alors de représentation distribuée, le plus souvent les représentation distribuées sont creuses car les représentations denses nécessitent très vite beaucoup de coefficients. Les méthodes de représentation creuses sont parfois aussi utilisées pour les matrices ayant beaucoup de coefficients nuls.

Voyons maintenant plus précisément sur quelques exemples de logiciels de calcul formel répandus quelles structures de données sont utilisées. Plusieurs éléments entrent en compte dans les choix faits :

— le(s) profil(s) d'utilisation (enseignement, ingéniérie, calcul intensif, recherche)
— les ressources disponibles (mémoire, puissance du processeur...)
— la facilité d'implémentation (choix du langage, outils disponibles en particulier débuggueurs, ...)
— l'histoire du système (un système conçu avec les outils disponibles aujourd'hui est forcément différent d'un système conçu il y a 20 ans)

Voyons quelques exemples, d'abord Giac, puis des systèmes pour ordinateur où les ressources (par exemple mémoire) sont moins limitées ce qui permet d'utiliser des langages de programmation de plus haut niveau. On termine par les calculatrices formelles HP et TI des années 2000[2]. Ce sont des systèmes plutôt destinés à l'enseignement, soumis à de fortes contraintes en termes de taille mémoire, et destinés à traiter des petits problèmes.

### 3.7.1 Maple, Mathematica, ...

Ces systèmes ont un noyau fermé, au sens où l'utilisateur n'a pas accès du tout, ou en tout cas pas facilement, aux structures de données de base. Je ne dispose donc pas d'information sur les structures de données utilisées par le noyau.

L'interaction système-utilisateur se fait quasiment toujours en utilisant le langage de programmation propre au système, langage interprété par le noyau du système (ce qui ralentit l'exécution). Ces langages utilisateurs sont essentiellement non typés : on travaille avec des variables du type générique sans pouvoir accéder aux types sous-jacents. On ne bénéficie en général pas des vérifications faites lors de la compilation avec un langage typé, de plus ces systèmes ne sont pas toujours fourni avec de bon outils de mise au point. Enfin ces langages ne sont pas standardisés d'un système à l'autre et il est en général impossible d'utiliser ces systèmes comme des librairies depuis un langage de programmation traditionnel. Leur intérêt principal réside donc dans une utilisation interactive en profitant de la librairie de fonctions accessibles.

2. Les HP Prime utilisent Giac comme noyau de calcul formel, les TI Nspire CAS utilisent sans doute une version actualisée du système utilisé sur les TI 89, 92, Voayge 200.

### 3.7.2 Giac/Xcas

Il s'agit du système de calcul formel que j'implémente actuellement sous forme d'une bibliothèque C++ (ce qui permettra aux programmes tiers d'utiliser beaucoup plus facilement du calcul formel qu'avec les systèmes précédents). L'objectif est d'avoir un système facile à programmer directement en C++, proche du langage utilisateur, lui-même compatible avec Maple ou MuPAD, tout cela sans trop perdre en performances comparativement aux librairies spécialisées écrites en C/C++. Ce qui explique un choix de type générique (`gen`) non orienté objet, avec un champ type et soit une donnée immédiate (pour les nombres flottants par exemple), soit un pointeur vers un objet du type correspondant au champ type pour les données de taille non fixe (on pourrait donc se contenter du langage C, mais le langage C++ permet de redéfinir les opérateurs sur des types utilisateurs ce qui améliore considérablement la lisibilité du code source). Les données dynamiques ne sont pas dupliquées, Giac utilise un pointeur sur un compteur de référence pour détruire ces données lorsqu'elles ne sont plus référencées.

Les entiers en précision arbitraire sont hérités de la bibliothque GMP (écrite en C) du projet GNU. Les flottants en précision arbitraire utiliseront aussi GMP (plus précisément MPFR). Il y a un type fraction, structure C composé d'un champ numérateur et d'un champ dénominateur, et un type nombre complexe.

Les listes, vecteurs, matrices utilisent le type paramétré `vector<>` de la librairie standard C++ (Standard Template Library). Les objets symboliques sont des structures composés d'un champ sommet qui est une fonction prenant un argument de type `gen` et renvoyant un résultat de type `gen`, et d'un champ feuille qui est de type `gen`. Lorsqu'une fonction possède plusieurs arguments, ils sont rassemblés en une liste formant le champ feuille de l'objet symbolique. Les programmes sont aussi des objets symboliques, dont le champ sommet est la fonction évaluation d'un programme. Les listes sont aussi utilisées pour représenter vecteurs, matrices et polynômes en une variable en représentation dense, on peut y accéder par valeur (`:=`) ou par référence (`=<`). Ces polynômes servent eux-mêmes á représenter des éléments d'une **extension algébrique** de $\mathbb{Q}$ (vus comme un couple de polynômes $P, Q$, où $Q$ est un polynome minimal irréductible à coefficients entiers, autrement dit $P, Q$ vaut $P(\alpha)$ où $Q(\alpha) = 0$), ou des éléments d'un corps fini (comme ci-dessus, mais ici $Q$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p$ premier, cf. la commande `GF`). Giac posséde aussi un type pour les polynômes en représentation creuse distribuée en plusieurs indéterminées (cf. les commandes `symb2poly` et `poly2symb`).

L'évaluation d'un objet symbolique se fait en regardant d'abord si la fonction au sommet doit évaluer ou non ses arguments (autoquote), on évalue les arguments si nécessaire puis on applique la fonction.

Une hypthèse sur un paramètre est une valeur spéciale affectée au paramètre, valeur ignorée par la routine d'évaluation.

### 3.7.3 Calculatrices formelles HP48/49

Les langages utilisés pour programmer ces calculateurs sont l'assembleur et le RPL (Reverse Polish Lisp) adapté à l'écriture de code en mémoire morte très compact.

Le type générique est implémenté avec un champ type appelé prologue (qui est en fait un pointeur sur la fonction chargée d'évaluer ce type d'objet) suivi de la donnée elle-même (et non d'un pointeur sur la donnée, on économise ainsi la place mémoire du compteur de référence).

Le type entier en précision arbitraire est codé par le nombre de digits (sur 5 quartets [3]) suivi du signe sur un quartet et de la représentation BCD (en base 10) de la valeur absolue de l'entier. Le choix de la représentation BCD a été fait pour optimiser les temps de conversion en chaîne de caractères pour l'affichage. La mémoire vive disponible est de 256K, c'est elle qui limite la taille des entiers et non le champ longueur de l'entier. Il n'y a pas de type spécifique pour les rationnels (on utilise un objet symbolique normal).

Les fonctions internes des HP49/50/40 utilisent le type programme pour représenter les entiers de Gauß (complexes dont la partie réelle et imaginaire est entière). Les nombres algébriques ne sont pas implémentés, sauf les racines carrées (représentée de manière interne par le type programme). Il y a un type spécifique prévu pour les flottants en précision arbitraire, mais l'implémentation des opérations sur ces types n'a pas été intégrée en ROM à ce jour.

Les types listes, programmes et objet symbolique sont composés du prologue (champ type) suivi par la succession d'objets situés en mémoire vive ou de pointeurs sur des objets situés en mémoire en lecture seule (ROM) et se terminent par un pointeur sur une adresse fixe (appelée `SEMI`). Ces types sont eux-mêmes des objets et peuvent donc être utilisés de manière récursive. La longueur des types listes, programmes, symboliques n'est stockée nulle part, c'est le délimiteur final qui permet de la connaître, ce qui est parfois source d'inefficacité. On utilise de manière interne les listes pour représenter les polynômes denses (avec représentation récursive pour les polynômes à plusieurs variables).

Les calculatrices HP4xG utilisent une pile [4], c'est-à-dire une liste de taille non fixée d'objets. On place les objets sur la pile, l'exécution d'une fonction prend ces arguments sur la pile et renvoie un ou plusieurs résultats sur la pile (ce qui est une souplesse du RPN comparé aux langages où on ne peut renvoyer qu'une valeur de retour). Il faut donc donner les arguments avant d'appeler la fonction correspondante. Par exemple pour calculer $a+b$ on tapera `a b +`. C'est la syntaxe dite polonaise inversée (RPN). Un avantage de cette syntaxe est que le codage d'un objet symbolique par cette syntaxe est évidente, il suffit de stocker la liste précédente `{a b +}`. Les objets symboliques sont donc représenté par une suite d'objets écrit en syntaxe polonaise inversée. L'évaluation d'un objet symbolique se fait dans l'ordre polonaise inversé : les arguments sont évalués puis les fonctions leur sont appliqués. Pour des raisons d'efficacité, on représente souvent les objets composites (listes, symboliques) par leurs composants placés sur la pile (appelé meta-objets).

Une rigidité de la syntaxe polonaise est que les fonctions ont toujours un nombre fixe d'arguments [5], par exemple l'addition a toujours 2 arguments, ainsi $a+b+c$ est obtenu par $(a+b)+c$ ou par $a+(b+c)$ c'est-à-dire respectivement `a b + c +`

3. un quartet=un demi octet

4. Plus précisément deux piles, la pile de donnée et la pile gérant le flux d'exécution. Cette dernière n'est pas visible par l'utilisateur

5. Sauf si on utilise comme dernier argument le nombre d'arguments de la fonction ou si on utilise (cf. infra) un tag de début de liste d'arguments

ou `a b c + +` ce qui brise parfois artificiellement la symétrie de certaines opérations. En polonaise inversée, le système doit de plus jongler avec l'autoquote puisque les arguments sont évalués avant l'opérateur qui éventuellement demanderait à ne pas évaluer ses arguments. À noter l'existence d'une commande `QUOTE` permettant à l'utilisateur de quoter une sous-expression.

Les hypothèses sur des variables réelles sont regroupées dans une liste stockée dans la variable globale `REALASSUME`, on peut supposer qu'une variable est dans un intervalle. Il n'y a pas à ce jour de possibilité de supposer qu'une variable est entière (ni à fortiori qu'une variable à une valeur modulo un entier fixé), bien qu'il ait été décidé de réserver la variable globale `INTEGERASSUME` à cet effet. Il n'y a pas de possibilité de faire des hypothèses ayant une portée locale.

### 3.7.4 Calculatrices formelles TI92/89/Voyage 200

Le langage utilisé pour programmer ces calculatrices est le langage C (on peut aussi écrire du code en assembleur pour ces calculatrices). On retrouve ici les différents types de données regroupé en un type générique qui est un tableau d'octets (aussi appelé quantum). Le champ type est appelé tag dans la documentation TI. Contrairement à ce qui précède, ce champ type est placé en mémoire à la fin de l'objet, ce qui est possible car la longueur d'un objet est toujours indiquée au début de l'objet. Ceci est fait afin de faciliter l'évaluation (cf. infra).

Les entiers en précision arbitraire sont codés par un tag parmi deux (pour différencier le signe), un octet pour la longueur, puis la valeur absolue de l'entier (en base 256). Ils sont donc limités par le champ longueur à 255 octets, le plus grand entier représentable est[6] $(256^{255} - 1)$. Il existe un tag spécifique pour les rationnels, pour les constantes réelles et entières qui apparaissent par exemple en résolvant une équation. Il existe des tags utilisés de manière interne, par exemple pour les nombres complexes. Il n'y a pas de tag prévu pour les flottants en précision arbitraire. ni pour les nombres algébriques (racines carrées par exemple).

Les listes sont codées par la succession de leurs éléments. En principe elles ne peuvent pas contenir des listes (sauf pour représenter une matrice). Quelques fonctions utilisent les listes pour représenter des polynômes denses à une variable, mais probablement pas pour représenter de manière récursive des polynômes à plusieurs variables (puisque le type liste n'est en principe pas récursif).

Comme les HP, les TI utilisent une pile (non visible par l'utilisateur) appelée expression stack afin de traduire un expression mathématique sous forme d'un texte en un objet symbolique codé exactement comme ci-dessus en syntaxe polonaise. Toutefois, la présence du champ longueur permet d'évaluer un objet symbolique sans perdre en efficacité en partant de l'opérateur final et en redescendant ensuite sur ces arguments, c'est la stratégie adoptée. C'est pour cela que le tag d'identification se trouve à la fin de l'objet. L'utilisation de cette méthode facilite grandement l'autoquotation (on peut toutefois regretter que le système n'ait pas prévu d'instruction permettant à l'utilisateur d'empêcher l'évaluation d'une sous-expression).

On ne peut pas faire d'hypothèse globale sur un paramètre par contre on peut faire des hypothèses de type appartenance à un intervalle ayant une portée locale.

6. Toutefois une adaptation du logiciel utilisant comme quantum de base par exemple 32 bits porterait cette limite à $65536^{65535} - 1$

## 3.8 Algorithmes et complexité.

On va présenter dans la suite quelques algorithmes que l'on peut considérer comme classiques dans le domaine du calcul formel. Avant d'implémenter ce type d'algorithmes, on a besoin des algorithmes de base en arithmétique.

La plupart des problèmes posés en calcul formel nécessitent des calculs dont la taille croit de manière exponentielle voire doublement exponentielle en fonction de la taille des données et ce même si le résultat est lui aussi de taille petite. Un exemple est la réduction des systèmes de plusieurs équations polynomiales (bases de Groebner).

### 3.8.1 Algorithmes modulaires ou p-adiques

Dans certains cas, l'application de théories mathématiques parfois sophistiquées permet de réduire la complexité (par exemple, M. Van Hoeij a découvert récemment qu'un algorithme très utilisé en théorie des nombres, l'algorithme LLL, permettait d'améliorer la complexité d'une des étapes de la factorisation des polynomes à coefficients entiers sur les entiers). Heureusement, dans de nombreux cas, on peut réduire la complexité (donc le temps de calcul) par des adaptations au problème d'une même idée à condition de faire des hypothèses sur les données (autrement dit en abandonnant la volonté d'implémenter un algorithme très générique, ou tout au moins en spécialisant des algorithmes génériques). Par exemple lorsqu'on travaille avec des entiers (ou des polynômes à coefficients entiers, ou des matrices à coefficients entiers...) on utilise souvent des algorithmes modulaires et $p$-adiques. Comme le calcul exact nécessite presque toujours de calculer avec des entiers, ces méthodes ont un rôle central en calcul formel, nous les présentons donc maintenant brièvement. Dans les prochaines sections, nous utiliserons ce type de méthode, par exemple pour le calcul de PGCD ou la factorisation de polynômes à coefficients entiers.

Les méthodes **modulaires** consistent à réduire un problème dans $\mathbb{Z}$ à son équivalent dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour une ou plusieurs valeurs de $n$, nombre premier. Le calcul dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a l'avantage de se faire avec des entiers dont la taille est bornée. Ensuite à l'aide d'estimations à priori sur la taille des solutions éventuelles du problème initial, on reconstruit la solution au problème initial avec le théorème des restes chinois.

Par exemple, on peut calculer un déterminant d'une matrice à coefficients entiers en cherchant ce déterminant dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour plusieurs nombres premiers $n$, dont le produit est deux fois plus grand qu'une estimation à priori de la taille du déterminant (donnée par exemple par l'inégalité d'Hadamard, cf. Cohen, p. 50).

Les méthodes $p$**-adiques** commencent de manière identique par un calcul dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on augmente ensuite la précision de la solution en la « liftant »de $\mathbb{Z}/n^k\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/n^{k+1}\mathbb{Z}$ ou vers $\mathbb{Z}/n^{2k}\mathbb{Z}$ (lift linéaire ou lift quadratique), on s'arrête lorsque $k$ est assez grand (à l'aide d'estimations à priori) et on reconstruit alors la solution initiale. L'étape de « lift »est en général un lemme de Hensel dont on verra quelques exemples dans les prochains articles. L'algorithme commun au lemme de Hensel et au théorème des restes chinois est l'identité de Bézout, que l'on retrouve d'ailleurs un peu partout (par exemple pour le calcul de primitives).

Illustrons cette méthode sur un exemple simple, la recherche de **racines ra-**

**tionnelles** d'un polynôme $P(X) = a_d X^d + \cdots + a_0$ à coefficients entiers ou polynomiaux, avec $a_d$ et $a_0$ non nuls. L'algorithme générique (assez connu) consiste à chercher les diviseurs de $a_0$ et de $a_d$ et à tester toutes les fractions de ces diviseurs, on montre en effet aisément que si $X = p/q$ fraction irréductible est racine de $P$ alors $q$ divise $a_d$ et $p$ divise $a_0$. Cet algorithme est très inefficace si $a_d$ ou $a_0$ est un grand entier (car on ne sait pas forcément le factoriser) ou s'il a beaucoup de facteurs premiers (la liste des diviseurs à tester est alors très grande).

Lorsque les coefficients de $P$ sont entiers, la recherche précédente revient à trouver un facteur à coefficients entiers $qX - p$ de $P$, on peut donc réduire le problème modulo un entier premier $n$ qui ne divise pas $a_d$ : si un tel facteur existe dans $\mathbb{Z}$ alors ce facteur (réduit modulo $n$) est un facteur de $P$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ donc $P$ admet une racine dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (puisque $q$ est inversible modulo $n$ car on a choisi $n$ premier ne divisant pas $a_d$). On évalue maintenant $P$ en les $n$ éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. S'il n'y a pas de 0, alors $P$ n'a pas de racine rationnelle. S'il y a des racines, on va les lifter de $\mathbb{Z}/n^k\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n^{2k}\mathbb{Z}$.

On suppose donc que pour $k \geq 1$, il existe un entier $p_k$ tel que

$$P(p_k) = 0 \pmod{n^k}$$

Il s'agit de trouver un entier $x$ tel que $p_{k+1} = p_k + n^k x$ vérifie

$$P(p_{k+1}) = 0 \pmod{n^{2k}}$$

On applique la formule de Taylor à l'ordre 1 pour $P$ en $p_k$, le reste est nul modulo $n^{2k}$, donc :

$$P(p_k) + n^k x P'(p_k) = 0 \pmod{n^{2k}}$$

soit finalement :

$$x = -\frac{P(p_k)}{n^k}(P'(p_k) \pmod{n^k})^{-1}$$

On reconnaît au passage la méthode de Newton, pour qu'elle fonctionne il suffit que $P'(p_k) \neq 0 \pmod{n}$ ce qui permet de l'inverser modulo $n^k$ (et c'est ici qu'intervient l'identité de Bézout). En pratique quand on factorise un polynôme, on commence par retirer les multiplicités, on peut donc supposer que $P$ est sans facteur multiple dans $\mathbb{Z}$. Ceci n'entraîne pas forcément qu'il le reste dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ce qui crée une contrainte supplémentaire sur le choix de $n$, à savoir que $P$ et $P'$ restent premier entre eux dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (il existe forcément de tels $n$, par exemple $n$ premier plus grand que le plus grand entier intervenant dans le calcul du PGCD de $P$ et $P'$ dans $\mathbb{Z}$).

Reste donc à revenir dans $\mathbb{Z}$ à partir d'une racine $p_k$ dans $\mathbb{Z}/(n^k\mathbb{Z})$ (où on peut choisir $k$). On va maintenant utiliser la représentation **modulaire symétrique** : on prend comme représentant modulaire d'un entier $z$ dans $\mathbb{Z}/n^k\mathbb{Z}$ l'unique entier congru à $z$ modulo $n$ qui est strictement compris entre $-n^k/2$ et $n^k/2$ (si $n$ est pair, la deuxième inégalité est choisie large).

Si $qX - p$ est un facteur de $P$, alors $a_d X - \frac{a_d}{q}p$ est encore un facteur de $P$ (le quotient de $P$ par $a_d X - \frac{a_d}{q}p$ est à coefficients rationnels mais le facteur est à coefficients entiers). Si on a choisi $k$ tel que $n^k > 2|a_d a_0|$, l'écriture en représentation modulaire symétrique de $a_d X - \frac{a_d}{q}p$ est inchangée, en effet on a des estimations à priori sur les entiers $p$ et $q$ : $|q| \leq |a_d|$ et $|p| \leq |a_0|$ puisque $q$ divise $a_d$ et $p$ divise $a_0$. Comme $a_d X - \frac{a_d}{q}p$ est égal à $a_d(X - p_k)$ dans $\mathbb{Z}/(n^k\mathbb{Z})$, il nous

suffit d'écrire en représentation modulaire symétrique $a_d(X - p_k) = a_dX - p'$. Pour conclure, on sait que $a_dX - p'$ est un multiple entier de $qX - p$. On divise donc le facteur $a_dX - p'$ par le pgcd de $a_d$ et $p'$ et on teste la divisibilité de $P$ par ce facteur réduit.

**Exemple**

Considérons le polynôme $2X^3 - X^2 - X - 3$ qui est sans facteur carré. On ne peut pas choisir $n = 2$ car on réduirait le degré, pour $n = 3$, on a $P' = X - 1$ qui est facteur de $P$, pour $n = 5$, $P' = 6X^2 - 2X - 1$, on vérifie que $P$ et $P'$ sont premiers entre eux (par exemple avec `GCDMOD` sur une HP49 où on aura fixé la variable `MODULO` à 5).

On teste ensuite les entiers de -2 à 2 sur $P$. Seul -1 est racine modulo 5 ($P(-1) = -5$), on va maintenant lifter $p_1 = -1$.

L'estimation à priori est $2|a_d||a_0| = 12$ donc $k = 2$ ($5^2 = 25 > 12$), une itération suffira. On a $P'(-1) = 7$, l'inverse de $P'(-1) \pmod 5$ est -2 donc :

$$x = -\frac{P(-1)}{5}(-2) = -(-1)(-2) = -2$$

et $p_2 = -1 + 5 \times (-2) = -11$ est racine de $P$ dans $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$. On calcule ensuite $a_d(X - p_k) = 2(X + 11) = 2X + 22 = 2X - 3$ en représentation symétrique, le PGCD de 2 et -3 est 1 donc on teste le facteur $2X - 3$, ici il divise $P$ donc $P$ admet un unique facteur entier de degré 1 qui est $2X - 3$.

### 3.8.2 Algorithmes déterministes. Algorithmes probabilistes : Las Vegas et Monte-Carlo

L'algorithme p-adique présenté ci-dessus est un algorithme déterministe, il renvoie toujours un résultat certifié et le temps de calcul nécessaire à son exécution ne dépend pas du hasard (sauf si on choisit le nombre premier $p$ au hasard...). Ce type d'algorithmes est parfois trop long par rapport à d'autres type d'algorithmes utilisant le hasard :

— les algorithmes de type Las Vegas. Ceux-ci utilisent un élément aléatoire (dont dépend le temps d'exécution) mais certifient le résultat. Par exemple pour calculer le polynôme caractéristique d'une matrice $M$ de taille $n$, on choisit un vecteur $v$ aléatoirement et on cherche une relation linéaire entre $v, Mv, ..., M^nv$, s'il n'y en a qu'une à constante multiplicative près, alors elle donne le polynôme caractéristique, sinon on se rabat sur une autre méthode (ou on renvoie une erreur).

— les algorithmes de type Monte-Carlo. Ceux-ci utilisent un élément aléatoire mais ne certifient pas le résultat, qui a une très faible probabilité d'être inexact. Par exemple, pour calculer un déterminant d'une matrice à coefficients entiers, on peut faire le calcul modulo plusieurs nombres premiers et reconstruire le résultat par le théorème des restes chinois et décider de s'arrêter lorsque le résultat reconstruit est stable pour un, deux, ... nombres premiers. L'inverse de la probabilité d'erreur est égale au produit des nombres premiers pour lesquel on observe la stabilité. Autre exemple : le test de pseudo-primalité de Miller-Rabin.

Dans Xcas, certains algorithmes sont de type Monte-Carlo par défaut, notamment le calcul de déterminant de grandes matrices à coefficients entiers ou de bases

de Gröbner, et un warning s'affiche alors. La variable `proba_epsilon` permet de régler le niveau de probabilité d'erreur acceptée, on peut la mettre à 0 pour forcer l'utilisation d'algorithmes déterministes ou de type Las Vegas avec certification du résultat. Si l'on fait des calculs à but expérimental pour établir une conjecture, il n'est pas nécessaire de certifier un calcul et il ne sert à rien de mettre `proba_epsilon` à 0. Par contre, pour établir une preuve (au sens mathématique du terme) qui nécessite un calcul fait sur machine, on prendra soin de mettre `proba_epsilon` à 0. On remarquera au passage que ce type de preuve ne peut se faire qu'avec un logiciel open-source, puisqu'il faut aussi pouvoir montrer que l'algorithme utilisé est correctement implémenté.

## 3.9 Quelques algorithmes d'arithmétique de base.

— Les algorithmes de multiplication et division dit rapides des entiers et polynômes (Karatsuba, FFT, ...). Cf. par exemple Knuth. ou pour les entiers la documentation de GMP, ou infra pour Karatsuba.

— Au lieu de la division euclidienne, on utilise très souvent la **pseudo-division** pour les polynômes : étant donné deux polynômes $A$ et $B$ de degrés $a$ et $b$ à coefficients dans un anneau contenu dans un corps (par exemple $\mathbb{Z}$), on multiplie $A$ par une puissance du coefficient dominant $B_b$ de $B$, plus précisément par $B_b^{a-b+1}$, ce qui permet d'effectuer la division par $B$ sans que les coefficients sortent de l'anneau.

$$B_b^{a-b+1}A = BQ + R$$

On utilise cette méthode lorsqu'on peut multiplier les polynômes par des constantes sans changer le problème (par exemple pour l'algorithme d'Euclide).

— L'algorithme d'Euclide est un algorithme « générique »de calcul de PGCD. Il n'est en général pas utilisé tel quel. Pour les entiers on utilise une variation adaptée à la représentation binaire des entiers (cf. Cohen ou le manuel de GMP version 4 pour plus de détails). Nous décrirons des algorithmes de PGCD plus efficaces pour les polynômes dans le prochain article.

— l'**identité de Bézout**, aussi appelée PGCD étendu. Étant donné deux entiers ou deux polynômes $a$ et $b$ on calcule $u$, $v$ et $d$ tels que $au + bv = d$. On écrit la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où on remarque que pour chaque ligne le coefficient de la 1ère colonne est égal à $a$ multiplié par le coefficient de la 2ème colonne additionné à $b$ multiplié par le coefficient de la 3ème colonne. Ce qui reste vrai si on effectue des combinaisons linéaires de lignes (type réduction de Gauß). Comme on travaille dans les entiers ou les polynômes, on remplace la réduction de Gauß des matrices à coefficients réels par une combinaison linéaire utilisant le quotient *euclidien* (entier ou polynomial selon le cas) $q$ de $a$ par $b$. On obtient alors le reste $r$ en 1ère colonne :

$$\begin{pmatrix} L_1 & a & 1 & 0 \\ L_2 & b & 0 & 1 \\ L_3 = L_1 - qL_2 & r & 1 & -q \end{pmatrix}$$

et on recommence jusqu'à obtenir 0 en 1ère colonne. L'avant-dernière ligne obtenue est l'identité de Bézout (la dernière ligne donne les cofacteurs du PPCM de $a$ et $b$). Si l'on veut l'inverse de $a$ modulo $b$ on remarque qu'il n'est pas utile de calculer les coefficients appartenant à la 3ème colonne. Enfin, les lignes intermédiaires peuvent servir à reconstruire une fraction d'entier représentée par un entier de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ lorsque le numérateur et le dénominateur sont de valeur absolue inférieure à $\sqrt{n/2}$. Exemple :

```
step_infolevel:=1;iegcd(1234,357);step_infolevel:=0
```

$$1, [46, -159, 1], 0$$

Voir aussi dans Xcas la session exemple depuis le menu Exemple,arit,bezout.xws.

— Le théorème des **restes chinois**. Si on connaît $x = a \pmod m$ et $x = b \pmod n$ avec $m$ et $n$ premiers entre eux, on détermine $c$ tel que $x = c \pmod{m \times n}$. On a donc $c = a + mu = b + nv$ et on applique Bézout pour trouver $u$ ou $v$, on en déduit $c$. En pratique, on cherche un des coefficients de Bézout, par exemple on cherche $U$ tel que $mU + nV = 1$, on a alors :

$$c = a + m(b - a)U$$

Si $n$ est petit devant $m$ (par exemple 32 bits), $U$ est aussi petit, on commence par réduire $b - a$ modulo $n$, puis on multiplie par $U$, on réduit à nouveau modulo $n$ et on multiple enfin par $m$.

— L'algorithme de **Hörner** pour évaluer un polynôme $P(X) = a_n X^n + ... + a_0$ en $x$. Il consiste à réécrire $P(x)$ sous la forme

$$P(x) = (...((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + ... + a_1)x + a_0$$

on calcule donc successivement

$$b_n = a_n,\ b_{n-1} = b_n x + a_{n-1},\ b_{n-2} = b_{n-1}x + a_{n-2}, .... b_0 = b_1 x + a_0 = P(x)$$

ce qui nécessite $n$ multiplications et $n$ additions, donc une complexité $O(n)$ (sur un corps fini ou un anneau dont les opérations se font en temps $O(1)$) avec une constante optimale. Voir aussi l'exercice sur cette méthode et son application au calcul du développement de Taylor d'un polynôme dans la section **??**. Voir aussi la session exemple depuis le menu Exemples, poly, horner.xws.

— La puissance rapide et les tests de pseudo-primalité. Il est essentiel d'avoir une méthode rapide permettant de générer des nombres premiers pour appliquer des méthodes modulaires et $p$-adiques. On utilise souvent le **test de Miller-Rabin**, qui prolonge le petit théorème de Fermat (si $p$ est premier, alors $a^p = a \pmod p$). Voir le manuel de programmation de Xcas.

### 3.9.1 Exemple de multiplication rapide : l'algorithme de Karatsuba

Soient $P, Q$ deux polynômes de degrés strictement inférieur à $2n$. On suppose que le cout d'une opération arithmétique dans le corps des coefficients vaut 1 et on

néglige les autres opérations (on suppose par exemple que le corps des coefficients est un corps fini). On écrit

$$P = A + x^n B, \quad Q = C + x^n D$$

avec $A, B, C, D$ de degrés strictement inférieur à $n$, on a alors :

$$PQ = AC + x^n(AD + BC) + x^{2n} BD$$

Il y a 4 produits de polynômes de degrés $< n$, mais au prix d'additions intermédiaires, on peut se ramener à 3 produits, en effet

$$(A + B)(C + D) - AC - BD = AD + BC$$

donc pour calculer le cofacteur de $x^n$ il suffit de soustraire à $(A + B)(C + D)$ les produits $AC$ et $BD$ que l'on calcule par ailleurs. Soit $M(n)$ le temps nécessaire pour calculer le produit de 2 polynômes par cette méthode, on a alors

$$M(2n) = 3M(n) + 8n$$

où $8n$ représente le nombre d'additions ou de soustractions pour former $A + B$, $C + D$, soustraire $AC$ et $BD$, et tenir compte des "retenues" (les termes de degré $\geq n$ de $AC$ se combinent avec ceux de degré $< 2n$ de $AD + BC$ et les termes de degré $< 3n$ de $x^{2n} BD$ avec ceux de degré $\geq 2n$ de $AD + BC$). On en déduit

$$u_n = M(2^n), \quad u_{n+1} = 3u_n + 8 \times 2^n$$

cette récurrence se résoud facilement par la commande
`rsolve(u(n+1)=3*u(n)+8*2^n,u(n),u(0)=1)`
qui donne $M(2^n) = u_n = -8 \cdot 2^n + 9 \cdot 3^n$.

Asymptotiquement, $M(2^n) \approx 9 \cdot 3^n$ ce qui est bien meilleur que la multiplication naive en $2 \cdot 4^n$, mais pour de petites valeurs de $n$, la multiplication naive est plus rapide, on utilise Karatsuba (récursivement) uniquement pour des valeurs de $n$ suffisamment grandes (théoriquement lorsque $8n$, le surcout dû aux additions est plus petit que la multiplication économisée, soit $8n < 2n^2$ soit $n > 4$, en pratique plutôt pour $n$ de l'ordre de quelques dizaines selon les implémentations, car nous n'avons tenu compte que des opérations arithmétiques).

### 3.9.2 Calcul de la racine carrée entière

Étant donné un entier $N$, il s'agit de déterminer le plus grand entier $n$ tel que $n^2 \leq N$, $n$ est la racine carrée de $N$. On choisit une base $b$ par exemple $b = 10$ pour un humain ou une puissance de 2 pour une machine, et on écrit $N$ en base $b$, en découpant les chiffres par blocs de 2 en commençant par la droite, par exemple 2 00 00 00. On initialise la racine carrée $n$ à 0 et son carré $c$ à 0, on va calculer la racine carrée entière bloc par bloc en commençant par la gauche. Pour calculer le bloc suivant, on multiplie $n$ par $b$ et $c$ par $b^2$ (c'est un simple décalage de l'écriture en ajoutant un ou deux zéros). Puis on ajoute les nombres impairs successifs $2n + 1$, $(2n + 1) + 2$, ... à $c$ tant que l'on est inférieur à $N$ tronqué au bloc. Le nombre d'impairs successifs ajouté est ajouté à $n$. En pratique, il suffit de conserver $N - c$ tronqué et de lui retrancher les impairs successifs.

Ainsi, pour 2 00 00 00, au 1er bloc 2, on initialise $n = c = 0$, on ajoute $2n + 1 = 1$ à $c$ qui vaut alors 1 et on s'arrête car 1+3 est supérieur à 2. On passe au 2ième bloc, $N - c$ tronqué vaut 100, $n$ vaut 10, $2n + 1$ vaut 21, on retranche donc à 100 successivement 21, 23, 25, 27 et on s'arrête car le reste est 4. Donc $n$ devient 14, et $N - c = 4$. On passe au troisième bloc, $N - c = 400$ et $n = 140$ donc $2n + 1 = 281$, on retranche de 400 les impairs successifs à partir de 281, ce qui n'est possible qu'une seule fois, cela donne $N - c = 119$ et $n = 141$. On passe au dernier bloc, $N - c = 11900$ et $n = 1410$ donc $2n + 1 = 2821$, on soustrait 2821, 2823, 2825, 2827 de 11900, il reste 604 et $n = 1414$.

Exercice : calculer la quatrième décimale de $\sqrt{2}$ de cette manière.

La complexité de cet algorithme est en $O(\log_b(N)^2)$. En effet, pour calculer un chiffre il faut faire un nombre de soustraction au plus égal à $b$, ces soustractions ayant au plus le nombre de chiffres de $N$ en base $b$. (On peut accélérer le calcul à la manière de Karatsuba en choisissant une base $b$ puissance de 2 (ou 10) de l'ordre de $\sqrt{N}$ et en divisant pour régner).

```
isqrt(x):={
  local l,j,k,s,n,N,res;
  l:=revlist(convert(x,base,100));
  res:=seq(0,size(l));
  s:=0;
  N:=0;
  pour k de 0 jusque size(l)-1 faire
    N := (N-s)*100+l[k];
    n:=2*horner(res[0..k],10)+1;
    s:=n; // ajout de la somme des impairs consecutifs
    pour j de 0 jusque 10 faire
      si s>N alors break; fsi;
      n+=2;
      s+=n;
    fpour;
    s -= n;
    res[k]:=j;
  fpour;
  retourne horner(res,10);
}:;
```

```
isqrt(2*10^8)
```

14142

### 3.9.3 Bezout sur les entiers et les fractions continues

Il existe une variante de l'identité de Bézout présentée ci-dessus pour les entiers. Soient $a \geq b > 0$ deux entiers, on pose

$$(L_n) \quad au_n - bv_n = (-1)^n r_n$$

où $r_0 = a, r_1 = b$ et $r_{n+2}$ est le reste de la division euclidienne de $r_n$ par $r_{n+1}$ ($q_{n+2}$ le quotient), $u_0 = 1, u_1 = 0, v_0 = 0, v_1 = 1$. Comme précedemment,

chaque ligne s'obtient par combinaison linéaire des deux précédentes, mais cette fois avec une addition

$$L_{n+2} = L_n + q_{n+2}L_{n+1}$$

ce qui se traduit par :

$$u_{n+2} = u_n + q_{n+2}u_{n+1}, \quad v_{n+2} = v_n + q_{n+2}v_{n+1}$$

Les suites $u_n$ et $v_n$ sont alors strictement croissantes (à partir du rang 1 pour $u_n$). Au rang $k$ du dernier reste non nul on a :

$$au_k - bv_k = (-1)^k r_k, \quad r_k = d = \gcd(a, b)$$

et au rang suivant :

$$au_{k+1} - bv_{k+1} = 0$$

On montre par récurrence que

$$v_n r_{n+1} + v_{n+1} r_n = a$$

et une relation analogue pour $u_n$, on en déduit alors que $v_{k+1} = a/d$ et $u_{k+1} = b/d$ (ce sont les cofacteurs du PPCM de $a$ et $b$), en particulier les coefficients de Bézout vérifient $u_k < b$ et $v_k < a$.

On va aussi voir que $u_{n+2}/v_{n+2}$ est la $n$-ième réduite du développement en fractions continues de $a/b$ (donc les coefficients de Bézout se lisent sur l'avant-dernière réduite). On introduit la notation

$$[a_0, a_1, .., a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{\cdots}{a_k}}}$$

pour $a_0 \geq 0, a_1 > 0, ..., a_n > 0$. On a alors :

$$\frac{a}{b} = [q_2, q_3, .., q_k]$$

En effet :

$$\frac{a}{b} = \frac{r_0}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} = ...$$

D'autre part, on montre par récurrence sur $n \geq 1$ que si $x > 0$

$$[q_2, ..., q_n, x] = \frac{v_n x + v_{n-1}}{u_n x + u_{n-1}}$$

en effet au rang $n = 1$

$$[x] = x = \frac{v_1 x + v_0}{u_1 x + u_0}$$

et pour l'induction :

$$\begin{aligned}
[q_2, ..., q_n, x] &= [q_2, ..., q_{n-1}, q_n + \frac{1}{x}] \\
&= \frac{v_{n-1}(q_n + 1/x) + v_{n-2}}{u_{n-1}(q_n + 1/x) + u_{n-2}} \\
&= \frac{x(v_{n-1}q_n + v_{n-2}) + v_{n-1}}{x(u_{n-1}q_n + u_{n-2}) + u_{n-1}} \\
&= \frac{v_n x + v_{n-1}}{u_n x + u_{n-1}}
\end{aligned}$$

Donc au rang $n-1$ et pour $x = q_n$, on obtient

$$[q_2, ..., q_n] = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$$

Les **fractions continues** servent bien entendu aussi et d'abord à approcher les réels par des rationnels. L'algorithme de calcul des termes du développement est le suivant : Soit $x \geq 0$. On initialise $y = x$ et la liste des $a_p$ à vide. Puis on fait une boucle : on ajoute la partie entière de $y$ à la liste, on calcule la partie fractionnaire de $y$, si elle est nulle on s'arrête (dans ce cas $x \in \mathbb{Q}$), sinon on stocke dans $y$ l'inverse de cette partie fractionnaire et on recommence. On note classiquement :

$$h_{-2} = 0, \quad h_{-1} = 1, \quad h_p = a_p h_{p-1} + h_{p-2} \tag{3.1}$$
$$k_{-2} = 1, \quad k_{-1} = 0, \quad k_p = a_p k_{p-1} + k_{p-2} \tag{3.2}$$

On a $h_0 = a_0, h_1 = a_1 a_0 + 1, k_0 = 1, k_1 = a_1$. Les suites $h_p$ et $k_p$ sont donc positives et strictement croissantes pour $p \geq 1$, puisque pour $p \geq 1$, $a_p \geq 1$, elles tendent vers l'infini au moins aussi vite que des suites de Fibonacci (à vitesse au moins géométrique donc). On a aussi aisément par récurrence :

$$h_p k_{p-1} - h_{p-1} k_p = (-1)^{p+1} \tag{3.3}$$

On montre aussi comme ci-dessus :

$$[a_0, ..., a_{p-1}, y] = \frac{y h_{p-1} + h_{p-2}}{y k_{p-1} + k_{p-2}}$$

On définit $x_p$ par $x = [a_0, ..., a_{p-1}, x_p]$, en faisant $y = x_p$ on a alors $x = \frac{x_p h_{p-1} + h_{p-2}}{x_p k_{p-1} + k_{p-2}}$ ce qui donne $x_p$ en fonction de $x$ et

$$a_p = \text{floor}\left( -\frac{x k_{p-2} - h_{p-2}}{x k_{p-1} - h_{p-1}} \right)$$

En faisant $y = a_p$ on obtient $[a_0, ..., a_p] = \frac{h_p}{k_p}$. On montre ensuite que les suites $(h_p/k_p)$ pour les indices pairs et impairs sont deux suites adjacentes qui convergent vers $x$, et on a

$$\frac{h_p}{k_p} - \frac{h_{p-1}}{k_{p-1}} = \frac{(-1)^{p-1}}{k_p k_{p-1}} \tag{3.4}$$

En effet, la dernière égalité est une conséquence immédiate de (**??**), la croissance ou décroissance des suites d'indice pair ou impair s'en déduit en ajoutant (**??**) au cran suivant. La convergence vient de la limite infinie de $k_p$ en l'infini. On a donc

$$x = a_0 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{k_p k_{p+1}}, \quad \frac{1}{k_p(k_p + k_{p+1})} \leq |x - \frac{h_p}{k_p}| \leq \frac{1}{k_p k_{p+1}}$$

La convergence est d'autant plus rapide que les $k_p$ tendent rapidement vers l'infini, donc si les $a_p$ sont plus grands que 1. La convergence la plus lente correspond au cas où tous les $a_p = 1$ cas du nombre d'or, ou à partir d'un certain rang (nombre de $Q[\sqrt{5}]$).

### 3.9.4 La puissance rapide itérative

Pour calculer $a^k \pmod n$, on décompose $k$ en base 2

$$k=\sum_{j=0}^{J} k_j 2^j, \quad a^k=\prod_{j=0}^{J} a^{k_j 2^j}=\prod_{j/k_j\neq 0} a^{2^j}$$

On initialise une variable `B` à 1, `B` vaudra $a^k \pmod n$ en fin de calcul, on initialise une variable `k` à $k$. On calcule dans une boucle les carrés successifs de $a \pmod n$ que l'on stocke dans une variable `A` (`A` vaudra donc successivement $a \pmod n, a^2 \pmod n, a^4 \pmod n, ...$) et simultanément on teste si $k_j$ vaut 1 en prenant le reste de la division par 2 de `k` (dans ce cas on multuplie `B` par `A` modulo $n$), on divise ensuite `k` par 2 au sens du quotient euclidien.

```
rapide(a,k,n):={
  local A,B;
  A:=a; B:=1;
  tantque k!=0 faire
    si irem(k,2)==1 alors B:=irem(A*B,n); fsi;
    k:=iquo(k,2);
    A:=irem(A*A,n);
  ftantque;
  return B;
}
```

```
rapide(123,4567890,123456)
```

$$110553$$

Pour tester en mode pas à pas, ajoutez `debug(` au début de la commande qui précède

```
debug(rapide(123,4567890,123456))
```

## 3.10 Pour en savoir plus.

Sur des aspects plus théoriques :

- Knuth : TAOCP (The Art of Computer Programming), volumes 1 et suivants
- Henri Cohen : A Course in Computational Algebraic Number Theory
- Davenport, Siret, Tournier : Calcul formel : Systèmes et algorithmes de manipulations algébriques

Sur des aspects plus pratiques, quelques références en ligne, la plupart sont accessibles gratuitement :

- le code source de Giac disponible à l'URL :
  `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html`
- en Maple, il est possible de décompiler une instruction `Maple` avec la commande
  `eval(instruction);`

après avoir tapé
`interface(verboseproc=2);`

— le source du plus ancien système de calcul formel `maxima` (devenu logiciel libre) pour les personnes familières du langage Lisp
`http://sourceforge.net/projects/maxima`
de même pour le système Axiom

— le source de librairies plus spécialisées (GMP, MPFR, MPFI, GP-PARI, Singular, NTL, GAP, CoCoA, ...), rechercher ces mots-clefs sur un moteur de recherche.

## 3.11 Exercices sur types, calcul exact et approché, algorithmes de bases

Vous pouvez Pour télécharger et installer Xcas sur votre ordinateur, suivre les instructions données sur
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html`
Pour lancer `xcas` sous linux, cherchez Xcas dans le menu Education ou ouvrir un fenêtre terminal et taper la commande

```
xcas &
```

Lors de la première exécution, vous devrez choisir entre différents types de syntaxe (compatible C, maple ou TI89). Vous pouvez changer ce choix à tout moment en utilisant le menu Configuration->mode (syntaxe). On vous propose aussi d'ouvrir le tutoriel, qui est également accessible depuis le menu Aide, Débuter en calcul formel.

L'aide en ligne est accessible en tapant `?nom_de_commande`. Dans Xcas, vous pouvez aussi taper le début d'un nom de commande puis la touche de tabulation (à gauche du A sur un clavier francais), sélectionner la commande dans la boite de dialogues puis cliquer sur Details pour avoir une aide plus complète dans votre navigateur. Pour plus de détails sur l'interface de Xcas, consultez le manuel (Aide->Interface). Si vous n'avez jamais utilisé de logiciel de calcul formel, vous pouvez commencer par lire le tutoriel (menu Aide->Debuter en calcul formel->tutoriel) et faire certains des exercices proposés (des corrigés sous forme de sessions Xcas sont dans Aide->Debuter en calcul formel->solutions)

Il peut être interessant de tester ces exercices en parallèle avec Xcas et des calculatrices formelles....

1. À quelle vitesse votre logiciel multiplie-t-il des grands entiers (en fonction du nombre de chiffres) ? On pourra tester le temps de calcul du produit de $a(a+1)$ où $a = 10000!$, $a = 15000!$, etc. . Même question pour des polynômes en une variable (à générer par exemple avec `symb2poly(randpoly(n))` ou avec `poly1[op(ranm(.))]`).

   ```
   n:=100; p:=symb2poly(randpoly(n)):; time(p*p);
   ```

   $$100, \text{"Done"}, \left[3.4 \times 10^{-5}, 3.23863514 \times 10^{-5}\right]$$

2. Comparer le temps de calcul de $a^n \pmod m$ par la fonction `powmod` et la méthode prendre le reste modulo $m$ après avoir calculé $a^n$.

   ```
   a:=123; n:=456; m:=789; time(powmod(a,n,m
   )); time(irem(a^n,m));
   ```

   $$123, 456, 789, \left[8.0 \times 10^{-7}, 8.22213335 \times 10^{-7}\right], \left[3.6 \times 10^{-6}, 3.4850481 \times 10^{-6}\right]$$

   Programmez la méthode rapide et la méthode lente. Refaites la comparaison. Pour la méthode rapide, programmer aussi la version itérative utilisant la décomposition en base 2 de l'exposant : on stocke dans une variable locale $b$ les puissances successives $a^{2^0} \pmod m, a^{2^1} \pmod m, ..., a^{2^k} \pmod m, ...$, on forme $a^n \pmod n$ en prenant le produit modulo $m$ de ces puissances successives lorsque le bit correspondant est à 1 (ce qui se

détecte par le reste de divisions euclidiennes sucessives par 2, le calcul de $b$ et du bit correspondant se font dans une même boucle).

3. Déterminer un entier $c$ tel que $c = 1 \pmod 3$, $c = 3 \pmod 5$, $c = 5 \pmod 7$ et $c = 2 \pmod{11}$.
   `ichinrem()`

   "ichinrem(seq[])"
   "Error : Invalid dimension"

4. Calculez dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
   $$\prod_{a=0}^{10}(x-a)$$
   `product()`

   "product(seq[])"
   "Error : Bad Argument Value"

5. Algorithmes fondementaux : écrire des programmes implémentant
   (a) le pgcd de 2 entiers
   (b) l'algorithme de Bézout
   (c) l'inverse modulaire en ne calculant que ce qui est nécessaire dans l'algorithme de Bézout
   (d) les restes chinois

6. Construire un corps fini de cardinal 128 (`GF`), puis factoriser le polynôme $x^2 - y$ où $y$ est un élément quelconque du corps fini. Comparer avec la valeur de $\sqrt{y}$.
   `GF(2,7);`

   $$GF(2, k^7 + k^6 + k^4 + k^2 + 1, [k, K, g], \text{undef})$$

7. Utiliser la commande `type` ou `whattype` ou équivalent pour déterminer la représentation utilisée par le logiciel pour représenter une fraction, un nombre complexe, un flottant en précision machine, un flottant avec 100 décimales, la variable $x$, l'expression $\sin(x)+2$, la fonction `x->sin(x)`, une liste, une séquence, un vecteur, une matrice. Essayez d'accéder aux parties de l'objet pour les objets composites (en utilisant `op` par exemple).
   `a:=sin(x)+2; type(a); a[0]; a[1]`

   $$\sin x + 2, \text{expression}, +, \sin x$$

8. Comparer le type de l'objet `t` si on effectue la commande `t[2]:=0;` après avoir purgé `t` ou après avoir affecté `t:=[1,2,3]` ?
   `t[2]:=0; type(t); t:=[1,2,3]; type(t)`

   | **key** | **value** |, DOM_MAP, $[1, 2, 3]$, vector

9. Comparer l'effet de l'affectation dans une liste et dans un vecteur ou une matrice sur votre logiciel (en Xcas, on peut utiliser =< au lieu de := pour stocker par référence).

```
l:=[1,2,3]; l1:=l; l[1]:=5; l1
```

$$[1,2,3],[1,2,3],[1,5,3],[1,2,3]$$

10. Le programme ci-dessous calcule la base utilisée pour représenter les flottants.

```
function Base()  local A,B;  A:=1.0; B:=1.0;
  while evalf(evalf(A+1.0)-A)-1.0=0.0 do
  A:=2*A; od;  while evalf(evalf(A+B)-A)-B!=0
 do B:=B+1; od;  return B;ffunction:;
```

"Done"

Testez-le `Base()`

2.0

et expliquez.

11. Déterminer le plus grand réel positif $x$ de la forme $2^{-n}$ ($n$ entier) tel que $(1.0+x)-1.0$ renvoie 0 sur PC avec la précision par défaut puis avec `Digits:=30`.

```
n:=30; x:=2^(-n):; (1.0+x)-1.0
```

$30$, "Done", $9.31322574615 \times 10^{-10}$

12. Calculer la valeur de $a := \exp(\pi\sqrt{163})$ avec 30 chiffres significatifs, puis sa partie fractionnaire. Proposez une commande permettant de décider si $a$ est un entier.

```
a:=exp(pi*sqrt(163));
```

$$e^{\pi\sqrt{163}}$$

13. Déterminer la valeur et le signe de la fraction rationnelle

$$F(x,y) = \frac{1335}{4}y^6 + x^2(11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2) + \frac{11}{2}y^8 + \frac{x}{2y}$$

en $x = 77617$ et $y = 33096$ en faisant deux calculs, l'un en mode approché et l'autre en mode exact. Que pensez-vous de ces résultats ? Combien de chiffres significatifs faut-il pour obtenir un résultat raisonnable en mode approché ?

```
F(x,y):=1335/4*y^6+x^2*(11x^2*y^2-y^6-121*y^4-2
)+11/2*y^8+x/2/y;
```

$$(x,y) \mapsto \frac{1335}{4}y^6 + x^2\left(11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2\right) + \frac{11}{2}y^8 + \frac{\frac{x}{2}}{y}$$

```
F();
```

"[] size() != [x,y] Error : Bad Argument Value"

14. Que se passe-t-il si on essaie d'appliquer l'algorithme de la puissance rapide pour calculer $(x+y+z+1)^k$ par exemple pour $k = 64$ ? Calculer le nombre de termes dans le développement de $(x+y+z+1)^n$ et expliquez.

```
time(normal((x+y+z+1)^30)); a:=normal((x+y+z+1
)^15):; time(normal(a*a));
```

$$[0.005, 0.00483577376]\text{, "Done", }[0.013, 0.0130308523]$$

15. Programmation de la **méthode de Horner**
Il s'agit d'évaluer efficacement un polynôme

$$P(X) = a_n X^n + ... + a_0$$

en un point. On pose $b_0 = P(\alpha)$ et on écrit :

$$P(X) - b_0 = (X - \alpha)Q(X)$$

où :

$$Q(X) = b_n X^{n-1} + ... + b_2 X + b_1$$

On calcule alors par ordre décroissant $b_n$, $b_{n-1}$, ..., $b_0$.

(a) Donner $b_n$ en fonction de $a_n$ puis pour $i \leq n-1$, $b_i$ en fonction de $a_i$ et $b_{i+1}$. Indiquez le détail des calculs pour $P(X) = X^3 - 2X + 5$ et une valeur de $\alpha$ non nulle.

(b) Écrire un fonction `horn` effectuant ce calcul : on donnera en arguments le polynôme sous forme de la liste de ces coefficients (dans l'exemple `[1,0,-2,5]`) et la valeur de $\alpha$ et le programme renverra $P(\alpha)$. (On pourra aussi renvoyer les coefficients de $Q$).

(c) En utilisant cette fonction, écrire une fonction qui calcule le développement de Taylor complet d'un polynôme en un point.

# Chapitre 4

# Les générateurs de nombres pseudo-aléatoires.

## 4.1 Selon la loi uniforme

Les générateurs d'entiers dans une plage donnée selon la loi uniforme servent en général de base pour générer des nombres aléatoires entiers ou non selon des lois classiques. Ils doivent à la fois être rapides, avoir une période égale à la plage donnée et avoir de bonnes propriétés statistiques.

Xcas utilise un "tiny" Mersenne Twister (de période environ $2^{127}$), certaines implantations de Giac utilisent un générateur congruentiel.

### 4.1.1 Les générateurs congruentiels à 1 cran.

Etant donnés trois entiers $a, c$ et $m$ on considère la suite

$$u_{n+1} = au_n + c \pmod m$$

où on choisit (par exemple) comme représentant de $u_n$ le reste de la division euclidienne par $m$. La valeur de $u_0$ est appelée seed en anglais, elle est initialisée usuellement soit à 0 (ce qui permet de reproduire des bugs dans un programme dépendant du hasard), soit avec l'horloge système ou tout autre entrée de l'ordinateur (par exemple périphériques).

On supposera que $a \neq 1$, le cas $a = 1$ n'est pas très intéressant. On a alors :

$$u_n = a^n u_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} c \pmod m$$

On cherche à réaliser une période la plus grande possible idéalement $m$, mais $m-1$ peut fort bien convenir, et c'est possible si $m$ est premier en choisissant $a$ générateur du groupe cyclique, car on a alors $a \neq 1 \pmod m$ et :

$$u_n = a^n(u_0 + \frac{c}{a-1}) - \frac{c}{a-1} \pmod m$$

donc la suite est stationnaire ou prend toutes les valeurs sauf $-\frac{c}{a-1}$.

Exemple : choisir pour $m$ une puissance de 2 permet d'effectuer la division euclidienne très rapidement, mais cela a un inconvénient assez important : les bits

de poids faible de $u_n$ ont une périodicité très (trop) petite. Il est alors intéressant de prendre $m = 2^k \pm 1$, parce que la division euclidienne par $m$ peut se coder efficacement en base 2, on divise par $2^k$ (décalage de $k$ bits) et on ajuste $x = (2^k \pm 1)q + r = 2^k q + (r \pm q)$. Ainsi pour $k = 4$ et $m = 2^4 + 1 = 17$, $m$ est premier. On peut construire une suite de période 16 en choisissant $a$ générateur de $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$, par exemple $a = 3$ et $c = 2$ donne la suite $0, 2, 8, 9, 12, 4, 14, 10, 15, 13, 7, 6, 3, 11, 1, 5$.

On a le :

**Théorème 4** *La suite $(u_n)$ définie ci-dessus est de périodicité maximale $m$ si et seulement si :*

1. *$c$ et $m$ sont premiers entre eux*
2. *$a - 1$ est divisible par tous les facteurs premiers de $m$*
3. *$a - 1$ est multiple de 4 si $m$ l'est.*

On observe d'abord que vouloir la périodicité maximale revient à pouvoir supposer que $u_0 = 0$. Il est donc nécessaire d'avoir $c$ et $m$ premiers entre eux, sinon tous les $u_n$ sont multiples du pgcd de $c$ et $m$. Ensuite, on pose $m = \prod p_i^{r_i}$ la décomposition en facteurs premiers de $m$ et on raisonne modulo chaque premier (par le lemme chinois, la périodicité est le PPCM des périodicités modulo chaque $p_i^{r_i}$). Si $a \neq 1 \pmod{p}_i$ alors $a - 1$ est inversible modulo $p_i$ donc modulo $p_i^{r_i}$ on a

$$u_n = a^n(u_0 + \frac{c}{a-1}) + \frac{-c}{a-1}$$

et la valeur $-c/(a-1)$ ne peut pas être atteinte (ou alors la suite est stationnaire). Donc $a - 1$ doit être divisible par tous les facteurs premiers de $m$ pour avoir la périodicité maximale. Réciproquement, il faut trouver le premier ordre $n$ tel que $(a^n - 1)/(a - 1) = 0 \pmod{p^r}$. On pose $a = b + 1$, on a

$$\frac{a^n - 1}{a-1} = \frac{(b+1)^n - 1}{b} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^{k-1} = n + \frac{n(n-1)}{2} b + ...$$

On sait que $b = a - 1$ est un multiple de $p$, disons $b = qp$, on en déduit que pour $n = p^r$, on a bien $(a^n - 1)/(a - 1) = 0 \pmod{p^r}$, alors que pour $n = p^{r-1}$ et $p \neq 2$, $(a^n - 1)/(a - 1) = n \pmod{p^r} \neq 0$. Le même calcul pour $p = 2$ (prise en compte de la division par 2 de $n(n-1)$) donne la condition $b = a - 1$ est multiple de 4 si $m$ l'est.

On trouvera dans Knuth une discussion détaillée du choix de $a, b, m$.

Exemple : $m = 2^{31} - 1$ est premier, on peut donc construire un générateur congruentiel de période $m - 1$ en choisissant $a$ générateur de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}^*$. Pour en trouver un, on peut tester $a$ pris au hasard et voir si $a^{\frac{m-1}{j}} \neq 1 \pmod{m}$ pour tous les diviseurs premiers de $m - 1$. Par exemple

```
m:=2^31-1;F:=ifactors(b:=m-1); G:=seq(F[2*j
],j,0,iquo(size(F)-1,2))
```

$$2147483647, [2, 1, 3, 2, 7, 1, 11, 1, 31, 1, 151, 1, 331, 1], [2, 3, 7, 11, 31, 151, 331]$$

```
a:=456783546; for k in G do print(powmod
(a,b/k,m)); od
```

$$456783546, 0$$

```
r():=return (etat:=irem(a*etat,m));
```

$$() \mapsto (\texttt{return(etat:=irem(a*etat,m))})$$

```
etat:=1;
```

$$1$$

initialise l'état du générateur. Un appel à `r()` renvoie un entier entre 1 et $m-1$, pour avoir un g'enérateur pseudo-aléatoire selon la loi uniforme sur $]0,1[$, on tape

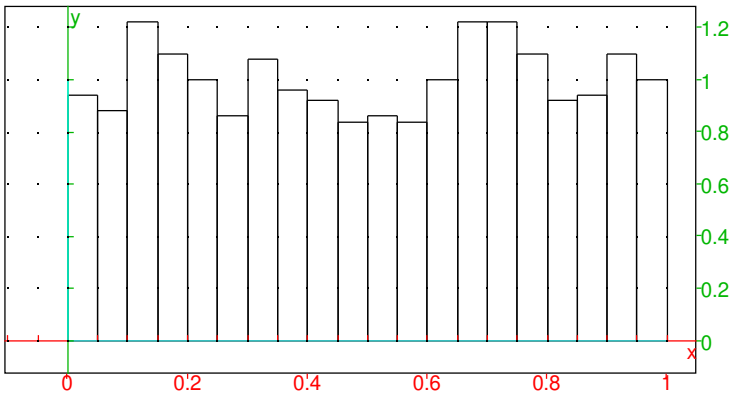
```
evalf(r()/m)
```

$$0.21270641415$$

.

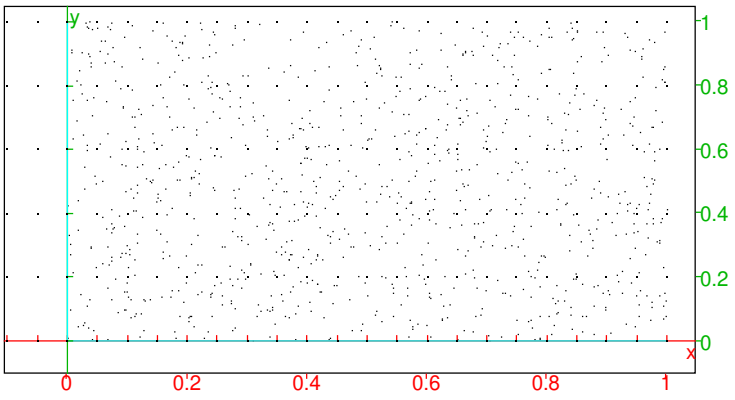
Ainsi

```
L:=seq(evalf(r()/m),j,1,1000):;histogram(L,0,.05)
```



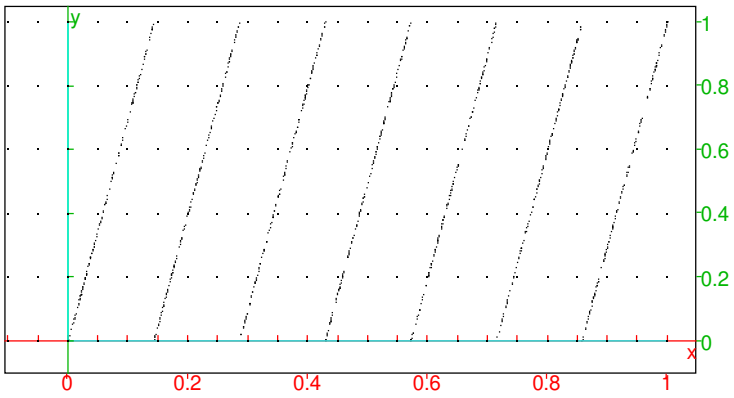

permet de vérifier visuellement si les réels générés sont bien répartis, ou bien

```
seq(point(evalf(r()/m,r()/m),display=point_point
),j,1,1000)
```




qui détecte des biais invisibles avec le test précédent, par exemple pour

```
a:=7;seq(point(evalf(r()/m,r()/m),display=point_point
),j,1,1000)
```




.

### 4.1.2 Récurrence à $k$ éléments

Au lieu d'une récurrence $u_{k+1} = au_k + c$ on conserve en mémoire $k+1$ valeurs successives de la suite et on calcule

$$u_{n+k+1} = a_0 u_n + ... + a_k u_{n+k} \pmod{p}$$

Si on note $U_n$ le vecteur $(u_n, ..., u_{n+k})$ et $A$ la matrice companion du polynôme $a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k$, on a $U_{n+1} = AU_n$. Rechercher un générateur de période maximale revient à chercher $A$ d'ordre le plus grand possible, donc les valeurs propres de $A$, i.e. les racines de $P$, doivent être racines de l'unité d'ordre le plus grand possible donc $p^k - 1$. Ce que l'on peut faire en construire un polynôme $P$ irréductible primitif (cf. la section **??** sur la construction de représentation des corps finis).

### 4.1.3 Mersenne twister.

Ce sont des générateurs plus performants, avec un état interne en général plus grand, dont l'état initial est généré par un générateur congruentiel. Ils utilisent une relation de récurrence qui ressemble aux générateurs congruentiels, mais au lieu de travailler sur de grands entiers, on découpe l'entier en mots de taille gérée par le CPU, et on fait des opérations de type matriciels avec des opérations bit à bit (ou exclusif par exemple) au lieu d'opérations arithmétiques.

## 4.2 Selon plusieurs lois classiques

La méthode générale consiste à calculer la distribution cumulée de la loi et à prendre la fonction réciproque d'un réel généré aléatoirement entre 0 et 1 selon la loi uniforme. Lorsqu'on a un nombre discret de valeurs possibles pas trop grand et que l'on veut générer plusieurs nombres selon la même loi, on peut précalculer la distribution cumulée en chaque valeur, et faire une dichotomie pour trouver la valeur de la fonction réciproque du nombre aléatoire généré. Les calculs peuvent être rendus difficiles par des dépassement de capacité des flottants si on utilise des méthodes naives pour estimer les fonction de répartition. On trouvera dans Abramowitz-Stegun diverses formules pour initialiser les méthodes de Newton pour inverser les fonction de répartition courante.

Il existe aussi quelques cas particuliers où on peut obtenir plus facilement un réel selon la loi donnée :

— Pour la loi normale, on génère 2 réels $u, d$ entre 0 et 1, on calcule $\sqrt{-2\log(u)}\cos(2\pi d)$
En effet si on considère un couple de variables qui suivent une loi normale centrée réduite, la densité de probabilité au point $(x, y)$ (coordonnées cartésiennes) ou $(r, \theta)$ est :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy = \left(e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\, dr\right)\left(\frac{1}{2\pi}\, d\theta\right) = \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{s}{2}}\, ds\right)\left(\frac{1}{2\pi}\, d\theta\right)$$

où $r^2 = s$. Donc $s$ suit une loi exponentielle (générée par la réciproque de la distribution cumulée) et $\theta$ uniforme, les deux sont indépendantes. On écrit alors $x = r\cos(\theta)$. On peut pour le même prix générer $y = r\sin(\theta)$. Pour éviter de calculer des lignes trigonométriques, on peut aussi tirer $x$ et $y$ uniformément dans $[-1, 1]$, accepter le tirage si $s = x^2 + y^2 \in ]0, 1]$ et renvoyer deux valeurs aléatoires selon la loi normale

$$x\sqrt{\frac{-2\ln(s)}{s}}, \quad y\sqrt{\frac{-2\ln(s)}{s}}$$

— Pour la loi du $\chi^2$ à $k$ degrés de liberté, on fait la somme des carrés de $k$ réels aléatoires selon la loi normale

— Pour la loi de Student, on fait le quotient d'un réel selon la loi normale par la racine carrée d'un réel selon la loi du $\chi^2$ divisé par le nombre de degré de liberté

— Pour la loi de Fisher, on fait le quotient d'un réel selon la loi du $\chi^2$ en $k_1$ degrés de liberté divisé par $k_1$ et d'un réel selon la loi du $\chi^2$ en $k_2$ degrés de liberté divisé par $k_2$

# Chapitre 5

# Le PGCD de polynômes.

Lorsqu'on travaille avec polynômes en une variable à coefficients sur un corps fini, l'algorithme d'Euclide est un algorithme efficace, pourvu que les degrés ne soient pas trop grands (dans ce cas il faut utiliser des algorithmes de type diviser pour régner, ici par exemple l'algorithme halfgcd qui consiste en gros à calculer d'abord l'identité de Bézout sous forme matricielle pour les polynômes tronqués en enlevant les degrés les plus bas). Mais l'algorithme d'Euclide est inefficace pour calculer le pgcd de deux polynômes à coefficients entiers ou à plusieurs variables. On va présenter ici les algorithmes utilisés habituellement par les systèmes de calcul formel : sous-résultant (PRS), modulaire (GCDMOD), $p$-adique (EEZGD) et heuristique (GCDHEU). Le premier est une adaptation de l'algorithme d'Euclide et s'adapte à des coefficients assez génériques. Les trois autres ont en commun d'évaluer une ou plusieurs variables du polynôme (dans ce dernier cas il est nécessaire de bien distinguer le cas de polynômes à plusieurs variables) et de reconstruire le pgcd par des techniques distinctes, la plupart du temps ces algorithmes fonctionnent seulement si les coefficients sont entiers.

Soit donc $P$ et $Q$ deux polynômes à coefficients dans un corps. Le pgcd de $P$ et $Q$ n'est défini qu'à une constante près. Mais lorsque les coefficients de $P$ et $Q$ sont dans un anneau euclidien comme par exemple $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}[i]$, on appellera pgcd de $P$ et $Q$ un polynôme $D$ tel que $P/D$ et $Q/D$ soient encore à coefficients dans l'anneau, et que $D$ soit optimal, c'est-à-dire que si un multiple $\mu D$ de $D$ vérifie $P/\mu D$ et $Q/\mu D$ sont à coefficients dans l'anneau, alors $\mu$ est inversible.

La première étape d'un algorithme de calcul de pgcd consiste donc à diviser par son contenu (pgcd des coefficients entiers) chaque polynôme.

**Exemple** : $P = 4X^2 - 4$ et $Q = 6X^2 + 12X + 6$. Le polynôme $X + 1$ est un pgcd de $P$ et $Q$ puisqu'il est de degré maximal divisant $P$ et $Q$ mais le pgcd de $P$ et $Q$ est $2(X + 1)$. Remarquons qu'avec notre définition $-2(X + 1)$ convient aussi. Par convention on appelera pgcd dans $\mathbb{Z}[X]$ le polynôme ayant un coefficient dominant positif.

**Définition** : On appelle **contenu** $c(P)$ d'un polynôme $P$ le pgcd des coefficients de $P$. On définit alors la **partie primitive** de $P$ : $\mathrm{pp}(P) = P/c(P)$. Si $c(P) = 1$, on dit que $P$ est primitif.

**Proposition** : Si $A$ et $B$ sont primitifs alors $AB$ est primitif.
Sinon, on prend un facteur premier $p$ du contenu de $AB$, $AB = 0 \pmod p$ donc $A = 0$ ou $B = 0$ modulo $p$, absurde.

**Proposition** : le contenu de $AB$ est le produit des contenus de $A$ et de $B$.

En effet le produit des contenus de $A$ et $B$ divise le contenu de $AB$, et $A$/contenu de $A$ est primitif, $B$/contenu de $B$ est primitif donc le produit l'est,

**Proposition** : Si $A$ et $B$ sont primitifs et si $B$ divise $A$ dans $\mathbb{Q}[X]$ alors $A/B \in \mathbb{Z}[X]$.

**Preuve** : Soit $Q = A/B \in \mathbb{Q}[X]$. Soit $q \in \mathbb{N}$ le PPCM des dénominateurs des coefficients de $Q$ et notons $P = qQ \in \mathbb{Z}[X]$. On a $A = BQ$ donc $qA = BP$ donc le contenu de $qA$ est le produit du contenu de $B$ par celui de $P$, donc le contenu de $P = qQ$ est $q$, donc $Q \in \mathbb{Z}[X]$.

Donc le PGCD de $A$ et $B$, polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[X]$ est obtenu en prenant un PGCD de $A$ et $B$ dans $\mathbb{Q}[X]$, en multipliant par le PPCM des dénominateurs et en rendant le polynôme obtenu primitif (on change le signe du résultat si nécessaire pour avoir un coefficient dominant positif).

On en déduit que :

$$D = \text{pgcd}(P, Q) = \text{pgcd}(c(P), c(Q))\text{pgcd}(\text{pp}(P), \text{pp}(Q))$$

## 5.1 Le sous-résultant.

La première idée qui vient à l'esprit pour améliorer l'efficacité de l'algorithme d'Euclide consiste à éviter les fractions qui sont créées par les divisions euclidiennes. On utilise à cet effet la pseudo-division : au lieu de prendre le reste $R$ de la division euclidienne du polynôme $P$ par $Q$, on prend le reste de la division de $Pq^{\delta+1}$ par $Q$, où $q$ désigne le coefficient dominant de $Q$ et $\delta$ la différence entre le degré de $P$ et de $Q$.

**Exercice :** En utilisant votre système de calcul formel préféré, calculez les restes intermédiaires générés dans l'algorithme d'Euclide lorsqu'on utilise la pseudo-division par exemple pour les polynômes $P(x) = (x+1)^7 - (x-1)^6$ et sa dérivée.

**Une solution avec giac/xcas** :

```
pgcd(a,b,prs):={
 local P,p,Q,q,R,g,h,d,res;
 res:=NULL;
 // convertit a et b en polynomes listes
 // et extrait la partie primitive
 P:=symb2poly(a);
 p:=lgcd(P); // pgcd des elements de la liste
 P:=P/p;
 Q:=symb2poly(b);
 q:=lgcd(Q);
 Q:=Q/q;
 if (size(P)<size(Q)){ // echange P et Q
  R:=P; P:=Q; Q:=R;
 }
 // calcul du contenu du pgcd
 p:=gcd(p,q);
 g:=1;
 h:=1;
 while (size(Q)!=1){
```

```
  q:=Q[0]; // coefficient dominant
  d:=size(P)-size(Q);
  R:=rem(q^(d+1)*P,Q);
  if (size(R)==0) return(p*poly12symb(Q/lgcd(Q),x));
  P:=Q;
  Q:=R;
  if (prs==1) Q:=Q/content(Q);
  if (prs==2) Q:=R/(g*h^d);
  res:=res,Q;
  if (prs==2) g:=q; h:=q^d/h^(d-1);
 }
 return(p,res);
}:;
```

```
   P:=(x+1)^7-(x-1)^6; pgcd(P,P',0)
```

$$\frac{19922442039820041388001810432232909030286453850912063489}{16455045573212060421549691825573505049827358656335798633486090 24}, \lgcd\left(\frac{19922442039820041}{1645504557321206042 15}\right.$$

On s'aperçoit que les coefficients croissent de manière exponentielle (comparer avec ce qui se passe en mettant 1 comme dernier argument). La deuxième idée qui vient naturellement est alors à chaque étape de rendre le reste primitif, donc de diviser $R$ par le pgcd de ces coefficients. Cela donne un algorithme plus efficace, mais encore assez peu efficace car à chaque étape on doit calculer le pgcd de tous les coefficients, on peut imaginer le temps que cela prendra en dimension 1 et à fortiori en dimension supérieure. L'idéal serait de connaitre à l'avance une quantité suffisamment grande qui divise tous les coefficients du reste.

C'est ici qu'intervient l'algorithme du sous-résultant : après chaque pseudo-division euclidienne, on exhibe un coefficient "magique" qui divise les coefficients du reste (pour tester mettre le dernier argument de pgcd à 2). Ce coefficient n'est pas le pgcd mais il est suffisamment grand pour qu'on évite la croissance exponentielle des coefficients.

**Algorithme du sous-résultant**

Arguments : 2 polynômes $P$ et $Q$ primitifs. Valeur de retour : le pgcd de $P$ et $Q$.

Pour calculer le coefficient "magique" on utilise 2 variables auxiliaires $g$ et $h$ initialisées a 1.

Boucle à effectuer tant que $Q$ est non nul :

— on note $\delta$ =degre($P$)-degre($Q$) et $q$ le coefficient dominant de $Q$

— on effectue la division euclidienne (sans fraction) de $q^{\delta+1}P$ par $Q$, soit $R$ le reste

— Si $R$ est constant, on sort de l'algorithme en renvoyant 1 comme pgcd

— on recopie $Q$ dans $P$ puis $R/(gh^{\delta})$ dans $Q$

— on recopie $q$ dans $g$ et $h^{1-\delta}q^{\delta}$ dans $h$.

Si on sort normalement de la boucle, $Q$ est nul, on renvoie donc la partie primitive de $P$ qui est le pgcd cherché.

Pour tester l'algorithme avec `xcas`, il suffit de décommenter les deux lignes `Q:=R/(g*h^d);` et `g:=q; h:=q^d/h^(d-1);` ci-dessus.

La preuve de l'algorithme est un peu longue et par ailleurs bien expliquée dans le 2ème tome de Knuth (The Art of Computer Programming, Semi-numerical Al-

gorithms), on y renvoie donc le lecteur intéressé. L'idée générale (et l'origine du nom de l'algorithme) est de considérer la matrice de Sylvester des polynômes de départ $P$ et $Q$ (celle dont le déterminant est appelé résultant de $P$ et $Q$) et de traduire les pseudo-divisions qui permettent de calculer les restes successifs du sous-résultant en opération de ligne sur ces matrices. On démontre alors que les coefficients de $R$ divisés par $gh^\delta$ peuvent être interprétés comme des déterminants de sous-matrices de la matrice de Sylvester après réduction et c'est cela qui permet de conclure qu'ils sont entiers.

Par exemple, supposons que $P = R_0$, $Q = R_1$, $R_2$... diminuent de 1 en degré à chaque division (c'est le cas générique dans le déroulement de l'algorithme d'Euclide). Dans ce cas, $\delta = 1$, il s'agit par exemple de montrer que le reste $R_3$ de $Q = R_1$ par $R_2$ est divisible par le carré du coefficient dominant de $Q = R_1$. Voyons comment on obtient les coefficients de $R_3$ à partir de la matrice de Sylvester de $P$ et $Q$. Prenons la sous-matrice constituée des 2 premières lignes de $P$ et des 3 premières lignes de $Q$ et réduisons-la sous forme échelonnée sans introduire de dénominateur.

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \cdots \\ 0 & p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots \\ q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & q_{n-4} & \cdots \\ 0 & q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & \cdots \\ 0 & 0 & q_{n-1} & q_{n-2} & \cdots \end{pmatrix}$$

On effectue $L_1 \leftarrow q_{n-1}L_1 - p_nL_3$ et $L_2 \leftarrow q_{n-1}L_2 - p_nL_4$, ce qui correspond à l'élimination du terme en $x$ du quotient de $P$ par $Q$

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{n-1}p_{n-1} - p_nq_{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & q_{n-1}p_{n-1} - p_nq_{n-2} & \cdots & \cdots \\ q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & q_{n-4} & \cdots \\ 0 & q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & \cdots \\ 0 & 0 & q_{n-1} & q_{n-2} & \cdots \end{pmatrix}$$

on effectue ensuite

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow q_{n-1}L_1 - (q_{n-1}p_{n-1} - p_nq_{n-2})L_4 \\ L_2 &\leftarrow q_{n-1}L_2 - (q_{n-1}p_{n-1} - p_nq_{n-2})L_5 \end{aligned}$$

ce qui correspond à l'élimination du terme constant du quotient de $P$ par $Q$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{2,n-2} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & r_{2,n-2} & \cdots \\ q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & q_{n-4} & \cdots \\ 0 & q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & \cdots \\ 0 & 0 & q_{n-1} & q_{n-2} & \cdots \end{pmatrix}$$

si on enlève les lignes 3 et 4, et les colonnes 1 et 2, on obtient (après échanges de lignes) une sous-matrice de la matrice de Sylvester de $Q$ et $R_2$

$$\begin{pmatrix} q_{n-1} & q_{n-2} & \cdots \\ r_{2,n-2} & \cdots & \cdots \\ 0 & r_{2,n-2} & \cdots \end{pmatrix}$$

On recommence les opérations de réduction de cette sous-matrice correspondant à la division euclidienne de $Q$ par $R_2$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{3,n-3} \\ r_{2,n-2} & \dots & \dots \\ 0 & r_{2,n-2} & \dots \end{pmatrix}$$

puis après suppression des colonnes 1 et 2 et des lignes 2 et 3 la ligne des coefficients de $R_3$.

Supposons qu'on se limite dès le début de la réduction à ne garder que les colonnes 1 à 4 et une 5-ième colonne parmi les suivantes, on obtient à la fin de la réduction une matrice 1,1 qui contient un des coefficients de $R_3$ (selon le choix de la 5-ième colonne). Donc ce coefficient est égal au déterminant de la matrice 1,1 qui est égal, au signe près, au déterminant de la matrice 3,3 dont il est issu par notre réduction (en effet, dans la 2ième partie de la réduction, on a multiplié deux fois $L_1$ par $r_{2,n-2}$, mais on doit ensuite diviser le déterminant par $r_{2,n-2}^2$ pour éliminer les colonnes 1 et 2). Quant au déterminant de la matrice 3,3, il se déduit du déterminant de la matrice 5,5 par multiplication par $q_{n-1}^4$ (2 lignes ont été multipliées 2 fois par $q_{n-1}$) et division par $q_{n-1}^2$ (élimination des colonnes 1 et 2). Au final, tout coefficient de $R_3$ est égal au produit d'un déterminant 5,5 extrait de la matrice de Sylvester de $P$ et $Q$ par $q_{n-1}^2$, qui est justement le coefficient "magique" par lequel on divise le reste de $R_1 = Q$ par $R_2$ lors de l'algorithme du sous-résultant.

## 5.2 Le pgcd en une variable.

### 5.2.1 Le pgcd heuristique.

On suppose ici que les coefficients sont entiers ou entiers de Gauss. **On peut donc se ramener au cas où les polynômes sont primitifs.**

L'idée consiste à évaluer $P$ et $Q$ en un entier $z$ et à extraire des informations du pgcd $g$ des entiers $P(z)$ et $Q(z)$. Il faut donc un moyen de remonter de l'entier $g$ à un polynôme $G$ tel que $G(z) = g$. La méthode consiste à écrire en base $z$ l'entier $g$, avec une particularité dans les divisions euclidiennes successives on utilise le reste symétrique (compris entre $-z/2$ et $z/2$). Cette écriture donne les coefficients d'un polynôme $G$ unique. On extrait ensuite la partie primitive de ce polynôme $G$. Lorsque $z$ est assez grand par rapport aux coefficients des polynômes $P$ et $Q$, si $\text{pp}(G)$ divise $P$ et $Q$, on va montrer que le pgcd de $P$ et de $Q$ est $D = \text{pp}(G)$.

On remarque tout d'abord que $d := D(z)$ divise $g$. En effet $D$ divise $P$ et $Q$ donc pour tout entier (ou entier de Gauss) $z$, $D(z)$ divise $P(z)$ et $Q(z)$. Il existe donc une constante $a$ telle que

$$g = ad$$

On a aussi $\text{pp}(G)$ divise $D$. Il existe donc un polynôme $C$ tel que :

$$D = \text{pp}(G)C$$

Nous devons prouver que $C$ est un polynôme constant. On suppose dans la suite que ce n'est pas le cas. Evaluons l'égalité précédente au point $z$, on obtient

$$d = \frac{g}{c(G)}C(z)$$

Finalement

$$1 = \frac{a}{c(G)} C(z)$$

La procédure de construction de $G$ nous donne une majoration de ces coefficients par $|z|/2$, donc de $c(G)$ par $|z|/2$, donc $C(z)$ divise un entier de module plus petit que $|z|/2$, donc

$$|C(z)| \leq \frac{|z|}{2}$$

On considère maintenant les racines complexes $z_1, \ldots, z_n$ du polynôme $C$ (il en existe au moins une puisqu'on a supposé $C$ non constant). On a :

$$C(X) = c_n(X - z_1) \ldots .(X - z_n)$$

Donc, comme $c_n$ est un entier (ou entier de Gauss) non nul, sa norme est supérieure ou égale à 1 et :

$$|C(z)| \geq \prod_{j=1}^{n} (|z| - |z_j|)$$

Il nous reste à majorer les racines de $C$ pour minorer $|C(z)|$. Comme $C$ divise $D$ il divise $P$ et $Q$ donc les racines de $C$ sont des racines communes à $P$ et $Q$. On va appliquer le :

**Lemme 5** *Soit x une racine complexe d'un polynôme $P = a_n X^n + \ldots . + a_0$. Alors*

$$|x| < \frac{|P|}{|a_n|} + 1, |P| = \max_{0 \leq i \leq n} (|a_i|)$$

Application du lemme à $C(X)$ : on a $1/|c_n| \leq 1$ donc si on a choisi $z$ tel que $|z| \geq 2\min(|P|, |Q|) + 2$, alors pour tout $j$, $|z_j| < |z|/2$ donc

$$|C(z)| > \left(\frac{|z|}{2}\right)^n$$

qui contredit notre majoration de $|C(z)|$.

**Théorème 6** *Soit $P$ et $Q$ deux polynômes à coefficients entiers. On choisit un entier $z$ tel que $|z| \geq 2\min(|P|, |Q|) + 2$, si la partie primitive du polynôme $G$ reconstruit à partir du pgcd de $P(z)$et$Q(z)$ par écriture en base $z$ (avec comme reste euclidien le reste symétrique) divise $P$ et $Q$ alors c'est le pgcd de $P$ et $Q$.*

Pour finir la démonstration du théorème, il nous faut encore montrer le lemme. On a

$$-a_n x^n = a_{n-1} x^{n-1} + \ldots . + a_0$$

Donc

$$|a_n||x|^n \leq |P|(1 + \ldots . + |x|^{n-1}) = |P| \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}$$

Ici on peut supposer que $|x| \geq 1$, sinon le lemme est démontré, donc $|x| - 1$ est positif et

$$|a_n|(|x| - 1) \leq |P| \frac{|x|^n - 1}{|x|^n} \Rightarrow |x| - 1 < \frac{|P|}{|a_n|}$$

Remarques

— Le théorème publié par Char, Geddes et Gonnet porte sur des coefficients entiers et c'est comme cela qu'il est utilisé par les systèmes de calcul formel (en commençant historiquement par Maple). Peu de systèmes l'utilisent pour les polynômes à coefficients entiers de Gauss. On peut d'ailleurs généraliser le théorème à d'autres types de coefficients, à condition d'avoir un anneau euclidien plongé dans $\mathbb{C}$ avec une minoration sur la valeur absolue des élements non nuls de l'anneau.

— Nous n'avons jusqu'à présent aucune certitude qu'il existe des entiers $z$ tels que la partie primitive de $G$ divise $P$ et $Q$. Nous allons montrer en utilisant l'identité de Bézout que pour $z$ assez grand c'est toujours le cas. Plus précisément, on sait qu'il existe deux polynômes $U$ et $V$ tels que

$$PU + QV = D$$

Attention toutefois, $U$ et $V$ sont à coefficients rationnels, pour avoir des coefficients entiers, on doit multiplier par une constante entière $\alpha$, donc en évaluant en $z$ on obtient l'existence d'une égalité à coefficients entiers

$$P(z)u + Q(z)v = \alpha D(z)$$

Donc le pgcd $g$ de $P(z)$ et $Q(z)$ divise $\alpha D(z) = \alpha d$. Comme $g$ est un multiple de $d$, on en déduit que $g = \beta d$, où $\beta$ est un diviseur de $\alpha$. Si on a choisi $z$ tel que

$$|z| > 2|D||\alpha|$$

alors $|z| > 2|D||\beta|$ donc l'écriture symétrique en base $z$ de $g$ est $G = \beta D$. Donc la partie primitive de $G$ est $D$, le pgcd de $P$ et $Q$.

**Exemple 7** *Si* $P_0 = 6(X^2 - 1)$ *et* $Q_0 = 4(X^3 - 1)$.

*Le contenu de* $P_0$ *est 6, celui de* $Q_0$ *est 4.*

*On a donc pgcd des contenus = 2,* $P = X^2 - 1, Q = X^3 - 1$. *La valeur initiale de* $z$ *est donc* $2 * 1 + 2 = 4$. *On trouve* $P(4) = 15, Q(4) = 63$. *Le pgcd entier de 15 et 63 est 3 que nous écrivons symétriquement en base 4 sous la forme* $3 = 1 * 4 - 1$, *donc* $G = X - 1$, *sa partie primitive est* $X - 1$. *On teste si* $X - 1$ *divise* $P$ *et* $Q$, *c'est le cas, donc c'est le pgcd de* $P$ *et* $Q$ *et le pgcd de* $P_0$ *et* $Q_0$ *est* $2(X - 1)$.

**Algorithme gcdheu**

En arguments deux polynômes $P_0$ et $Q_0$ à coefficients entiers ou entiers de Gauss. Retourne le pgcd de $P_0$ et $Q_0$ ou faux en cas d'échec.

1. Calculer le contenu de $P_0$ et $Q_0$. Vérifier que les coefficients sont entiers de Gauss sinon retourner faux.
2. Extraire la partie primitive $P$ de $P_0$ et $Q$ de $Q_0$, calculer le pgcd $c$ des contenus de $P_0$ et $Q_0$
3. Déterminer $z = 2\min(|P|, |Q|) + 2$.
4. Début de boucle : initialisation du nombre d'essais à 1, test d'arrêt sur un nombre maximal d'essais, avec changement de $z$ entre deux itérations (par exemple $z \leftarrow 2z$).
5. Calculer le pgcd $g$ de $P(z)$ et $Q(z)$ puis son écriture symétrique en base $z$ dont on extrait la partie primitive $G$.

6. Si $G$nedivisepas$P$ passer à l'itération suivante. De même pour $Q$.
7. Retourner $cG$
8. Fin de la boucle
9. Retourner faux.

On remarque au passage qu'on a calculé le quotient de $P$ par $G$ et le quotient de $Q$ par $G$ lorsque la procédure réussit. On peut donc passer à la procédure gcdheu deux paramètres supplémentaires par référence, les deux polynômes que l'on affectera en cas de succès, ce qui optimise la simplification d'une fraction de 2 polynômes.

### 5.2.2 Le pgcd modulaire

On part du fait que si $D$ est le pgcd de $P$ et $Q$ dans $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Z}[i]$) alors après réduction modulo un nombre premier $n$ qui ne divise pas les coefficients dominants de $P$ et $Q$, $D$ divise le pgcd $G$ de $P$ et $Q$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (par convention, le pgcd dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est normalisé pour que son coefficient dominant vaille 1). Comme on calcule $G$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les coefficients des restes intermédiaires de l'algorithme d'Euclide sont bornés, on évite ainsi la croissance exponentielle des coefficients. Il faudra ensuite reconstruire $D$ à partir de $G$.

On remarque d'abord que si on trouve $G = 1$, alors $P$ et $Q$ sont premiers entre eux. En général, on peut seulement dire que le degré de $G$ est supérieur ou égal au degré de $D$. En fait, le degré de $G$ est égal au degré de $D$ lorsque les restes de l'algorithme d'Euclide (calculé en effectuant des pseudo-divisions, cf. l'exercice 1) ont leur coefficient dominant non divisible par $n$. Donc plus $n$ est grand, plus la probabilité est grande de trouver $G$ du bon degré.

Dans la suite, nous allons déterminer une borne $b$ à priori majorant les coefficients de $D$. On utilisera ensuite la même méthode que dans l'algorithme modulaire de recherche de racines évidentes : on multiplie $G$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par le pgcd dans $\mathbb{Z}$ des coefficients dominants $p$ et $q$ de $P$ et $Q$. Soit $\tilde{D} = \text{pgcd}(p, q)G$ le résultat écrit en représentation symétrique. Si $n \geq b\text{pgcd}(p, q)$ et si $G$ est du bon degré, on montre de la même manière que $D = \tilde{D}$. Comme on ne connait pas le degré de $D$, on est obligé de tester si $\tilde{D}$ divise $P$ et $Q$. Si c'est le cas, alors $\tilde{D}$ divise $D$ donc $\tilde{D} = D$ puisque $\text{degre}(\tilde{D}) = \text{degre}(G) \geq \text{degre}(D)$. Sinon, $n$ est un nombre premier malchanceux pour ce calcul de pgcd ($\text{degre}(G) \geq \text{degre}(D)$), il faut essayer un autre premier.

**Remarque :** On serait tenté de dire que les coefficients de $D$ sont bornés par le plus grand coefficient de $P$. C'est malheureusement faux, par exemple $(X+1)^2$ dont le plus grand coefficient est 2 divise $(X+1)^2(X-1)$ dont le plus grand coefficient (en valeur absolue) est 1.

Soit $P = \sum p_i X^i$ un polynôme à coefficients entiers. On utilise la norme euclidienne

$$|P|^2 = \sum |p_i|^2 \tag{5.1}$$

On établit d'abord une majoration du produit des racines de norme supérieure à 1 de $P$ à l'aide de $|P|$. Ensuite si $D$ est un diviseur de $P$, le coefficient dominant $d$ de $D$ divise le coefficient dominant $p$ de $P$ et les racines de $D$ sont aussi des racines de $P$. On pourra donc déterminer une majoration des polynômes symétriques des racines de $D$ et donc des coefficients de $D$.

**Lemme 8** *Soit $A = \sum_{j=0}^{a} a_j X^j$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors*

$$|(X-\alpha)A| = |(\overline{\alpha}X - 1)A|$$

Pour prouver le lemme **??**, on développe les produits de polynômes. On pose $a_{-1} = a_{a+1} = 0$ et on note $\Re$ la partie réelle.

$$|(X-\alpha)A|^2 = \sum_{j=0}^{a+1} |a_{j-1} - \alpha a_j|^2 = \sum_{j=0}^{a+1} |a_{j-1}|^2 + |\alpha|^2|a_j|^2 - 2\Re(a_{j-1}\overline{\alpha a_j})$$

$$|(\overline{\alpha}X - 1)A|^2 = \sum_{j=0}^{a+1} |\overline{\alpha}a_{j-1} - a_j|^2 = \sum_{j=0}^{a+1} |\alpha|^2|a_{j-1}|^2 + |a_j|^2 - 2\Re(\overline{\alpha}a_{j-1}\overline{a_j})$$

Les deux donnent bien le même résultat.

Soit $P(X) = p\prod(X-\alpha_j)$ la factorisation de $P$ sur $\mathbb{C}$. On introduit le polynôme

$$\tilde{P} = p \prod_{j/|\alpha_j|\geq 1} (X-\alpha_j) \prod_{j/|\alpha_j|<1} (\overline{\alpha_j}X - 1)$$

qui d'après le lemme a la même norme que $P$. La norme de $P$ majore donc le coefficient constant de $\tilde{P}$ d'où :

$$\prod_{j/|\alpha_j|\geq 1} |\alpha_j| \leq \frac{|P|}{|p|} \tag{5.2}$$

On remarque que (**??**) reste vraie si on considère les racines $\delta_j$ de norme plus grande que 1 d'un diviseur $D$ de $P$ puisque le produit porte alors sur un sous-ensemble. On écrit maintenant l'expression des coefficients $d_j$ de $D$ à l'aide des racines $\delta_j$ de $D$ :

$$|d_{m-j}| = |d| \left| \sum_{\text{choix de } j \text{ racines parmi les } m \text{ racines de } D} \prod_{\delta_k \in \text{racines choisies}} \delta_k \right|$$

Pour majorer $|d_{m-j}|$, on commence par majorer $|\delta_k|$ par $\beta_k = \max(1, |\delta_k|)$. On est donc ramené à majorer

$$\sigma_{j,m}(\beta) = \sum_{\text{choix de } j \text{ parmi } m \text{ valeurs } \beta_k} \prod_{\beta_k \in \text{choix}} \beta_k$$

avec pour hypothèse une majoration de $M = \prod_{k=1}^{m} \beta_k$ donnée par la relation (**??**). Pour cela, on cherche le maximum de $\sigma_{j,m}(\beta)$ sous les contraintes $M$ fixé et $\beta_k \geq 1$.

On va montrer que le maximum ne peut être atteint que si l'un des $\beta_k = M$ (et tous les autres $\beta_k = 1$). Sinon, quitte à réordonner supposons que les $\beta_k$ sont classés par ordre croissant. On a donc $\beta_{m-1} \neq 1$, on pose $\widetilde{\beta_k} = \beta_k$ pour $k \leq m-2$, $\tilde{\beta}_{m-1} = 1$ et $\tilde{\beta}_m = \beta_{m-1}\beta_m$. Comparons $\sigma_{j,m}(\beta)$ et $\sigma_{j,\text{nm}}(\tilde{\beta})$. Si le choix de $j$ parmi $m$ comporte $k = m-1$ et $k = m$, le produit est inchangé. Sinon on a la somme de deux produits, l'un contenant $k = m-1$ et l'autre $k = m$. On compare donc $B(\beta_{m-1} + \beta_m)$ et $B(1 + \beta_{m-1}\beta_m)$ avec $B = \prod_{\beta_k \in \text{resteduchoix}} \beta_k$. Comme

$$1 + \beta_{m-1}\beta_m \geq \beta_{m-1} + \beta_m$$

puisque la différence est le produit $(1-\beta_m)(1-\beta_{m-1})$ de deux nombres positifs, on arrive à la contradiction souhaitée.

Ensuite on décompose les choix de $\sigma_{m,j}$ en ceux contenant $M$ et des 1 et ceux ne contenant que des 1, d'où la majoration

$$\sigma_{j,m}(\beta) \leq \left( \begin{array}{c} m-1 \\ j-1 \end{array} \right) M + \left( \begin{array}{c} m-1 \\ j \end{array} \right)$$

et finalement

$$|d_{m-j}| \leq |d| \left( \left( \begin{array}{c} m-1 \\ j-1 \end{array} \right) \frac{|P|}{|p|} + \left( \begin{array}{c} m-1 \\ j \end{array} \right) \right) \tag{5.3}$$

On peut en déduire une majoration indépendante de $j$ sur les coefficients de $D$, en majorant $|d|$ par $|p|$ (puisque $d$ divise $p$) et les coefficients binomiaux par $2^{m-1}$ (obtenue en développant $(1+1)^{m-1}$). D'où le

**Théorème 9** *(**Landau-Mignotte**) Soit $P$ un polynôme à coefficients entiers (ou entiers de Gauss) et $D$ un diviseur de $P$ de degré $m$. Si $|P|$ désigne la norme euclidienne du vecteur des coefficients de $P$ et $p$ le coefficient dominant de $P$ alors les coefficients $d_j$ de $D$ satisfont l'inégalité*

$$|d_j| \leq 2^{m-1}(|P| + |p|) \tag{5.4}$$

Avec cette estimation, on en déduit que si $n$ est un premier plus grand que

$$\min \left( 2^{\text{degre}(P)-1}(|P| + |p|), 2^{\text{degre}(Q)-1}(|Q| + |q|) \right), \tag{5.5}$$

alors le pgcd trouvé dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ va se reconstruire en un pgcd dans $\mathbb{Z}$ si son degré est le bon.

Malheureusement la borne précédente est souvent très grande par rapport aux coefficients du pgcd et calculer dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ s'avèrera encore inefficace (surtout si le pgcd est 1). Cela reste vrai même si on optimise un peu la majoration (**??**) en repartant de (**??**).

L'idée est donc de travailler modulo plusieurs nombres premiers plus petits et reconstruire le pgcd des 2 polynômes à coefficients entiers à partir des pgcd des polynômes dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et du théorème des restes chinois. En pratique on prend des nombres premiers inférieurs à la racine carrée du plus grand entier hardware de la machine (donc plus petits que $2^{16}$ sur une machine 32 bits) ce qui permet d'utiliser l'arithmétique hardware du processeur sans risque de débordement.

**Algorithme du PGCD modulaire en 1 variable :**

En argument : 2 polynômes primitifs $P$ et $Q$ à coefficients entiers. Le résultat renvoyé sera le polynôme pgcd.

Variable auxiliaire : un entier $N$ initialisé à 1 qui représente le produit des nombres premiers utilisés jusqu'ici et un polynôme $H$ initialisé à 0 qui représente le pgcd dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Boucle infinie :

1. Chercher un nouveau nombre premier $n$ qui ne divise pas les coefficients dominants $p$ et $q$ de $P$ et $Q$
2. Calculer le pgcd $G$ de $P$ et $Q$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si $G$=1, renvoyer 1.

3. Si $H = 0$ ou si le degré de $G$ est plus petit que le degré de $H$, recopier $G$ dans $H$ et $n$ dans $N$, passer à la 6ème étape
4. Si le degré de $G$ est plus grand que celui de $H$ passer à l'itération suivante
5. Si le degré de $G$ est égal au degré de $H$, en utilisant le théorème des restes chinois, calculer un polynôme $\tilde{H}$ tel que $\tilde{H} = H$ modulo $N$ et $\tilde{H} = G$ modulo $n$. Recopier $\tilde{H}$ dans $H$ et $nN$ dans $N$.
6. Ecrire pgcd$(p, q)H$ en représentation symétrique. Soit $\tilde{H}$ le résultat rendu primitif. Tester si $\tilde{H}$ divise $P$ et $Q$. Si c'est le cas, renvoyer $\tilde{H}$, sinon passer à l'itération suivante.

Finalement on n'a pas utilisé $b$, la borne de Landau-Mignotte. On peut penser que l'étape 6 ne devrait être effectuée que lorsque $N$ est plus grand que pgcd$(p, q)b$. En pratique, on effectue le test de l'étape 6 plus tôt parce que les coefficients du pgcd sont rarement aussi grand que $b$. Mais pour éviter de faire le test trop tôt, on introduit une variable auxiliaire $H'$ qui contient la valeur de $H$ de l'itération précédente et on ne fait le test que si $H' = H$ (ou bien sûr si on a dépassé la borne).

**Remarque** :

L'algorithme ci-dessus fonctionne également pour des polynômes à plusieurs variables.

**Exemple 1 :**

Calcul du pgcd de $(X + 1)^3(X - 1)^4$ et $(X^4 - 1)$. Prenons pour commencer $n = 2$. On trouve comme pgcd $X^4 + 1$ (en effet $-1 = 1$ donc on cherchait le pgcd de $(X + 1)^7$ et de $X^4 + 1 = (X + 1)^4$). On teste si $X^4 + 1$ divise $P$ et $Q$, ce n'est pas le cas donc on passe au nombre premier suivant. Pour $n = 3$, on trouve $X^2 - 1$. Donc $n = 2$ n'était pas un bon nombre premier pour ce calcul de pgcd puisqu'on a trouvé un pgcd de degré plus petit. On teste si $X^2 - 1$ divise $P$ et $Q$, c'est le cas ici donc on peut arrêter, le pgcd cherché est $X^2 - 1$.

**Exemple 2 :**

Calcul du pgcd de $(X + 1)^3(X - 1)^4$ et $(X^4 - 1)^3$. Pour $n = 2$, on trouve un polynôme de degré 7. Pour $n = 3$, on trouve $X^6 - 1$ donc $n = 2$ était une mauvaise réduction. Comme $X^6 - 1$ ne divise pas $P$ et $Q$, on passe à $n = 5$. On trouve $X^6 + 2X^4 - 2X^2 - 1$. On applique le théorème des restes chinois qui va nous donner un polynôme dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. On cherche donc un entier congru à 2 modulo 5 et à 0 modulo 3, -3 est la solution (écrite en représentation symétrique), donc le polynôme modulo 15 est $X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1 = (X^2 - 1)^3$. Ce polynôme divise $P$ et $Q$, c'est donc le pgcd de $P$ et de $Q$.

## 5.3 Le pgcd à plusieurs variables.

### 5.3.1 Le pgcd heuristique.

On suppose comme dans le cas à une variable que les polynômes sont primitifs, donc qu'on a simplifié les polynômes par le pgcd entier de leurs coefficients entiers.

Le principe est identique à celui du PGCD à 1 variable, on évalue les deux polynômes $P$ et $Q$ de $k$ variables $X_1, \ldots, X_k$ en un $X_k = z$ et on calcule le pgcd $g$ des 2 polynômes $P(z)$ et $Q(z)$ de $k - 1$ variables. On remonte ensuite à un polynôme $G$ par écriture symétrique en base $z$ de $g$ et on teste si pp$(G)$ divise

$P$ et $Q$. Il s'agit à nouveau de montrer que si $z$ est assez grand, alors pp$(G)$ est le pgcd cherché. On sait que $d = D(z)$ divise $g$. Il existe donc un polynôme $a$ de $k-1$ variables tel que $g = ad$. On sait aussi que pp$(G)$ divise $D$, donc il existe un polynôme $C$ de $k$ variables tel que $D = C * \text{pp}(G)$. On évalue en $z$ et on obtient $d = C(z)g/c(G)$, où $c(G)$ est un entier, donc

$$c(G) = a * C(z)$$

Comme $c(G)$ est un entier, $a$ et $C(z)$ sont des polynômes constants. Comme précédemment, on a aussi $|C(z)| \leq |z|/2$ puisque $|c(G)| \leq |z|/2$.

— Premier cas : si $C$ ne dépend que de la variable $X_k$. On continue le raisonnement comme dans le cas unidimensionnel.

— Deuxième cas : si $C$ dépend d'une autre variable, par exemple $X_1$. On regarde le coefficient de plus haut degre de $C$ par rapport a $X_1$. Ce coefficient divise le coefficient de plus haut degre de $P$ et de $Q$ par rapport a $X_1$. Comme $C(z)$ est constant, on en deduit que le coefficient de plus haut degre de $P$ et $Q$ par rapport a $X_1$ est divisible par $X_k - z$ donc le coefficient de plus bas degre en $X_k$ de ces coefficients de plus haut degre est divisible par $z$, ce qui contredit la majoration de ce coefficient.

En pratique, cet algorithme nécessite le calcul récursif de pgcd sans garantie de réussite. On l'évite donc s'il y a beaucoup de variables (la limite est par exemple de 5 pour MuPAD).

### 5.3.2 Le pgcd modulaire multivariables.

Ici, on travaille modulo $X_n - \alpha$, où $X_1, \ldots, X_n$ désignent les variables des polynômes. On considère donc deux polynômes $P$ et $Q$ comme polynômes de la variables $X_n$ avec des coefficients dans $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. On évalue en $X_n = \alpha$, on obtient deux polynômes en $n-1$ variables dont on calcule le pgcd (récursivement).

Il s'agit de reconstruire le pgcd par interpolation. Tout d'abord, on a une borne évidente sur le degré du pgcd par rapport à la variable $X_n$, c'est le minimum $\delta$ des degrés par rapport à $X_n$ des polynômes $P$ et $Q$. A première vue, il suffit donc d'évaluer les polynômes en $\delta + 1$ points $\alpha$.

Il faut toutefois prendre garde aux mauvaises évaluations et à la normalisation des pgcd avant d'interpoler. En effet, si $D(X_1, \ldots, X_n)$ désigne le pgcd de $P$ et $Q$ et $G(X_1, \ldots, X_{n-1})$ le pgcd de $P(X_1, \ldots, X_{n-1}, \alpha)$ et de $Q(X_1, \ldots, X_{n-1}, \alpha)$, on peut seulement dire $D(X_1, \ldots, X_{n-1}, \alpha)$ divise $G$. Plusieurs cas sont donc possibles lorsqu'on évalue en un nouveau point $\alpha$ :

— l'un des degrés de $G$ est plus petit que le degré du polynôme $D'$ reconstruit par interpolation jusque là. Dans ce cas, toutes les évaluations qui ont conduit à reconstruire $D'$ étaient mauvaises. Il faut recommencer l'interpolation à zéro ou à partir de $G$ (si tous les degrés de $G$ sont inférieurs ou égaux aux degrés du $D'$ reconstruit).

— l'un des degrés de $G$ est plus grand que le degré du $D'$ reconstruit jusque là. Il faut alors ignorer $\alpha$.

— Tous les degrés de $G$ sont égaux aux degrés du $D'$ reconstruit jusque là. Dans ce cas, $G$ est un multiple entier du polynôme $D'$ reconstruit jusque là et évalué en $X_n = \alpha$. Si on suppose qu'on a pu s'arranger pour que ce

multiple soit 1, on ajoute le point $\alpha$ aux points d'évaluation précédents $\alpha_j$ en posant :

$$D' = D' + (G - D')\frac{\prod_{\alpha_j}(X_n - \alpha_j)}{\prod_{\alpha_j}(\alpha - \alpha_j)}$$

On voit que les mauvaises évaluations se détectent simplement par les degrés. Pour la normalisation, on utilise une petite astuce : au lieu de reconstruire lepgcd$D$, on va reconstruire un multiple du pgcd $D$ (ce multiple appartiendra à $\mathbb{Z}[X_n]$). On voit maintenant $P$ et $Q$ comme des polynômes en $n-1$ variables $X_1, \ldots, X_{n-1}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[X_n]$. Alors lcoeff$(D)$, le coefficient dominant de $D$ (relativement à l'ordre lexicographique sur les variables $X_1, ..., X_{n-1}$), est un polynôme en $X_n$ qui divise le coefficient dominant de $P$ et de $Q$ donc divise le coefficient dominant du pgcd des coefficients dominants de $P$ et de $Q$. On va donc reconstruire le polynôme :

$$D' = D\frac{\Delta(X_n)}{\text{lcoeff}(D)(X_n)}, \Delta(X_n) = \text{pgcd}(\text{lcoeff}(P)(X_n), \text{lcoeff}(Q)(X_n))$$

c'est-à-dire $D$ multiplié par un polynôme qui ne dépend que de $X_n$.

Revenons à $G$ en un point $\alpha$ de bonne évaluation. C'est un multiple entier de $D(X_1, \ldots, X_{n-1}, \alpha)$ :

$$G = \beta D(X_1, \ldots, X_{n-1}, \alpha)$$

Donc, comme polynômes de $X_1, ..., X_{n-1}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[X_n]$ ou dans $\mathbb{Z}$, lcoeff$(G) = \beta$lcoeff$(D)_{|X_n=\alpha}$. Comme lcoeff$(D)$ divise $\Delta(X_n)$, il en est de même en $X_n = \alpha$ donc lcoeff$(G)$ divise $\beta\Delta(\alpha)$. On en déduit que $\Delta(\alpha)G$ qui est divisible par $\Delta(\alpha)\beta$ est divisible par lcoeff$(G)$. On va donc considérer le polynôme $\Delta(\alpha)G/$lcoeff$(G)$ : ses coefficients sont entiers et son coefficient dominant est

$$\Delta(\alpha) = \text{lcoeff}(D'(X_1, \ldots, X_{n-1}, \alpha))$$

donc

$$\Delta(\alpha)G/\text{lcoeff}(G) = D'(X_1, \ldots, X_{n-1}, \alpha)$$

**Algorithme du pgcd modulaire à plusieurs variables (interpolation dense)** :

Arguments : 2 polynômes primitifs $P$ et $Q$ de $n$ variables $X_1, \ldots, X_n$ à coefficients entiers. Renvoie le pgcd de $P$ et $Q$.

1. Si $n = 1$, renvoyer le pgcd de $P$ et $Q$ en une variable.
2. Test rapide de pgcd trivial par rapport à $X_n$. On cherche des $n-1$-uplets $\alpha$ tels que $P(\alpha, X_n)$ et $Q(\alpha, X_n)$ soient de même degré que $P$ et $Q$ par rapport à la variable $X_n$. On calcule le pgcd $G$ de ces 2 polynômes en une variable. Si le pgcd est constant, alors on retourne le pgcd des coefficients de $P$ et $Q$.
3. On divise $P$ et $Q$ par leur contenu respectifs vu comme polynômes en $X_1, \ldots, X_{n-1}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[X_n]$, on note $C(X_n)$ le pgcd des contenus. On calcule aussi le pgcd $\Delta(X_n)$ des coefficients dominants de $P$ et de $Q$.

4. On initialise $D'$ le pgcd reconstruit à 0, $I(X_n)$ le polynôme d'interpolation à 1, $\delta = (\delta_1, ..., \delta_{n-1})$ la liste des degrés partiels du pgcd par rapport à $X_1, \ldots, X_{n-1}$ au minimum des degrés partiels de $P$ et $Q$ par rapport à $X_1, \ldots, X_{n-1}$, $e$ le nombre d'évaluation à 0 et $E$ l'ensemble des points d'interpolation à la liste vide.
5. Boucle infinie :
   — Faire $\alpha$=entier aléatoire n'appartenant pas à $E$ jusqu'à ce que

$$\text{degre}(P(X_1, \ldots, X_{n-1}, \alpha)) = \text{degre}_{X_n}(P(X_1, \ldots, X_n)$$
$$\text{degre}(Q(X_1, \ldots, X_{n-1}, \alpha)) = \text{degre}_{X_n}(Q(X_1, \ldots, X_n))$$

   — Calculer le pgcd $G(X_1, \ldots, X_{n-1})$ en $n-1$ variables de $P(X_1, \ldots, X_{n-1}, \alpha)$ et $Q(X_1, \ldots, X_{n-1}, \alpha)$.
   — Si degre$(G)_i < \delta_i$ pour un indice au moins. Si degre$(G) \leq \delta$, on pose $\delta = \text{degre}(G)$, $D' = G\frac{\Delta(\alpha)}{\text{lcoeff}(G)}$, $I = X_n - \alpha$, $e = 1$ et $E = [\alpha]$, sinon on pose $\delta = \min(\delta, \text{degre}(G))$, $D' = 0, I = 1, e = 0, E = []$. On passe à l'itération suivante.
   — Si degre$(G) > \delta$, on passe à l'itération suivante.
   — Si degre$(G) = \delta$, on interpole :
      — $G := G\frac{\Delta(\alpha)}{\text{lcoeff}(G)}$
      — $D' := D' + \frac{I(X_n)}{\prod_{\alpha_j \in E}(\alpha - \alpha_j)}(G - D'(X_1, \ldots, X_{n-1}, \alpha))$
      — $I := I * (X_n - \alpha)$
      — $e := e + 1$ et ajouter $\alpha$ à $E$
      — Si $e$ est strictement plus grand que le minimum des degrés partiels de $P$ et $Q$ par rapport à $X_n$, on pose $\tilde{D}$ la partie primitive de $D'$(vu comme polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}[X_n]$), on teste si $P$ et $Q$ sont divisibles par $\tilde{D}$, si c'est le cas, on renvoie $D = C(X_n)\tilde{D}$

On observe que dans cet algorithme, on fait le test de divisibilite de $\tilde{D}$ par $P$ et $Q$. En effet, même après avoir évalué en suffisamment de points, rien n'indique que tous ces points sont des points de bonne évaluation. En pratique cela reste extrêmement improbable. En pratique, on teste la divisibilité plus tôt, dès que $D'$ n'est pas modifié par l'ajout d'un nouveau point à la liste des $\alpha_j$.

Il existe une variation de cet algorithme, appelé SPMOD (sparse modular), qui suppose que seuls les coefficients non nuls du pgcd en $n-1$ variables sont encore non nuls en $n$ variables (ce qui a de fortes chances d'être le cas). L'étape d'interpolation est alors remplacée par la résolution d'un sous-système d'un système de Vandermonde. Cette variation est intéressante si le nombre de coefficients non nuls en $n-1$ variables est petit devant le degré. Si elle échoue, on revient à l'interpolation dense.

Notons enfin qu'on peut appliquer cette méthode lorsque les coefficients de $P$ et $Q$ sont dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mais il faut alors vérifier qu'on dispose de suffisamment de points d'interpolation. Ce qui en combinant avec l'algorithme modulaire à une variable donne un algorithme doublement modulaire pour calculer le pgcd de 2 polynômes à coefficients entiers. C'est cette méthode qu'utilise par exemple MuPAD (en essayant d'abord SPMOD puis l'interpolation dense).

**Exemple :**

Dans cet exemple, on donne $F$ et $G$ sous forme factorisée, le but étant de faire comprendre l'algorithme. En utilisation normale, on n'exécuterait cet algorithme que si $F$ et $G$ étaient développés.

$P = ((x+1)y+x^2+1)(y^2+xy+1), Q = ((x+1)y+x^2+1)(y^2-xy-1)$.

Prenons $x$ comme variable $X_1$ et $y$ comme variable $X_2$. Les coefficients dominants de $P$ et $Q$ sont respectivement $y$ et $-y$ donc $\Delta = y$.

En $y = 0$, $P(x, 0) = x^2 + 1$ n'est pas du bon degré.

En $y = 1$, $P(x, 1) = (x + x^2 + 2)(x + 2)$ et $Q(x, 1) = (x + x^2 + 2)(-x)$ sont du bon degré. Leur pgcd est $G = x^2 + x + 2$, $\Delta(1) = 1$, donc $D' = x^2 + x + 1$. On teste la divisibilité de $P$ par $D'$, le teste échoue.

En $y = 2$, $P(x, 2) = (x^2+2x+3)(2x+5)$ et $Q(x, 2) = (x^2+2x+3)(-2x+3)$ donc $G = x^2 + 2x + 3$, $\Delta(2) = 2$. On interpole :

$$D' = x^2+x+2+\frac{y-1}{2-1}(2(x^2+2x+3)-(x^2+x+2)) = y(x^2+3x+4)-(2x+2)$$

On teste la divisibilité de $P$ par $D'$, le test échoue.

En $y = 3$, $P(x, 3) = (x^2+3x+4)(3x+10)$ et $Q(x, 3) = (x^2+3x+4)(-3x+8)$ donc $G = x^2 + 3x + 4$, $\Delta(3) = 3$. On interpole :

$$\begin{aligned} D' &= y(x^2+3x+4)-(2x+2)+ \\ &\quad \frac{(y-2)(y-1)}{(3-2)(3-1)}\left(3(x^2+3x+4)-(3(x^2+3x+4)-(2x+2))\right) \end{aligned}$$

donc

$$D' = y(x^2+3x+4)-(2x+2)+\frac{(y-2)(y-1)}{2}(-2x-2) = x^2y+xy^2+y^2+y$$

On divise $D'$ par son contenu et on trouve $x^2 + xy + y + 1$ qui est bien le pgcd de $P$ et $Q$.

### 5.3.3 EZGCD.

Il s'agit d'une méthode $p$-adique. On évalue toutes les variables sauf une, on calcule le pgcd en une variable et on remonte au pgcd variable par variable (EEZGCD) ou toutes les variables simultanément (EZGCD) par un lemme de Hensel. Il semble qu'il est plus efficace de remonter les variables séparément.

Soit donc $F$ et $G$ deux polynômes primitifs dépendant des variables $X_1, \ldots, X_n$ de pgcd $D$, on fixe une des variables qu'on appelera $X_1$ dans la suite. Soient lcoeff$(F)$ et lcoeff$(G)$ les coefficients dominants de $F$ et $G$ par rapport à $X_1$. On évalue $F$ et $G$ en un $n-1$ uplet $b$ tel que le degré de $F$ et $G$ par rapport à $X_1$ soit conservé après evaluation en $b$. On suppose que $D_b(X_1) = \text{pgcd}(F(b), G(b))$ a le même degré que $D(b)$. On a donc l'égalité :

$$(F * \text{lcoeff}(F))(b) = \left(D_b \frac{\text{lcoeff}(F(b))}{\text{lcoeff}(D_b)}\right) * \left(\frac{F(b)}{D_b}\frac{\text{lcoeff}(F)(b)}{\text{lcoeff}(\frac{F(b)}{D_b})}\right)$$

et de même en remplaçant $F$ par $G$.

Pour pouvoir lifter cette égalité (c'est-à-dire généraliser à plusieurs variables), il faut que $D_b$ et $\frac{F(b)}{D_b}$ soient premiers entre eux. Sinon, on peut essayer de lifter

l'égalité analogue avec $G$. En général, on montre qu'il existe un entier $j$ tel que $D_b$ et $\frac{F(b)+jG(b)}{D_b}$ soient premiers entre eux. En effet, sinon au moins un des facteurs irréductibles de $D_b$ va diviser $\frac{F(b)+jG(b)}{D_b}$ pour deux valeurs distinctes de $j$ et va donc diviser à la fois $\frac{F(b)}{D_b}$ et $\frac{G(b)}{D_b}$ en contradiction avec la définition de $D_b = \text{pgcd}(F(b), G(b))$. On lifte alors l'égalité obtenue en remplaçant $F$ par $(F + kG)$ ci-dessus. Dans la suite, on suppose qu'on peut prendre $j = 0$ pour alléger les notations.

On va aussi supposer que $b = 0$. Sinon, on fait un changement d'origine sur les polynômes $F$ et $G$ pour que $b = 0$ convienne, on calcule le pgcd et on lui applique la translation d'origine opposée.

On adopte ensuite la notation suivante : si $k$ est un entier, on dit qu'un polynôme $P$ est un $O(k)$ si la valuation de $P$ vu comme polynôme en $X_2, \ldots, X_n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[X_1]$ est supérieure ou égale à $k$, ou de manière équivalente si

$$P(X_1, hX_2, \ldots, hX_n) = O_{h\to 0}(h^k)$$

L'égalité à lifter se réécrit donc :

$$F\text{lcoeff}(F) = P_0Q_0 + O(1)$$

où $P_0 = D_b \frac{\text{lcoeff}(F(b))}{\text{lcoeff}(D_b)}$ et $Q_0 = \frac{F(b)}{D_b} \frac{\text{lcoeff}(F)(b)}{\text{lcoeff}(\frac{F(b)}{D_b})}$ sont premiers entre eux et de degré 0 par rapport aux variables $X_2, \ldots, X_n$. Cherchons $P_1 = O(1)$ et $Q_1 = O(1)$ de degré 1 par rapport aux variables $X_2, \ldots, X_n$ tels que

$$F\text{lcoeff}(F) = (P_0 + P_1)(Q_0 + Q_1) + O(2)$$

Il faut donc résoudre

$$F\text{lcoeff}(F) - P_0Q_0 = P_0Q_1 + Q_0P_1 + O(2)$$

On peut alors appliquer l'identité de Bézout qui permet de déterminer des polynômes $P_1$ et $Q_1$ satisfaisant l'égalité ci-dessus (avec comme reste $O(2)$ nul) puisque $P_0$ et $Q_0$ sont premiers entre eux. De plus, on choisit $P_1$ et $Q_1$ tels que $\text{degre}_{X_1} P_1 \leq \text{degre}_{X_1}(F) - \text{degre}(Q_0) = \text{degre}(P_0)$ et $\text{degre}_{X_1}(Q_1) \leq \text{degre}(Q_0)$ et $\text{lcoeff}_{X_1}(P_0 + P_1) + O(2) = \text{lcoeff}_{X_1}(Q_0 + Q_1) + O(2) = \text{lcoeff}_{X_1}(F)$. On tronque ensuite $P_1$ et $Q_1$ en ne conservant que les termes de degré 1 par rapport à $X_2, \ldots, X_n$.

On trouve de la même manière par récurrence $P_k$ et $Q_k$ homogènes de degré $k$ par rapport à $X_2, \ldots, X_k$, de degré par rapport à $X_1$ respectivement inférieur aux degrés de $Q_0$ et de $P_0$ et tels que

$$F\text{lcoeff}(F) = (P_0 + \ldots. + P_k)(Q_0 + \ldots. + Q_k) + O(k+1) \tag{5.6}$$

et $\text{lcoeff}(F) = \text{lcoeff}_{X_1}(P_0 + \ldots. + P_k) + O(k+1) = \text{lcoeff}_{X_1}(Q_0 + \ldots. + Q_k) + O(k+1)$.

Si on est bien en un point de bonne évaluation et si $k$ est plus grand que le degré total (par rapport aux variables $X_2, \ldots, X_n$) du polynôme $F\text{lcoeff}(F)$ on va vérifier que $P_0 + \ldots. + P_k = D\frac{\text{lcoeff}(F)}{\text{lcoeff}(D)}$. En effet, si on a deux suites de

polynômes $P$ et $P'$ et $Q$ et $Q'$ satisfaisant (**??**) avec les même termes de degré zéro $P_0$ et $Q_0$, alors en prenant la différence, on obtient :

$$(P_0+P_1\ldots+P_k)(Q_0+Q_1\ldots+Q_k) = (P_0+P'_1\ldots+P'_k)(Q_0+Q'_1\ldots+Q'_k)+O(k+1)$$

On égale alors les termes homogènes de degré $j$, pour $j=1$, on obtient $P_0(Q_1 - Q'_1) = Q_0(P_1 - P'_1)$, donc $Q_0$ divise $Q_1 - Q'_1$ qui est de degré strictement inférieur au degré de $Q_0$ par rapport à $X_1$ (car on a l'inégalité large et les termes de plus haut degré sont égaux), donc $Q_1 = Q'_1$ et $P_1 = P'_1$. On montre de la même manière que $Q_j = Q'_j$ et $P_j = P'_j$. L'écriture est donc unique, c'est donc l'écriture en polynôme homogène de degré croissant de $D\frac{\text{lcoeff}^{(F)}}{\text{lcoeff}^{(D)}}$ que l'on reconstruit.

Cet algorithme permet donc de reconstruire $D$, il suffit de tester à chaque étape si $P_0 + \ldots. + P_k$ divise $F\text{lcoeff}(F)$. On appelle cette méthode de remontée lemme de Hensel linéaire. Il existe une variante dite lemme de Hensel quadratique qui consiste à passer de $O(k)$ à $O(2k)$. Elle nécessite toutefois un calcul supplémentaire, celui de l'identité de Bézout à $O(2k)$ près pour les polynômes $P_0 + \ldots. + P_{k-1}$ et $Q_0 + \ldots. + Q_{k-1}$. Ce calcul se fait également par lifting.

**Algorithme EZGCD (Hensel linéaire)**

Arguments : 2 polynômes $F$ et $G$ à coefficients entiers et primitifs. Renvoie le pgcd de $F$ et $G$ ou false.

1. Evaluer $F$ et $G$ en $(X_2, \ldots., X_n) = (0, \ldots., 0)$, vérifier que les coefficients dominants de $F$ et de $G$ ne s'annulent pas. Calculer le pgcd $D_b$ de $F(0)$ et de $G(0)$. Prendre un autre point d'évaluation au hasard qui n'annule pas les coefficients dominants de $F$ et de $G$ et vérifier que le pgcd a le même degré que $D_b$. Sinon, renvoyer false (on peut aussi faire une translation d'origine de $F$ et de $G$ en un autre point mais cela diminue l'efficacité de l'algorithme).
2. On note lcF et lcG les coefficients dominants de $F$ et de $G$ par rapport à $X_1$.
3. Si degre$(F) \leq$ degre$(G)$ et degre$(D_b)$ = degre$(G)$ et $F$ divise $G$ renvoyer $F$
4. Si degre$(G) <$ degre$(F)$ et degre$(D_b)$ = degre$(F)$ et $G$ divise $F$ renvoyer $G$
5. Si degre$(F)$ = degre$(D_b)$ ou si degre$(G)$ = degre$(D_b)$ renvoyer false
6. Boucle infinie sur $j$ entier initialisé à 0, incrémenté de 1 à chaque itération : si pgcd$(D_b, \frac{F(0)+jG(0)}{D_b}) = C$ constant, alors arrêter la boucle
7. Lifter l'égalité $(F+jG)(\text{lcF}+j\text{lcG})(0) = \left(D_b\frac{(\text{lcF}+j\text{lcG})(0)}{\text{lcoeff}^{(D_b)}}\right) * \ldots.$ par remontée de Hensel linéaire ou quadratique. Si le résultat est false, renvoyer false. Sinon renvoyer le premier polynôme du résultat divisé par son contenu vu comme polynôme en $X_1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[X_2, \ldots., X_n]$.

**Remontée de Hensel linéaire** :

Arguments : $F$ un polynôme, lcF=lcoeff$(F)$ son coefficient dominant, $P_0$ un facteur de $F(0)$ ayant comme coefficient dominant lcF$(0)$ et dont le cofacteur $Q_0$ est premier avec $P_0$.

Renvoie deux polynômes $P$ et $Q$ tels que $F\text{lcF} = PQ$ et $P(0) = P_0$ et lcoeff$(P)$ = lcoeff$(Q)$ = lcF.

1. Soit $G = F$lcF, , $Q_0 = G(0)/P_0$, $P = P_0$, $Q = Q_0$.
2. Déterminer les deux polynômes $U$ et $V$ de l'identité de Bézout (tels que $P_0U + Q_0V = d$ où $d$ est un entier).
3. Boucle infinie avec un compteur $k$ initialisé à 1, incrémenté de 1 à chaque itération
   — Si $k >$ degre$_{X_2,\ldots,X_n}(G)$, renvoyer false.
   — Si $P$ divise $G$, renvoyer $P$ et $G/P$.
   — Soit $H = G - PQ = O(k)$. Soit $u = U\frac{H}{d}$ et $v = V\frac{H}{d}$, on a $P_0u + Q_0v = H$
   — Remplacer $v$ par le reste de la division euclidienne de $v$ par $P_0$ et $u$ par le reste de la division euclidienne de $u$ par $Q_0$. La somme des deux quotients est égale au quotient euclidien de $H$ par $P_0Q_0$, c'est-à-dire au coefficient dominant de $H$ divisé par le produit des coefficients dominants de $P_0$ et $Q_0$ (qui sont égaux) donc on a l'égalité :

$$P_0u + Q_0v = H - \frac{\text{lcoeff}(H)}{\text{lcoeff}(P_0)^2}P_0Q_0$$

   — Soit $\alpha = (\text{lcoeff}(F) - \text{lcoeff}(P))/\text{lcoeff}(P_0)$ et $\beta = (\text{lcoeff}(F) - \text{lcoeff}(Q))/\text{lcoeff}(P_0)$. On ajoute $\alpha P_0$ à $v$, ainsi lcoeff$(P+v) =$ lcoeff$(F)+O(k+1)$ et $\beta Q_0$ à $u$, ainsi lcoeff$(Q+u) =$ lcoeff$(F) + O(k+1)$
   Remarque : on montre alors que $\alpha+\beta = \frac{\text{lcoeff}(H)}{\text{lcoeff}(P_0Q_0)} + O(k+1)$ donc $P_0u + Q_0v = H + O(k+1)$ en utilisant les propriétés :

   $$\text{lcoeff}(F) = \text{lcoeff}(P)+O(k) = \text{lcoeff}(Q)+O(k) = \text{lcoeff}(P_0)+O(1)$$

   — Réduire $u$ et $v$ en éliminant les termes de degré strictement supérieur à $k$ par rapport à $X_2, \ldots, X_n$. S'il reste un coefficient non entier, renvoyer false
   — Remplacer $P$ par $P + v$ et $Q$ par $Q + u$, passer à l'itération suivante.

**Exemple** :

$F = ((x+1)y+x^2+1)(y^2+xy+1), G = ((x+1)y+x^2+1)(y^2-xy-1)$

On a $F(0, y) = (y + 1)(y^2 + 1)$ et $G(0, y) = (y + 1)(y^2 - 1)$, le pgcd est donc $D_b = (y + 1)$. On remarque que $D_b$ est premier avec le cofacteur de $F$ mais pas avec le cofacteur de $G$. Si on évalue en un autre point, par exemple $x = 1$, on trouve un pgcd $D_1$ de même degré, donc 0 est vraissemblablement un bon point d'évaluation (ici on en est sûr puisque le pgcd de $F$ et $G$ se calcule à vue...). On a lcoeff$(F) = x+1$, on va donc lifter $G = ((x+1)y+x^2+1)(y^2+xy+1)(x+1) = PQ$ où $P_0 = (y + 1)$ et $Q_0 = (y^2 + 1)$.

On calcule les polynômes de l'identité de Bézout $U = (1 - y)$ et $V = 1$ avec $d = 2$, puis à l'ordre $k = 1$ :

$$H = G - P_0Q_0 = (2y^3 + 2y^2 + 3y + 1)x + O(2)$$

donc $u =$ reste$(UH/d, Q_0) = xy$ et $v =$ reste$(VH/d, P_0) = -x$.

Donc $Q_1 = xy+\alpha Q_0$ avec $\alpha = (x+1-1)/\text{lcoeff}(P_0) = x$ et $Q_0+Q_1 = (y^2+1)(x+1)+xy$. De même, $P_1 = -x + \beta P_0$, avec $\beta = (x+1-1)/\text{lcoeff}(P_0) = x$

donc $P_0 + P_1 = (y+1)(x+1) - x$. On remarque que $P_0 + P_1$ et $Q_0 + Q_1$ sont bien à $O(2)$ près les facteurs de $F$lcoeff$(F)$ :

$P = (x+1)y+x^2+1 = P_0+P_1+O(2)$, $Q = (x+1)(y^2+xy+1) = Q_0+Q_1+O(2)$

Une deuxième itération est nécessaire. On calcule

$$H = G - (P_0 + P_1)(Q_0 + Q_1) = (2y^2 + y + 1)x^2 + O(3)$$

puis reste$(UH/d, Q_0) = yx^2$ et reste$(VH/d, P_0) = x^2$. Ici les coefficients $\alpha$ et $\beta$ sont nuls car lcoeff$(F)$ n'a pas de partie homogène de degré 2. On trouve alors $P = P_0 + P_1 + P_2$ et $Q = Q_0 + Q_1 + Q_2$. Pour calculer le pgcd, il suffit de calculer la partie primitive de $P$ vu comme polynôme en $y$, ici c'est encore $P$ car le contenu de $P$ est 1 (remarque : pour $Q$ le contenu est $x + 1$).
On trouve donc $P$ comme pgcd.

## 5.4 Quel algorithme choisir ?

Il est toujours judicieux de faire une évaluation en quelques $n - 1$ uplets pour traquer les pgcd triviaux. (E)EZGCD sera efficace si (0,...,0) est un point de bonne évaluation et si le nombre de remontées nécessaires pour le lemme de Hensel est petit donc pour les pgcd de petit degré, GCDMOD est aussi efficace si le degré du pgcd est petit. Le sous-résultant est efficace pour les pgcd de grand degré car il y a alors peu de divisions euclidiennes à effectuer et les coefficients n'ont pas trop le temps de croitre. SPMOD est intéressant pour les polynômes creux de pgcd non trivial creux. GCDHEU est intéressant pour les problèmes relativement petits.

Avec des machines multiprocesseurs, on a probablement intérêt à lancer en parallèle plusieurs algorithmes et à s'arrêter dès que l'un deux recontre le succès.

## 5.5 Pour en savoir plus.

Parmi les références citées dans le premier article, ce sont les livres de Knuth, H. Cohen, et Davenport-Siret-Tournier qui traitent des algorithmes de pgcd. On peut bien sûr consulter le source de son système de calcul formel lorsqu'il est disponible :

- pour MuPAD sur un système Unix, depuis le répertoire d'installation de MuPAD (en général `/usr/local/MuPAD`) après avoir désarchivé le fichier `lib.tar` du répertoire `share/lib` par la commande
  `cd share/lib && tar xvf lib.tar`
  on trouve les algorithmes de calcul de PGCD dans le répertoire
  `share/lib/lib/POLYLIB/GCD`
- Pour l'algorithme EZGCD, je me suis inspiré de l'implémentation de Singular (logiciel libre disponible à `www.singular.uni-kl.de`)

Sur le web on trouve quelques articles en lignes sur le sujet en cherchant les mots clefs GCDHEU, EZGCD, SPMOD sur un moteur de recherche, il y a par exemple une description un peu différente du pgcd heuristique sur :
`www.inf.ethz.ch/personal/gonnet/CAII/HeuristicAlgorithms/node1.html`

et un article de comparaison de ces algorithmes par Fateman et Liao (dont la référence bibliographique est Evaluation of the heuristic polynomial GCD. in : ISSAC pages 240–247, 1995). Quelques autres références :

- K.O.Geddes et al "Alg. for Computer Algebra", Kluwer 1992.
- pour GCDHEU Char, Geddes, Gonnet, Gcdheu : Heuristic polynomial gcd algorithm based on integer gcd computation, in : Journal of Symbolic Computation, 7 :31–48, 1989.
- pour SPMOD "Probabilistic Algorithms for Sparse Polynomials", in : Symbolic & Algebraic Comp. (Ed E.W.Ng), Springer 1979, pp216,

# Chapitre 6

# Le résultant

## 6.1 Définition

Il s'agit d'un point de vue d'algèbre linéaire sur le PGCD. Considérons deux polynômes $A$ et $B$ à coefficients dans un corps, de degrés $p$ et $q$ et de pgcd $D$ et l'identité de Bézout correspondante :

$$AU + BV = D \tag{6.1}$$

avec degré$(U) < q$ et degré$(V) < p$. Imaginons qu'on cherche $U$ et $V$ en oubliant qu'il s'agit d'une identité de Bézout, en considérant simplement qu'il s'agit d'un problème d'algèbre linéaire de $p + q$ équations (obtenues en développant et en identifiant chaque puissance de $X$ de 0 à $p + q - 1$) à $p + q$ inconnues (les $p$ coefficients de $V$ et les $q$ coefficients de $U$) On sait que $A$ et $B$ sont premiers entre eux si et seulement si ce problème d'algèbre linéaire a une solution pour $D = 1$. Donc si le déterminant du système est non nul, alors $A$ et $B$ sont premiers entre eux. Réciproquement si $A$ et $B$ sont premiers entre eux, le système a une solution unique non seulement avec comme second membre 1 mais avec n'importe quel polynôme de degré inférieur $p + q$, donc le déterminant du système est non nul.

**Définition :**
On appelle résultant de $A$ et $B$ le déterminant de ce système (**??**). Il s'annule si et seulement si $A$ et $B$ ne sont pas premiers entre eux (ont au moins une racine commune). On appelle **matrice de Sylvester** la transposée de la matrice du système (les inconnues étant par ordre décroissant les coefficients de $U$ et $V$)

$$M(A,B) = \begin{pmatrix} A_a & A_{a-1} & \dots & \dots & A_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_a & \dots & \dots & A_1 & A_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & & & A_0 \\ B_b & B_{b-1} & \dots & B_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & & & B_0 \end{pmatrix}$$

(cette matrice contient $b$ =degré$(B)$ lignes de coefficients du polynôme $A$ et $a$ =degré$(A)$ lignes de coefficients du polynôme $B$, les coefficients diagonaux sont les $A_a$ et $B_0$)

**Remarques**
Le résultant s'exprime polynomialement en fonction des coefficients des polynômes $A$ et $B$ donc aussi en fonction des coefficients dominants de $A$ et $B$ et des racines $\alpha_1, ..., \alpha_a$ de $A$ et $\beta_1, ..., \beta_b$ $B$, or si on fait varier les racines de $B$ on annulera le résultant si l'une d'elle coincide avec une racine de $A$, ceci montre que le résultant est divisible par le produit des différences des racines $\beta_j - \alpha_i$ de $A$ et $B$. On montre que le quotient est $A_a^b B_b^a$ en regardant le coefficient dominant du résultant en degré total par rapport aux $\beta_j$ : dans le déterminant il faut prendre le produit des termes diagonaux pour avoir le degré maximal en les $\beta_j$. On peut aussi l'écrire sous la forme

$$\text{resultant}(A, B) = A_a^b \prod_{i=1}^{a} B(\alpha_i)$$

Soit $P$ un polynôme de degré $n$ et coefficient dominant $p_n$. Le coefficient dominant de $P'$ est $np_n$, un multiple de $p_n$, le résultant de $P$ et $P'$ est donc divisible par $p_n$, on appelle le quotient **discriminant**. En terme des racines $r_i$ de $P$, on a

$$\text{disc}(P) = \frac{\text{resultant}(P, P')}{p_n} = p_n^{n-2} \prod_{i=1}^{n} P'(r_i) = p_n^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (r_i - r_j)^2$$

Ce résultat a un intérêt pour par exemple minorer à priori l'écart entre 2 racines d'un polynôme à coefficients entiers.

## 6.2 Applications

Revenons au cas où nos polynômes sont à coefficients dans un anneau contenu dans un corps, par exemple $\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}$ ou un anneau de polynômes $\mathbb{Z}[X_2, ..., X_n]$ dans son corps de fractions. On remarque alors que l'équation :

$$AU + BV = C$$

a une solution dans l'anneau si $C$ est le résultant $r$ de $A$ et $B$ (ou un multiple). En effet, on écrit les solutions comme celles d'un système de Cramer, le dénominateur de chaque inconnue est $r$, le numérateur est un déterminant ayant les coefficients de $C$ dans une des colonnes, on peut donc y factoriser $r$ et simplifier. On peut le voir directement à partir de la définition du résultant en effectuant sur le déterminant une manipulation de colonnes sur la dernière colonne, on ajoute à cette dernière colonne $x$ fois l'avant-dernière, $x^2$ fois l'avant-avant-dernière etc... La dernière colonne devient

$$\begin{pmatrix} x^{b-1}A \\ ... \\ A \\ x^{a-1}B \\ ... \\ B \end{pmatrix}$$

et en développant le déterminant par rapport à cette dernière colonne, on obtient l'identité de Bézout.

**Exemple** : le résultant de $x+1$ et $x-1$ est 2, donc l'équation

$$(x+1)U + (x-1)V = 2$$

a une solution $U = 1$ et $V = -1$ dans $\mathbb{Z}[X]$, par contre

$$(x+1)U + (x-1)V = 1$$

n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}[X]$.

### 6.2.1 Systèmes polynomiaux

Ceci peut servir à éliminer des inconnues lorsqu'on résoud un système d'équations polynomiales :

$$P_1(X_1, ..., X_n) = 0, ..., P_n(X_1, ..., X_n) = 0$$

On pose

$$P_1^1(X_1, ..., X_{n-1}) = \text{resultant}(P_1, P_n, X_n), ..., P_{n-1}^1(X_1, ..., X_{n-1}) = \text{resultant}(P_{n-1}, P_n, X_n)$$

Comme $P_1^1, P_{n-1}^1, ...$ sont des combinaisons linéaires des polynômes de départ à coefficients dans l'anneau, si $(X_1, ..., X_n)$ est solution du système de départ, alors $X_1, ..., X_{n-1}$ est solution du deuxième système. On élimine ainsi les variables les unes après les autres, pour se ramener à une seule équation polynomiale $P_1^{n-1}(X_1) = 0$, dont on cherche les racines, puis si $r_1$ est une racine de $P_1^{n-1}$, on remonte au système précédent $P_1^{n-2}(r_1, X_2) = 0, P_2^{n-2}(r_1, X_2) = 0$, que l'on résoud en cherchant les racines de $\gcd(P_1^{n-2}(r_1, X_2), P_2^{n-2}(r_1, X_2))$, et ainsi de suite jusqu'au système de départ.

Lors des calculs de résultant, il peut arriver que le résultat soit nul si les arguments ne sont pas premiers entre eux, dans ce cas il faut diviser par le PGCD de ces 2 polynômes et traiter le cas du PGCD à part.

Malheureusement, les calculs de résultant deviennent vite impraticables (cf. infra), on ne peut guère traiter par cette méthode que des systèmes 3x3 (ou 4x4 si on est patient). Pour des systèmes plus ambitieux, on utilisera plutôt un calcul de bases de Groebner. Mais le résultant est très bien adapté par exemple à la recherche d'équations cartésiennes d'une courbe ou surface paramétrée par des fractions rationnelles.

### 6.2.2 Identité de Bézout dans $\mathbb{Z}[X]$.

Lorsque les polynômes $A$ et $B$ sont à coefficients entiers, on peut résoudre l'identité de Bézout en résolvant le système linéaire $AU + BV = D$ où $D$ est calculé par un algorithme de calcul de PGCD. C'est un système linéaire de $a+b$ équations en $a+b$ inconnues, que l'on peut résoudre par une méthode $p$-adique, permettant de calculer efficacement les coefficients rationnels de $U$ et $V$.

On peut étendre à des polynômes premiers entre eux ayant des coefficients dans une extension algébrique de $\mathbb{Q}$, en calculant l'identité de Bézout pour $\tilde{A}$=norme$(A)$ et $\tilde{B}$=norme$(B)$ (norme au sens de norme algébrique, obtenue en multipliant par les conjugués du polynôme, calculé en pratique en prenant le résultant du polynôme

avec le polynôme minimal de l'extension algébrique) et en observant que la norme est divisible par le polynôme

$$\tilde{A}\tilde{U} + \tilde{B}\tilde{V} = 1 \Rightarrow A\frac{\tilde{A}}{A}\tilde{U} + B\frac{\tilde{B}}{B}\tilde{V} = 1$$

On pose alors $u$ le reste de $\frac{\tilde{A}}{A}\tilde{U}$ par $B$ et $v$ le reste de$\frac{\tilde{B}}{B}\tilde{V}$ par $A$. Si les polynômes ne sont pas premiers entre eux, on s'y ramène en divisant par leur pgcd.

## 6.3 Résultant et degrés

Si $A$ et $B$ sont des polynômes en $d$ variables de degré total $m$ et $n$ alors le résultant de $A$ et $B$ par rapport à une des variables, disons la première notée $x$, est un polynôme en $d-1$ variables, on va voir qu'on peut majorer son degré total par $mn$.

Quitte à ajouter une variable d'homogénéisation (appelons-la $t$), on peut supposer que $A$ et $B$ sont homogènes, par exemple si $A = x^3 + xy + 1$ on considère $A_t = x^3 + xyt + t^3$. Le degré total par rapport aux $d-1$ variables d'un coefficient $A_j$ de $A$ est alors $m-j$, et pour $B_k$ c'est $n-k$. On développe le déterminant comme somme sur toutes les permutations de $a+b$ éléments, et on regarde le degré total d'un terme par rapport aux $d-1$ variables, on a donc un produit de $r_{i\sigma(i)}$ pour $i$ entre 1 et $a+b$. Pour $i$ entre 1 et $b$, on est dans les $b$ premières lignes, donc avec des coefficients de $A$, le degré total de $r_{i\sigma(i)}$ se déduit de la distance à la diagonale, il vaut $m-a+i-\sigma(i)$ puisque sur la diagonale c'est $m-a$. Pour $i$ entre $b+1$ et $b+a$ on est dans les $a$ dernières lignes, donc avec des coefficients de $B$, le degré total est $n+\sigma(i)-i$. Le degré total du produit vaut donc

$$b(m-a) + an + \sum_{i=1}^{a+b} \sigma(i) - i = b(m-a) + an = mn - (m-a)(n-b)$$

il est donc au plus $mn$ avec égalité si $m = a$ ou $n = b$ (c'est-à-dire si le degré total est identique au degré partiel en $x$ pour au moins un des deux polynômes).

Lorsqu'on enlève la variable d'homogénéisation (en posant $t = 1$), on peut également perdre un ou plusieurs degrés. Dans le cas de polynômes en 2 variables $A(x,y), B(x,y)$, cela correspond à un point d'intersection à l'infini entre les 2 courbes $A(x,y) = B(x,y) = 0$, en coordonnées homogènes on a $t = 0$ qui est solution, et on remplace $t$ par 0 dans $A_t(x,y,t) = B_t(x,y,t) = 0$ pour trouver la direction.

Exemple (tiré d'un TP de Frédéric Han) intersection des 2 courbes $x * y = 4$ et $y^2 = (x-3) * (x^2-16)$. On a donc $A = xy - 4$, $B = y^2 - (x-3)(x^2-16)$, $m = 2, n = 3$ on définit alors :

```
A:=x*y-4t^2; B:=y^2*t-(x-3t)*(x^2-16t^2);
```

On observe que `resultant(A,B,x)` est bien de degré 6 (car $n = b = 3$), alors que `resultant(A,B,y)` est de degré 5 ($m \neq a, n \neq b$). On a donc 5 points d'intersection complexes et un point d'intersection à l'infini correspondant à la racine $t = 0$ du résultant en $x$ de coordonnées homogènes $(x,y,t) = (0,1,0)$.
Illustration

```
solve(subst(resultant(A,B,y),t=1))
implicitplot(subst(A,t=1));implicitplot(subst(B,t=1))
```

Plus généralement, soit deux courbes algébriques d'équations respectives $A(x,y) = 0$ et $B(x,y) = 0$ de degré totaux $m$ et $n$ et premiers entre eux, alors $A$ et $B$ ont au plus $mn$ points d'intersection (**théorème de Bézout**). En effet, le résultant en $x$ par exemple est non nul puisque les 2 polynômes sont premiers entre eux, donc est un polynôme en $y$ qui a un nombre fini de racines, puis on cherche les racines en $x$ de $\gcd(A(.,y), B(.,y))$ pour chaque valeur de $y$ racine, il y a donc un nombre fini d'intersections. On peut donc changer de repère et choisir un repère tel que deux points d'intersections distincts aient leurs abscisses distinctes. On refait le même raisonnement, et on utilise la majoration du degré du résultant par rapport à $y$ par $mn$, on a donc au plus $mn$ valeurs de $y$, donc au plus $mn$ points d'intersections, puisqu'une valeur de $y$ ne correspond qu'à une valeur de $x$ par choix du repère. Lorsqu'on travaille dans $\mathbb{C}^2$, le défaut de nombre de points d'intersection par rapport au majorant $mn$ provient des points à l'infini, à condition de prendre en compte la multiplicité des intersections. Dans $\mathbb{R}^2$, on perd aussi les points non réels. Exemple : intersection de $(x-2)^2 + y^2 = 4$ et $y^2 = (x-3) * (x^2 - 16)$.

Le degré du résultant explique pourquoi on ne peut pas résoudre en pratique de grands systèmes polynomiaux avec cet outil d'élimination. Par exemple pour un système de 5 équations en 5 inconnues de degré 5, en éliminant une variable, on passe à 4 équation en 4 inconnues de degré 25, puis à 3 équations en 3 inconnues de degré $25^2 = 625$, puis 2 équations en 2 inconnues de degré $625^2 = 390625$ et enfin un polynôme de degré ... 152587890625. Pour $n$ équations de degré $n$, on a une majoration par $n^{(2^{n-1})}$, ainsi pour $n = 4$ on trouve 65536 qui est déjà discutable...

## 6.4 Lien avec l'algorithme du sous-résultant (calcul de PGCD)

On peut calculer le déterminant avec la suite des restes de divisions euclidiennes de la manière suivante, on part de la pseudo-division de $A$ par $B$ :

$$B_b^{a-b+1} A = BQ + R$$

on effectue alors sur chaque ligne contenant les coefficients de $A$ la manipulation de ligne correspondante, c'est-à-dire multiplier la ligne par $B_b^{a-b+1}$ et soustraire ($q_0$ fois la ligne de $B$ terminant dans la même colonne+$q_1$ fois la ligne de $B$ terminant une colonne avant+...). Toutes les lignes contenant les coefficients de $A$ ont été remplacées par des lignes contenant les coefficients de $R$. Ces lignes contiennent $k$ zéros initiaux avec $k \geq 1$, ce qui permet de réduire le déterminant à celui de la matrice de Sylvester de $R$ et $B$ (à un coefficient multiplicatif près qui vaut $B_b^k$ par rapport au précédent donc $B_b^{k-b(a-b+1)}$ par rapport au déterminant de départ). On échange ensuite $R$ et $B$ ce qui change éventuellement le signe et on continue en faisant les divisions euclidiennes de l'algorithme du sous-résultant (cf. Knuth où on utilise la matrice de Sylvester pour prouver que l'algorithme du sous-résultant est correct). Rappelons que le sous-résultant définit les suites $A_k$ ($A_0 = A, A_1 = B$), $d_k$ le degré de $A_k$, $\delta_k = d_k - d_{k+1}$, $g_k$ ($g_0 = 1$, si $k \neq 0$, $g_k$ coefficient dominant de $A_k$) $h_k$ ($h_0 = 1$, $h_{k+1} = h_k^{1-\delta_k} g_{k+1}^{\delta_k}$) et

$$g_k^{\delta_{k-1}+1} A_{k-1} = A_k Q_{k+1} + g_{k-1} h_{k-1}^{\delta_{k-1}} A_{k+1}$$

**Théorème 10** *Le résultant est égal au signe près au coefficient $h_k$ où k correspond au reste $A_k$ constant (en supposant que le résultant soit non nul).*

**Preuve**
La transcription de l'égalité précédente sur les résultants donne par la méthode ci-dessus :

$$\begin{aligned} g_k^{(\delta_{k-1}+1)d_k}\text{Res}(A_{k-1},A_k) &= g_k^{d_{k-1}-d_{k+1}}\text{Res}(g_{k-1}h_{k-1}^{\delta_{k-1}}A_{k+1},A_k) \\ &= g_k^{d_{k-1}-d_{k+1}}(g_{k-1}h_{k-1}^{\delta_{k-1}})^{d_k}\text{Res}(A_{k+1},A_k) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{\text{Res}(A_{k-1},A_k)}{g_{k-1}^{d_k}h_{k-1}^{d_{k-1}-1}} = g_k^{d_{k-1}-d_{k+1}-(\delta_{k-1}+1)d_k}h_{k-1}^{\delta_{k-1}d_k+1-d_{k-1}}\text{Res}(A_{k+1},A_k)$$

On observe que :

$$h_{k-1}^{\delta_{k-1}d_k+1-d_{k-1}} = h_{k-1}^{(\delta_{k-1}-1)(d_k-1)} = \left(h_{k-1}^{\delta_{k-1}-1}\right)^{d_k-1} = \left(\frac{g_k^{\delta_{k-1}}}{h_k}\right)^{d_k-1}$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Res}(A_{k-1},A_k)}{g_{k-1}^{d_k}h_{k-1}^{d_{k-1}-1}} &= g_k^{d_{k-1}-d_{k+1}-(\delta_{k-1}+1)d_k}\left(\frac{g_k^{\delta_{k-1}}}{h_k}\right)^{d_k-1}\text{Res}(A_{k+1},A_k) \\ &= g_k^{d_{k-1}-d_{k+1}-d_k-\delta_{k-1}}\left(\frac{1}{h_k}\right)^{d_k-1}\text{Res}(A_{k+1},A_k) \\ &= \frac{\text{Res}(A_{k+1},A_k)}{g_k^{d_{k+1}}h_k^{d_k-1}} \end{aligned}$$

Donc en valeur absolue

$$\left|\frac{\text{Res}(A_0,A_1)}{g_0^{d_1}h_0^{d_0-1}}\right| = \left|\frac{\text{Res}(A_{k-1},A_k)}{g_{k-1}^{d_k}h_{k-1}^{d_{k-1}-1}}\right|$$

En prenant le rang $k$ tel que $A_k$ est constant, on a $d_k = 0$ et le résultant est égal à $g_k^{d_{k-1}}$, on obtient donc :

$$|\text{Res}(A_0,A_1)| = \left|\frac{g_k^{d_{k-1}}}{h_{k-1}^{d_{k-1}-1}}\right|$$

Comme ici $\delta_{k-1} = d_{k-1}$, le terme de droite est $|h_k|$.

**Remarque**
On peut calculer au fur et à mesure le signe du résultant en tenant compte des degrés de $A_k$ pour inverser l'ordre de $A_{k-1}$ et $A_k$ dans le résultant.

**Utilisation**
La valeur du résultant est très utile pour savoir si 2 polynômes dépendant de paramètres sont premiers entre eux en fonction de la valeur des paramètres. En effet, la fonction `gcd` d'un logiciel de calcul formel calculera le PGCD par rapport à toutes

les variables en incluant les paramètres. En cherchant quand le résultant s'annule en fonction des paramètres on obtient un autre type d'information.

**Exemple :**

Chercher quand le polynône $P = x^3 + px + q$ possède une racine multiple en fonction de $p$ et $q$. On calcule le résultant de $P$ et $P'$ et on trouve $4p^3 + 27q^2$, donc $P$ a une racine multiple si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

## 6.5 Calcul efficace du résultant

On dispose essentiellement de deux stratégies avec des sous-stratégies :

— Calcul comme un déterminant. On peut utiliser des méthodes modulaires ou $p$-adiques (par exemple si $A$ et $B$ sont à coefficients entiers), ou/et de l'interpolation (si $A$ et $B$ sont à coefficients polynomiaux), ou la méthode de Gauss-Bareiss, ou le développement de Laplace. Il suffit de forcer une stratégie dans l'appel à `det` sur `sylvester(A,B)`

— Algorithme du sous-résultant
C'est cet algorithme qui est utilisé par Xcas. Il peut aussi se décliner en méthode modulaire ou avec interpolation.

Exemple de comparaison :

```
n:=100; A:=randpoly(n):; B:=randpoly(n):;
```

100, "Done", "Done"

```
time(resultant(A,B)); time(det(sylvester(A,B)))
```

"sylvester(A,B)"
"Error : Bad Argument Value"

# Chapitre 7

# Localisation des racines

## 7.1 Majoration

On a vu au lemme **??**, que si $z$ est une racine complexe d'un polynôme $P$ de coefficient dominant $p_n$ alors

$$|z| \leq 1 + \frac{|P|_\infty}{|p_n|}$$

## 7.2 Les suites de Sturm.

L'algorithme du sous-résultant appliqué à un polynôme sans racine multiple $P$ et à sa dérivée permet, à condition de changer les signes dans la suite des restes, de connaitre le nombre de racines réelles d'un polynôme à coefficients réels dans un intervalle. Ceci est trè utile pour par exemple simplifier des valeurs absolues de polynômes dans un intervalle.

On définit donc la suite de polynômes $A_0 = P, A_1 = P', ..., A_k, 0$ par :

$$A_i = A_{i+1}Q_{i+2} - A_{i+2} \tag{7.1}$$

avec $A_k$, le dernier reste non nul, un polynôme constant puisque $P$ n'a pas de racine multiple. On utilise plutot l'algorithme du sous-résultant que l'algorithme d'Euclide, il faut alors s'assurer que les signes de $A_i$ et $A_{i+2}$ sont opposés lorsque $A_{i+1}$ s'annule quitte à changer le signe de $A_{i+2}$ en fonction du signe du coefficient dominant de $A_{i+1}$, de la parité de la différence des degrés et du signe du coefficient $gh^{1-\delta}$.

On définit $s(a)$ comme étant le nombre de changements de signes de la suite $A_i(a)$ en ignorant les 0. On a alors le

**Théorème 11** *Le nombre de racines réelles de $A_0 = P$ sur l'intervalle $]a, b]$ est égal à $s(a) - s(b)$.*

**Preuve**

Par continuité de la suite des polynômes, $s$ ne peut varier que si l'un des polynômes s'annule. On considére la suite des signes en un point : elle ne peut contenir deux 0 successifs (sinon toute la suite vaudrait 0 en ce point en appliquant (**??**), or $A_k$ est constant non nul). Elle ne peut pas non plus contenir +,0,+ ni -,0,- à cause de la

convention de signe sur les restes de (**??**). Donc une racine $b$ de $A_i$ pour $0 < i < k$, n'influe pas sur la valeur de $s$ au voisinage de $b$ (il y a toujours un changement de signe entre les positions $i-1$ et $i+1$). Comme $A_k$ est constant, seules les racines de $A_0 = P$ sont susceptibles de faire varier $s$. Comme $A_1 = P'$, le sens de variations de $A_0$ au voisinage d'une racine de $A_0$ est déterminé par le signe de $A_1$, donc les possibilités sont -,+ vers +,+ ou +,- vers -,-, ce qui diminue $s$ d'une unité.

```
purge(x);sturmab(x^3+7x-5,0,1)
```

$$\frac{1}{1073741824}, 1$$

## 7.3 Autres algorithmes

— On peut localiser les racines réelles par dichotomie : on sait que toutes les racines sont situées dans l'intervalle $[-C, C]$ avec $C = |P|_\infty/|\text{lcoeff}(P)|$. On coupe l'intervalle en deux, on calcule le nombre de racines dans chaque partie, et on continue en conservant uniquement les intervalles contenant au moins une racine. Lorsqu'un intervalle contient une seule racine, on passe à la dichotomie classique (changement de signe), ou à la méthode de Newton (avec évaluation exacte du polymôme et arrondi du dénominateur à une puissance de 2). C'est ce qui est utilisé par l'instruction `realroot` de Giac si on donne en argument optionnel `sturm`.

```
realroot(sturm,x^3+7x-5)
```

$$\left[\ \left[\frac{737889257265}{1099511627776}, \frac{368944628633}{549755813888}\right]\quad 1\ \right]$$

— Il existe un autre algorithme de localisation de racines réelles dû à **Vincent, Akritas et Strzebonski**, cf. la commande `realroot` de Xcas qui renvoie des flottants de type intervalle.

```
realroot(x^3+7x-5)
```

$$\left[\ [0.000000000000000..2.00000000000000]\quad 1\ \right]$$

Cet algorithme est très efficace pour donner des intervalles d'**isolation** des racines (sur lesquels on peut ensuite faire de la dichotomie). La base de cet algorithme utilise la règle des signes de Descartes

**Proposition 12** *Soit $P = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$, $r(P)$ le nombre de racines de $P$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, et $\sigma(P)$ le nombre de changements de signe de la suite des coefficients $a_n, ..., a_0$ de $P$. Alors $r(P) \leq \sigma(P)$.*

La preuve se fait par récurrence. Pour $n = 0$ on a bien $0 \leq 0$. Pour $n > 0$ on applique l'hypothèse de récurrence à $P'$ et on utilise le fait que 1+le nombre de racines de $P'$ sur un intervalle $]a, b[$ est supérieur ou égal au nombre de racines de $P$ sur $[a, b]$. Il y a deux cas possibles $\sigma(P') = \sigma(P)$ et $\sigma(P') = \sigma(P) - 1$. Dans le deuxième cas, comme $r(P') + 1 \geq r(P)$, alors $r(P) \leq r(P') + 1 \leq \sigma(P') + 1 = \sigma(P)$. Dans le premier cas, il faut trouver une racine supplémentaire pour $P'$. Pour cela, on regarde ce qui se passe en $0^+$. Supposons que $a_0 > 0$ pour fixer les idées, comme $a_0$ est du

même signe que $a_1$ (ou que $a_2$ si $a_1 = 0$ etc.), $P'$ est positif en $0^+$ donc $P$ croit en $0^+$, donc doit atteindre un maximum local avant la première racine de $P$, ce maximum local est une racine de $P'$.
On peut même montrer que $r(P)$ et $\sigma(P)$ sont de même parité. En particulier si $\sigma(P) = 1$, on a $r(P) = 1$ car le coefficient dominant et de plus bas degré non nul de $P$ sont de signes contraires, donc la valeur en 0 et la limite en $+\infty$ aussi.
On déduit de la règle des signes de Descartes un critère indiquant si un polynôme possède 0, 1 ou plus de racines sur $]0, 1[$ en se ramenant par changement de variables $x \leftarrow 1/x$ à $]1, +\infty[$ puis par $x \leftarrow x+1$ à $]0, +\infty[$. On prend alors le polynôme de départ et une majoration sur les racines, par exemple $C = |P|_\infty/|\text{lcoeff}(P)|$. Si $z$ est une racine positive de $P$, alors $z/C$ est une racine positive de $Q(x) := P(Cx)$, on est donc ramené a chercher des intervalles d'isolation de racines de $Q$ dans $]0, 1[$. S'il y a 0 ou 1 changement de signe, on conclut. Sinon, on teste si $1/2$ est racine puis on cherche dans $]0, 1/2[$ et dans $]1/2, 1[$, ce qui revient au problème précédent sur $]0, 1[$ avec les polynômes $R(x) = Q(x/2)$ et $S(x) = Q((x + 1)/2)$.
On fait de même sur $P(x = -x)$ pour les racines réelles négatives.

```
fonction descartes(P)
  local l,res,j;
  l:=coeffs(P);
  l:=remove(0,l);
  res:=0;
  pour j de 0 jusque dim(l)-2 faire
    si l[j]*l[j+1]<0 alors res++; fsi;
  fpour;
  return res;
ffonction:;

fonction isole01(P,a,b)
  // renvoie une liste d'intervalles d'isolation
  local n,m,Q,R,res;
  global x;
  Q:=x^degree(P)*P(x=1/x);
  R:=Q(x=x+1);
  n:=descartes(R);
  si n=0 alors return NULL; fsi;
  si n=1 alors return [a,b]; fsi;
  Q:=numer(P(x=x/2));
  R:=numer(P(x=(x+1)/2));
  m:=(a+b)/2;
  si P(x=1/2)=0 alors res:=(a+b)/2; sinon res:=NULL; fsi;
  res:=res,isole01(Q,a,m),isole01(R,m,b)
  retourne res;
ffonction:;
fonction isole(P) // racines positives de P
  local l,M;
  l:=coeffs(P);
```

```
  M:=ceil(maxnorm(l)/abs(l[0]))+1;
  P:=P(x=M*x);
  return isole01(P,0,M);
ffonction:;
```

Racines de $P$ dans $\mathbb{R}^{*+}$

```
P:=(x-1/3)*(x-3)*(x^2+1); descartes(P)
```

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)\left(x^2+1\right), 4$$

il y a 2 racines positives au moins. Racines de $P$ dans $]0,1[$

```
P1:=normal(x^degree(P)*P(x=1/x)); descartes
(P1(x=x+1))
```

$$x^4-\frac{10}{3}x^3+2x^2-\frac{10}{3}x+1, 1$$

Donc une racine dans $]0,1[$.

Isolation des racines positives de $P$ : on commence par se ramener à chercher les racines de $Q$ sur $]0,1[$ (il faudra les multiplier par $M$ à la fin)

```
M:=ceil(maxnorm(coeffs(P))/abs(lcoeff(P)
))+1;Q:=P(x=M*x)
```

$$5, \left(5x-\frac{1}{3}\right)(5x-3)\left((5x)^2+1\right)$$

```
P1:=normal(x^degree(Q)*Q(x=1/x)); descartes
(P1(x=x+1))
```

$$x^4-\frac{50}{3}x^3+50x^2-\frac{1250}{3}x+625, 4$$

Il y a plus que une racine, il faut découper en deux :

```
Q1:=Q(x=x/2); P1:=normal(x^degree(Q1)*Q1
(x=1/x)); descartes(P1(x=x+1))
```

$$\left(\frac{5}{2}x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x-3\right)\left(\left(\frac{5}{2}x\right)^2+1\right), x^4-\frac{25}{3}x^3+\frac{25}{2}x^2-\frac{625}{12}x+\frac{625}{16}, 1$$

donc il y a une racine de $Q$ dans $]0,1/2[$, donc de $P$ dans $]0,5/2[$

```
Q1:=Q(x=(x+1)/2); P1:=normal(x^degree(Q1
)*Q1(x=1/x)); descartes(P1(x=x+1))
```

$$\left(\frac{5}{2}(x+1)-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{2}(x+1)-3\right)\left(\left(\frac{5}{2}(x+1)\right)^2+1\right), -\frac{377}{48}x^4+\frac{50}{3}x^3+\frac{725}{8}x^2+\frac{625}{6}x+$$

donc il y a une racine de $Q$ dans $]1/2,1[$, donc de $P$ dans $]5/2,5[$.

```
normal(Q(x=1/2))
```

$$-\frac{377}{48}$$

$Q$ n'est pas nul en $1/2$, on conclut donc qu'il existe 2 racines positives pour $P$. Vérification avec `isole` :

```
isole(P);
```

$$\left[0,\frac{5}{2}\right], \left[\frac{5}{2},5\right]$$

L'algorithme VAS utilise ce type de résultat et des changements de variable homographique $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ pour isoler les racines.

— Les suites de Sturm se généralisent dans le plan complexe, on peut déterminer le nombre de racines contenues dans un rectangle du plan complexe (cf. par exemple l'article de Mickael Eiserman sur `www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm`). Malheureusement, il faut calculer une nouvelle suite de Sturm pour chaque rectangle (alors que dans $\mathbb{R}$ on peut réutiliser la même suite de Sturm). Ce qui est donc beaucoup plus couteux, en pratique on ne peut guère aller au-delà du degré 10 avec l'instruction `sturm` dans $\mathbb{C}$ (on peut montrer que la complexité asymptotique pour déterminer les racines avec une précision relative de $b$ bits est en $\tilde{O}(n^4b^2)$ mais ces complexités sont valides pour de grandes valeurs de $n$, pour des $n$ de quelques dizaines, l'arithmétique sur les entiers de taille $n$ est par exemple plus proche du cas naïf que de l'asymptotique).

— Une autre méthode dans le cas complexe, consiste à utiliser un hybride numérique-exact. Les racines d'un polynôme $Q$ sont aussi les valeurs propres complexes de sa matrice companion $M$. On factorise cette matrice sous forme de Schur $M = P^{-1}SP$ où $P$ est unitaire et S aux erreurs d'arrondis près diagonale supérieure avec éventuellement des blocs de taille 2 dans le cas réel correspondant à des couples de racines complexes conjuguées [1]. On lit alors des valeurs approchées des valeurs propres de $M$ sur la diagonale de $S$. Puis on applique la

**Proposition 13** *Le disque de centre $z$ et de rayon degre$(Q)|Q(z)/Q'(z)|$ contient au moins une racine de $Q$.*

En effet

$$\frac{Q'}{Q}(z) = \sum_k \frac{1}{z - z_k}$$

donc si $|z - z_k| >$degre$(Q)|Q(z)/Q'(z)|$ pour toutes les racines $z_k$ alors $|\frac{Q'}{Q}(z)| > |Q'(z)/Q(z)|$ contradiction.

On prend pour $z$ un rationnel complexe proche d'un coefficient diagonal de $M$, on calcule un minorant $m$ de $|Q'(z)/Q(z)|$ pour $z$ racine complexe approchée. On a alors au moins une racine de $Q$ dans le disque de centre $z$ et de rayon degre$(Q)/m$, Si les disques obtenus sont disjoints, on a ainsi une localisation certifiée des racines complexes.

```
Q:=randpoly(5); M:=companion(Q); P,S:=schur(M):; S
```

$$x^5-67x^4-28x^3+41x^2+52x-9,\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -52 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -41 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 67 \end{bmatrix},\ \text{"Done"},\ \begin{bmatrix} 0.947644039236 & -0.2 \\ 1.81374860992 \times 10^{-18} & -0.6 \\ 0.0 & 0.3 \\ -5.20179213767 \times 10^{-23} & 2.2021 \\ 1.23272814669 \times 10^{-16} & 1.5180 \end{bmatrix}$$

```
P*S*trn(P); P*trn(P);
```

1. cela se fait par une méthode itérative appelée algorithme de Francis. On pose $A_0$, la forme de Hessenberg de $M$, puis on factorise $A_n = QR$ par des symétries de Householder ou des rotations de Givens et on définit $A_{n+1} = RQ$, le calcul de $A_{n+1}$ en fonction de $A_n$ se fait sans expliciter la factorisation $QR$

$$\begin{pmatrix} -8.34546252244 \times 10^{-16} & -2.4476202857 \times 10^{-16} & 3.53883589099 \times 10^{-16} & 2.775 \\ 1.0 & 2.27216249288 \times 10^{-15} & 3.48679418671 \times 10^{-16} & -2.77 \\ -6.23386603026 \times 10^{-16} & 1.0 & 8.04911692853 \times 10^{-16} & -2.10 \\ -2.36691286891 \times 10^{-16} & -1.64766204153 \times 10^{-15} & 1.0 & 4.496 \\ 4.2614219106 \times 10^{-15} & -2.90678939252 \times 10^{-14} & -8.86270223877 \times 10^{-15} & \end{pmatrix}$$

```
l:=proot(Q); z:=exact(l[0]); evalf(degree
(Q)*Q(x=z)/Q'(x=z),20)
```

$$[-0.755213958983 - 0.57398202641\mathrm{i}, -0.755213958983 + 0.57398202641\mathrm{i}, 0.156584857849$$

On peut aussi utiliser l'arithmétique d'intervalles pour essayer de trouver un petit rectangle autour d'une racine approchée qui est conservé par la méthode de Newton $g(x) = x - f(x)/f'(x)$, le théorème du point fixe de Brouwer assure alors qu'il admet un point fixe qui n'est autre qu'une racine de $g$.

# Chapitre 8

# Exercices (PGCD, résultant, ...)

## 8.1 Instructions

Elles sont dans les menus Cmds->Integer et Cmds->Polynomes de `Xcas`.

### 8.1.1 Entiers

- `chrem` : restes chinois (entier)
- `divisors` (en maple `numtheory::divisors` : liste des diviseurs d'un entier
- `gcd, lcm` : PGCD et PPCM
- `igcdex` : Bézout pour des entiers
- `iquo` et `irem` quotient et reste de la division euclidienne de deux entiers
- `isprime` test de primalité. Utiliser `is_pseudoprime` pour effectuer un test plus rapide de pseudo-primalité.
- `mods` : reste euclidien symétrique
- `nextprime` et `prevprime` nombre premier suivant ou précédent
- `powmod(a,b,n)` calcul de $a^b \pmod n$ par l'algorithme de la puissance rapide

### 8.1.2 Polynômes

On peut représenter les polynômes par leur écriture symbolique (par exemple `x^2+1`), ou par des listes (représentation dense ou creuse, récursive ou distribuée). Xcas propose deux types de représentation, dense à une variable (`poly1[ ]`), ou distribuée (`%%%{ }%%%`) et des instructions de conversion (`poly2symb` et `symb2poly`) entre représentations. L'intérêt d'une représentation non symbolique est l'efficacité des opérations polynomiales, (et la possibilité de chronométrer des opérations comme le produit de 2 polynômes).

Les instructions qui suivent utilisent la représentation symbolique, certaines acceptent les autres représentations.

- `coeff` coefficient(s) d'un polynôme,
- `coeffs` liste des coefficients d'un polynôme (à développer auparavant, en mupad on utilise `coeff`)
- `content` contenu (pgcd des coefficients)
- `degree` degré

— `divide` division euclidienne,
— `gcd, lcm` PGCD et PPCM
— `gcdex` Bézout,
— `genpoly` : crée un polynôme à partir de la représentation $z$-adique d'un entier (utile pour le PGCD heuristique)
— `icontent` : contenu entier pour un polynôme à plusieurs variables
— `indets` : liste des noms de variables d'une expression
— `lcoeff` : coefficient dominant d'un polynôme
— `ldegree` : valuation
— `primpart` : partie primitive d'un polynôme
— `quo`, `rem` quotient et reste euclidien
— `tcoeff` : coefficient de plus bas degré d'un polynôme
— `interp` interpolation de Lagrange
— `convert(.,sqrfree)` décomposition en facteurs n'ayant pas de racine multiples
— `convert(.,parfrac)` décomposition en éléments simples
— `resultant` : calcule le résultant de 2 polynômes par rapport à une variable.
— `sturm~` : suites de Sturm, `sturmab` : nombre de racines dans un intervalle réel ou un rectangle du plan complexe.

Notez aussi que le menu `Exemples->poly->pgcd.xws` de Xcas contient des exemples de programmes de calcul de pgcd de type Euclide.

### 8.1.3 Calculs modulo $n$

Pour travailler dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$ :

— avec `Xcas` on utilise la notation % comme en C, par exemple `gcd(P % 3, Q % 3)`. On peut aussi utiliser la notation Maple en mode "syntaxe Maple" (cf. ci-dessous)
— en mode compatible Maple, on utilise les formes inertes des instructions (qui renvoient l'instruction non évaluée), dont le nom est le même que le nom de commande habituel mais précédé par une majuscule, puis on indique `mod n`, par exemple `Gcd(P,Q) mod 11`.

## 8.2 Exercices PGCD

1. Calculez le pgcd de $x^{202} + x^{101} + 1$ et sa dérivée modulo 3 et modulo 5. Conclusion ?
2. $P = 51x^3 - 35x^2 + 39x - 115$ et $Q = 17x^4 - 23x^3 + 34x^2 + 39x - 115$. Calculez le pgcd de $P$ et $Q$ modulo 5, 7 et 11. En déduire le pgcd de $P$ et $Q$ par le théorème des restes chinois. Pourquoi ne doit-on pas essayer modulo 17 ?
3. Écrire un programme qui détermine le degré probable du pgcd de 2 polynômes en une variable en utilisant le pgcd modulaire (on considère le degré probable déterminé lorsqu'on trouve deux nombres premiers réalisant le minimum des degrés trouvés)
4. Détaillez l'algorithme du PGCD heuristique pour les polynômes $P = (x + 1)^7 - (x - 1)^6$ et sa dérivée. Comparez avec l'algorithme d'Euclide naïf.
5. Écrire un programme mettant en oeuvre le pgcd heuristique pour des polynômes à une variable.
6. On veut comprendre comment un logiciel de calcul formel calcule

$$\int \frac{x^6 + 2}{(x^3 + 1)^2}\, dx$$

   On se ramène d'abord à une fraction propre (numérateur $N$ de degré inférieur au dénominateur), Soit $P = x^3 + 1$, calculez le PGCD de $P$ et $P'$, puis deux polynômes $U$ et $V$ tels que $N = UP + VP'$. On décompose alors l'intégrale en deux morceaux :

$$\int \frac{N}{P^2} = \int \frac{U}{P} + \int V \frac{P'}{P^2}$$

   Faites une intégration par parties sur le deuxième terme et en déduire la valeur de l'intégrale du départ.
7. Écrire un programme qui détermine le degré probable du PGCD par rapport à toutes les variables de 2 polynôme à plusieurs variables en utilisant l'évaluation en toutes les variables sauf une.
8. Calculer le pgcd par une méthode modulaire de $(xy - x + 1)(xy + x^2 + 1)$ et $(xy - x - y)(xy - x + 1)$
9. En utilisant uniquement l'instruction de calcul de PGCD déterminer la multiplicité maximale d'un facteur irréductible de $x^{14} - x^{13} - 14x^{12} + 12x^{11} + 78x^{10} - 54x^9 - 224x^8 + 116x^7 + 361x^6 - 129x^5 - 330x^4 + 72x^3 + 160x^2 - 16x - 32$
10. Donner le détail des calculs avec Bézout de la décomposition en éléments simples de :

$$\frac{1}{(x^2 - 1)^2(x + 2)}$$

    puis calculer le coefficient de $x^n$ du développement en séries entières de cette fraction en 0.

## 8.3 Exercice (Bézout modulaire)

Soit $A$ et $B$ deux polynômes à coefficients entiers et premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{Z}^*$ le résultant de $A$ et $B$, on va calculer les polynômes $U$ et $V$ de l'identité de Bézout

$$AU + BV = c, \quad \deg(U) < \deg(B), \deg(V) < \deg(A) \tag{8.1}$$

par une méthode modulaire.

1. Montrer, en utilisant les formules de Cramer, que les coefficients de $U$ et $V$ sont des entiers de valeur absolue inférieure ou égale à la borne de Hadamard $h$ de la matrice de Sylvester de $A$ et $B$ (dont le déterminant est $c$, le résultant de $A$ et $B$). Calculer $h$ en fonction de la norme euclidienne de $A$, $B$ et de leurs degrés.

2. On calcule $c \in \mathbb{Z}^*$ puis on résoud (**??**) dans $\mathbb{Z}/p_iZ[X]$ pour plusieurs nombres premiers $p_i$ (choisis si possible inférieurs à $\sqrt{2^{31}}$ pour des raisons d'efficacité), puis on calcule par le théorème des restes chinois (**??**) dans $\mathbb{Z}/\prod p_iZ[X]$. Donner une minoration de $\prod_i p_i$ faisant intervenir $h$ qui permette de garantir que l'écriture en représentation symétrique de (**??**) dans $\mathbb{Z}/\prod p_iZ[X]$ est identique à (**??**) dans $\mathbb{Z}[X]$.

3. Application : résoudre de cette manière l'équation de Bézout pour

$$A = (X+1)^4(X-3), \quad B = (X-1)^4(X+2)$$

(vous pouvez utiliser sans justifications l'instruction de calcul de résultant, des coefficients de Bézout dans $\mathbb{Z}/p_iZ[X]$ et de reste chinois de votre logiciel).

4. Écrire une fonction mettant en oeuvre cet algorithme.

5. Que pensez-vous de l'intérêt de cet algorithme par rapport à l'algorithme d'Euclide étendu dans $\mathbb{Z}[X]$ ?

## 8.4 Exercices (résultant)

1. Pour quelles valeurs de $p$ le polynôme $X^5 + X^3 - pX + 1$ admet-il une racine multiple ? Factoriser le polynôme pour cette valeur de $p$.
2. Résoudre le système en éliminant successivement les variables grâce au résultant :
$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 &= 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 6 \\ a + b + 2c &= 4 \end{cases}$$
3. Déterminer l'intersection de $xy = 4$ et $y^2 = (x-3)(x^2-16)$, repésenter graphiquement les courbes. Discuter la multiplicité et le nombre d'intersections.
Même question pour $(x-2)^2 + y^2 = 4$ et $y^2 = (x-3)(x^2-16)$.
4. Courbe paramétrique dépendant d'un paramètre : on considère la courbe $C_m$ dépendant du réel $m$ :
$$x(t) = \frac{t+m}{t^2+1+m^2}, \quad y(t) = \frac{t^2}{t-m}$$
Représenter la courbe pour quelques valeurs de $m$ (on pourra utiliser dans un niveau de géométrie, le menu Edit, Ajouter un paramètre pour créer un curseur représentant $m$, puis `plotparam`). Donner l'équation cartésienne de $C_m$. Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles la courbe admet un point singulier, représenter le graphe dans ce(s) cas et faire l'étude de la courbe.
5. Calculer
$$\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx$$
en utilisant le résultant pour calculer les logarithmes.
6. On cherche une relation algébrique entre les coordonnées de 4 points $A, B, C, D$ qui traduise le fait que ces 4 points sont cocycliques. Cette condition étant invariante par translation, on cherche une relation entre les 6 coordonnées des 3 vecteurs $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ et $v_3 = (x_3, y_3)$ d'origine $A$ et d'extrémité $B$, $C$ et $D$. On peut supposer quitte à translater que le centre du cercle est l'origine, on a donc 5 paramètres : le rayon du cercle $R$ et les 4 angles des points sur le cercle $\theta_0$, $\theta_1$, $\theta_2$ et $\theta_3$. La relation cherchée va s'obtenir en éliminant les 5 paramètres des expressions des 6 coordonnées en fonction de ces paramètres.
   (a) Exprimer les 6 coordonnées en fonction de $R$ et $a = \tan(\theta_0/2)$, $b = \tan(\theta_1/2)$, $c = \tan(\theta_2/2)$ et $d = \tan(\theta_3/2)$. On obtient ainsi 6 équations, par exemple les deux premières sont de la forme
   $$x_1 - F(R, a, b) = 0, \quad y_1 - G(R, a, b) = 0$$
   où $F$ et $G$ sont deux fractions rationnelles.
   (b) En réduisant au même dénominateur, calculer 6 polynômes, fonction de $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, R, a, b, c, d$, qui doivent s'annuler pour que les points soient cocycliques (Vous pouvez utiliser l'instruction `numer` pour obtenir le numérateur d'une fraction rationnelle).

(c) Éliminer $b$ des polynômes contenant $x_1$ et $y_1$ et factoriser le polynôme obtenu, faire de même avec $c$, $x_2$ et $y_2$ et $d$, $x_3$ et $y_3$, en déduire (en supposant que les points sont tous distincts) 3 polynômes en $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, R, a$ qui s'annulent.

(d) Éliminer $R$ et $a$, en déduire la relation cherchée.

(e) Vérifier que cette relation est équivalente à la nullité de la partie imaginaire du birapport des affixes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des 4 points :

$$\Im\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\frac{\delta-\gamma}{\delta-\beta}\right)=0$$

## 8.5 Décalage entier entre racines.

Soit $P$ un polynôme à coefficients entiers sans racines multiples. On dira que $P$ a la propriété $\mathcal{I}$ si deux des racines de $P$ sont décalées d'un entier. En d'autres termes, si $r_1, ..., r_n$ désignent les racines complexes distinctes de $P$, $P$ possède la propriété $\mathcal{I}$ s'il existe au moins un entier parmi les différences $r_i - r_j$ pour $i \neq j$.

1. Soit
$$R(t) = \text{resultant}_x(P(x), P(x+t))$$
Montrer que $R$ est à coefficients entiers. Montrer que la propriété $\mathcal{I}$ est équivalente à la propriété "$R$ possède une racine entière non nulle". On va maintenant construire un algorithme déterminant les racines entières du polynôme $R$.

2. Après division de $R$ par une puissance de $t$, on peut supposer que $R$ a un coefficient constant non nul. Après division de $R$ par son contenu, on peut aussi supposer que le contenu de $R$ est 1. En effectuant ensuite une factorisation square-free de $R$, on peut se ramener au cas où $R$ et $R'$ sont premiers entre eux. Soit $a$ une racine de $R$.
   (a) Donner une majoration de $|a|$ en fonction du coefficient constant de $R$.
   (b) Soit $p$ un nombre premier ne divisant pas le coefficient dominant de $R$ et tel que $R$ et $R'$ soient premiers entre eux modulo $p$. On peut calculer $a$ à partir d'une racine de $R$ modulo $p$ en la "remontant" modulo $p^k$ pour $k$ assez grand (algorithme p-adique). Pour quelle valeur de $k$ peut-on reconstruire toutes les racines entières de $R$ ?
   (c) Comparer l'algorithme ci-dessus avec les algorithmes suivants : la factorisation de $R$ sur $\mathbb{Z}$, la recherche numérique des racines complexes de $R$, la recherche des racines entières de $R$ parmi les diviseurs entiers du coefficient constant de $R$ et leurs opposés.

3. Une fois les racines entières de $R$ connues, comment peut-on en déduire les facteurs de $P$ dont les racines diffèrent de cet(ces) entier(s) ?

4. Soit
$$P(x) = x^6 + 9x^5 + 29x^4 + 41x^3 + 37x^2 + 59x + 31$$
Montrer que $P$ a la propriété $\mathcal{I}$. Calculer la ou les racines entières de $R$ et donner la factorisation correspondante de $P$.

5. Écrire un programme qui effectue cet algorithme sur un polynôme quelconque. On pourra utiliser la fonction `rationalroot` de Xcas pour déterminer les racines entières de $R$.

6. Application : on cherche à calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{-9x^2 - 27x - 30}{P(x)} \tag{8.2}$$

Décomposer cette fraction en éléments simples (donner le détail des calculs en utilisant la factorisation précédente et l'identité de Bezout `abcuv` en Xcas).

7. Calculer la somme précédente (**??**). On pourra remarquer que pour $k$ entier strictement positif, $\frac{1}{f(x+k)} - \frac{1}{f(x)}$ s'exprime comme une somme de différences $\frac{1}{f(x+j+1)} - \frac{1}{f(x+j)}$.

8. Écrire un programme effectuant ce calcul avec une fraction quelconque, lorsque cela est possible.

## 8.6 Exemple de correction de géométrie et résultant

```
e1:=x1-R*((1-b^2)/(1+b^2)-(1-a^2)/(1+a^2));
e2:=y1-R*(2b/(1+b^2)-2*a/(1+a^2));
e3:=x2-R*((1-c^2)/(1+c^2)-(1-a^2)/(1+a^2));
e4:=y2-R*(2c/(1+c^2)-2*a/(1+a^2));
e5:=x3-R*((1-d^2)/(1+d^2)-(1-a^2)/(1+a^2));
e6:=y3-R*(2d/(1+d^2)-2*a/(1+a^2));
f1:=factor(resultant(numer(e1),numer(e2),b)/
 (-4)/(a^2+1)^3/R^2);
f2:=factor(resultant(numer(e3),numer(e4),c)/
 (-4)/(a^2+1)^3/R^2);
f3:=factor(resultant(numer(e5),numer(e6),d)/
 (-4)/(a^2+1)^3/R^2);
g1:=factor(resultant(f1,f2,R));
g2:=resultant(f1,f3,R);
r:=factor(resultant(g1/(a^2+1),g2/(a^2+1),a));
eq1:=r[1,3,1];
eq2:=numer(im((-x1-i*y1)/(-x2-i*y2)*
 (x3-x2+i*(y3-y2))/(x3-x1+i*(y3-y1))));
normal(eq1-eq2);
```

# Chapitre 9

# Bases de Gröbner.

## 9.1 Ordre et réduction

L'anneau des polynômes à plusieurs variables n'a pas de division euclidienne. On est donc obligé d'utiliser des outils moins performants. La première chose à faire est de choisir un ordre total sur les monomes, compatible avec la multiplication des monômes ($a < b$ doit entrainer $ac < bc$) et tel que si un monôme $a$ divise un autre monôme $b$ alors $a < b$. Exemples d'ordres utilisés fréquemment (ce sont les 3 ordres proposés par les fonctions de Xcas) :

- l'**ordre lexicographique** `plex` $(a_1, a_2, .., a_n) > (b_1, ..., b_n)$ si $a_1 > b_1$ ou si $a_1 = b_1$ et $a_2 > b_2$ ou si $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ et $a_3 > b_3$, etc.
- le degré total `tdeg` : on commence par comparer le degré total, et en cas d'égalité on utilise l'ordre lexicographique
- `revlex` : on commence par comparer le degré total, et en cas d'égalité on renvoie le contraire de l'ordre lexicographique (attention, cela ne veut pas dire inverser l'ordre des variables !)

On remarque sur ces 3 exemples qu'il ne peut exister de suite strictement décroissante infinie pour l'ordre $>$. Lorsque le degré total est le premier critère, c'est évident, puisque le nombre de monomes $<$ à un monome donné est fini. Pour l'ordre lexicographique, on raisonne par l'absurde. On regarde d'abord le premier indice, comme la suite est décroissante, tous les monômes ont un indice inférieur ou égal au premier indice du premier monôme. On peut donc extraire une sous-suite strictement décroissante et infinie de monômes dont le 1er indice est constant. On passe alors au 2ème indice, et ainsi de suite jusqu'au dernier indice qui donne une contradiction. On fait donc dans la suite l'hypothèse qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante infinie pour l'ordre $>$.

On peut alors effectuer une sorte de remplacement de la division euclidienne de $A$ par $B$, appelée réduction qui consiste à comparer le terme dominant de $B$ au sens de l'ordre (noté $LT(B)$) aux monomes de $A$ par ordre décroissant, si l'un des monomes de $A$ a **toutes** ses puissances plus grandes que $LT(B)$, alors on élimine ce terme, disons $A_k$, en retranchant à $A$ le polynôme $A_k/LT(B)B$. Ceci ne modifie pas le début de $A$ jusqu'au monôme $A_k$. Les termes retranchés peuvent eux-même donner lieu à une réduction par $B$, par exemple $A_k/LT(B)B_2$ peut être divisible par $LT(B)$. Le procédé de réduction doit toutefois s'arrêter, sinon on pourrait construire une suite décroissante infinie pour l'ordre $>$ avec les $A_k$. On peut même diviser $A$ par plusieurs polynômes $B, C, ..$ en utilisant cet algorithme.

## 9.2 Idéaux

En dimension 1, les idéaux sont engendrés par un polynôme $P$ et c'est la division euclidienne par $P$ qui permet de savoir si on est dans l'idéal. En dimension plus grande, l'analogue est la base de Gröbner de l'idéal (relativement à un ordre monomial $<$) et on utilise la réduction par rapport aux polynômes de l'idéal pour savoir si on est dans l'idéal. On commence par montrer que les idéaux de monomes sont engendrés par les monômes minimaux, qui ne sont divisibles par aucun autre monôme de l'idéal. Supposons qu'ils soient en nombre infini. Considérons le premier indice des monomes, s'il est borné, on aura une infinité de monomes ayant le même indice, sinon on aura une suite infinie de monômes d'indice croissant, dans les deux cas on peut extraire une suite infinie dont la première composante est croissante au sens large. On fait le même raisonnement sur la suite extraite pour la 2ème composante, etc. et on aboutit à une suite infinie de monômes qui se divisent les uns les autres ce qui est absurde. Donc les monômes minimaux sont en nombre fini.

Une base de Gröbner s'obtient en prenant des polynômes correspondant aux monômes minimaux de l'idéal de monômes $LT(I)$ des coefficients dominants de $I$. La réduction par rapport aux éléments de cette base donne alors 0 pour tous les éléments de $I$, ce qui montre que $I$ est engendré par cette base.

On appelle **"s-polynôme"** d'une paire de polynômes $A$ et $B$ le polynôme obtenu en calculant le monôme PPCM $L$ de $LT(A)$ et $LT(B)$ et en créant la différence qui annule ce monôme PPCM $L/LT(A)A - L/LT(B)B$.

On peut montrer que la base de Gröbner peut se calculer à partir d'une famille génératrice en effectuant la boucle suivante : on calcule tous les s-polynômes de la famille génératrice courante, on les réduit par rapport à la famille génératrice courante, si tous les s-polynomes sont nuls la famille courante est la base cherchée, sinon on garde les s-polynômes réduits non nuls, on réduit la famille génératrice courante par rapport à ces s-polynômes réduits non nuls et on fusionne les polynômes non nuls en la famille génératrice courante pour l'itération suivante de la boucle.

Le problème est que cela devient très vite très long. Il existe des méthodes permettant d'accélérer l'algorithme, par exemple on peut savoir à l'avance qu'un s-polynôme se réduit à 0 (règles de Gebauer-Möller) il est donc inutile de le calculer. On peut aussi précalculer tous les multiples des polynômes par rapport auxquels on réduit et réduire simultanément tous les polynômes à réduire en ramenant la réduction à un algorithme de pivot de Gauß (c'est la partie algèbre linéaire de l'algorithme F4). L'ordre choisi est aussi très important pour l'efficacité. Enfin, pour le cas des coefficients entiers, des méthodes modulaires permettent d'accélérer les calculs. Xcas implémente un algorithme modulaire très compétitif pour l'ordre `revlex`, présenté dans l'article en anglais qui suit.

Les instructions Xcas correspondantes sont `gbasis, greduce`.

## 9.3 Introduction

During the last decades, considerable improvements have been made in CAS like Maple or specialized systems like Magma, Singular, Cocoa, Macaulay... to compute Groebner basis. They were driven by implementations of new algorithms

speeding up the original Buchberger ([**?**]) algorithm : Gebauer and Möller criterion ([**?**]), F4 and F5 algorithms from J.-C. Faugère ([**?**], [**?**]), and are widely described in the literature if the base field is a finite field. Much less was said about computing over $\mathbb{Q}$. It seems that implementers are using the same algorithm as for finite fields, this time working with coefficients in $\mathbb{Q}$ or in $\mathbb{Z}$ (sometimes with fast integer linear algebra), despite the fact that an efficient p-adic or Chinese remaindering algorithm were described as soon as in year 2000 by E. Arnold ([**?**]). The reason might well be that these modular algorithms suffer from a time-consuming step at the end : checking that the reconstructed Groebner basis is indeed the correct Groebner basis.

Section **??** will show that if one accepts a small error probability, this check may be fast, so we can let the user choose between a fast conjectural Groebner basis to make his own conjectures and a slower certified Groebner basis once he needs a mathematical proof.

Section **??** will explain learning, a process that can accelerate the computation of a Groebner basis modulo a prime $p_k$ once the same computation but modulo another prime $p$ has already been done ; learning is an alternative to the F5 algorithm in order to avoid computing useless critical pairs that reduce to 0. The idea is similar to `F4remake` by Joux-Vitse ([**?**]) used in the context of computing Groebner basis in large finite fields.

Section **??** will show in more details how the gbasis algorithm is implemented in Giac/Xcas ([**?**]) and show that - at least for the classical academic benchmarks Cyclic and Katsura - the deterministic modular algorithm is competitive or faster than the best open-source implementations and the modular probabilistic algorithm is comparable to Maple and slower than Magma on one processor (at least for moderate integer coefficient size) and may be faster than Magma on multi-processors, while computation modulo $p$ are faster for characteristics in the 24-31 bits range. Moreover the modular algorithm memory usage is essentially twice the memory required to store the basis on $\mathbb{Q}$, sometimes much less than the memory required by other algorithms.

## 9.4 Checking a reconstructed Groebner basis

Let $f_1, .., f_m$ be polynomials in $\mathbb{Q}[x_1, .., x_n]$, $I =< f_1, ..., f_m >$ be the ideal generated by $f_1, ..., f_n$. Without loss of generality, we may assume that the $f_i$ have coefficients in $\mathbb{Z}$ by multiplying by the least common multiple of the denominators of the coefficients of $f_i$. We may also assume that the $f_i$ are primitive by dividing by their content.

Let $<$ be a total monomial ordering (for example `revlex` the total degree reverse lexicographic ordering). We want to compute the Groebner basis $G$ of $I$ over $\mathbb{Q}$ (and more precisely the inter-reduced Groebner basis, sorted with respect to $<$). Now consider the ideal $I_p$ generated by the same $f_i$ but with coefficients in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ for a prime $p$. Let $G_p$ be the Groebner basis of $I_p$ (also assumed to be inter-reduced, sorted with respect to $<$, and with all leading coefficients equal to 1).

Assume we compute $G$ by the Buchberger algorithm with Gebauer and Möller criterion, and we reduce in $\mathbb{Z}$ (by multiplying the s-poly to be reduced by appro-

priate leading coefficients), if no leading coefficient in the polynomials are divisible by $p$, we will get by the same process but computing modulo $p$ the $G_p$ Groebner basis. Therefore the computation can be done in parallel in $\mathbb{Z}$ and in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ except for a finite set of *unlucky* primes (since the number of intermediate polynomials generated in the algorithm is finite). If we are choosing our primes sufficiently large (e.g. about $2^{31}$), the probability to fall on an unlucky prime is very small (less than the number of generated polynomials divided by about $2^{31}$, even for really large examples like Cyclic9 where there are a few $10^4$ polynomials involved, it would be about `1e-5`).

The Chinese remaindering algorithm is as follow : compute $G_p$ for several primes, for all primes that have the same leading monomials in $G_p$ (i.e. if coefficient values are ignored), reconstruct $G_{\prod p_j}$ by Chinese remaindering, then reconstruct a candidate Groebner basis $G_c$ in $\mathbb{Q}$ by Farey reconstruction. Once it stabilizes, do the checking step described below, and return $G_c$ on success.

**Checking step** : check that the original $f_i$ polynomials reduce to 0 with respect to $G_c$ and check that $G_c$ is a Groebner basis.

**Théorème 14** *(Arnold, Greuel and Pfister) If the checking step succeeds, then $G_c$ is the Groebner basis of $I$.*

This is a consequence of ideal inclusions (first check) and dimensions (second check), for a complete proof, see [**?**] and theorem 7.5.1 in Greuel,G.-M., Pfister,G., 2007, A Singular Introduction to Commutative Algebra, Springer.

**Probabilistic checking algorithm** : instead of checking that s-polys of critical pairs of $G_c$ reduce to 0, check that the s-polys reduce to 0 modulo several primes that do not divide the leading coefficients of $G_c$ and stop as soon as the inverse of the product of these primes is less than a fixed $\varepsilon > 0$.

**Deterministic checking algorithm** : check that all s-polys reduce to 0 over $\mathbb{Q}$. This can be done either by integer computations (or even by rational computations, I have not tried that), or by reconstruction of the quotients using modular reduction to 0 over $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ for sufficiently many primes. Once the reconstructed quotients stabilize, we can check the 0-reduction identity, and this can be done without computing the products quotients by elements of $G_c$ if we have enough primes (with appropriate bounds on the coefficients of $G_c$ and the lcm of the denominators of the reconstructed quotients).

## 9.5 Speeding up by learning from previous primes

Once we have computed a Groebner basis modulo an initial prime $p$, if $p$ is not an unlucky prime, then we can speedup computing Groebner basis modulo other lucky primes. Indeed, if one s-poly reduce to 0 modulo $p$, then it reduces most certainly to 0 on $\mathbb{Q}$ (non zero s-poly have in general several terms, cancellation of one term mod $p$ has probability $1/p$, simultaneous cancellation of several terms of a non-zero s-poly modulo $p$ is highly improbable), and we discard this s-poly in the next primes computations. We name this speedup process *learning*. It can also be applied on other parts of the Groebner basis computation, like the symbolic preprocessing of the F4 algorithm, where we can reuse the same collection of monomials that were used for the first prime $p$ to build matrices for next primes (see Buchberger Algorithm with F4 linear algebra in the next section).

If we use learning, we have no certification that the computation ends up with a Groebner basis modulo the new primes. But this is not a problem, since it is not required by the checking correctness proof, the only requirement is that the new generated ideal is contained in the initial ideal modulo all primes (which is still true) and that the reconstructed $G_c$ is a Groebner basis.

## 9.6 Giac/Xcas implementation and experimentation

We describe here briefly some details of the Giac/Xcas gbasis implementation and give a few benchmarks.

The optimized algorithm runs with revlex as $<$ ordering if the polynomials have at most 15 variables (it's easy to modify for more variables, adding multiples of 4, but this will increase a little memory required and slow down a little). Partial and total degrees are coded as 16 bits integers (hence the 15 variables limit, since 1 slot of 16 bits is kept for total degree). Modular coefficients are coded as 31 bit integers (or 24).

The Buchberger algorithm with linear algebra from the F4 algorithm is implemented modulo primes smaller than $2^{31}$ using total degree as selection criterion for critical pairs.

**Buchberger algorithm with F4 linear algebra modulo a prime**

1. Initialize the basis to the empty list, and a list of critical pairs to empty
2. Add one by one all the $f_i$ to the basis and update the list of critical pairs with Gebauer and Möller criterion, by calling the gbasis update procedure (described below step 9)
3. Begin of a new iteration :
   All pairs of minimal total degree are collected to be reduced simultaneously, they are removed from the list of critical pairs.
4. The symbolic preprocessing step begins by creating a list of monomials, gluing together all monomials of the corresponding s-polys (this is done with a heap data structure).
5. The list of monomials is "reduced" by division with respect to the current basis, using heap division (like Monagan-Pearce [**?**]) without taking care of the real value of coefficients. This gives a list of all possible remainder monomials and a list of all possible quotient monomials and a list of all quotient times corresponding basis element monomial products. This last list together with the remainder monomial list is the list of all possible monomials that may be generated reducing the list of critical pairs of maximal total degree, it is ordered with respect to $<$. We record these lists for further primes during the first prime computation.
6. The list of quotient monomials is multiplied by the corresponding elements of the current basis, this time doing the coefficient arithmetic. The result is recorded in a sparse matrix, each row has a pointer to a list of coefficients (the list of coefficients is in general shared by many rows, the rows have the same reductor with a different monomial shift), and a list of monomial indices (where the index is relative to the ordered list of possible monomials). We sort the matrix by decreasing order of leading monomial.

7. Each s-polynomial is written as a dense vector with respect to the list of all possible monomials, and reduced with respect to the sparse matrix, by decreasing order with respect to $<$. (To avoid reducing modulo $p$ each time, we are using a dense vector of 128 bits integers on 64 bits architectures, and we reduce mod $p$ only at the end of the reduction. If we work on 24 bit signed integers, we can use a dense vector of 63 bits signed integer and reduce the vector if the number of rows is greater than $2^{15}$).
8. Then inter-reduction happens on all the dense vectors representing the reduced s-polynomials, this is dense row reduction to echelon form (0 columns are removed first). Care must be taken at this step to keep row ordering when learning is active.
9. gbasis update procedure
   Each non zero row will bring a new entry in the current basis (we record zero reducing pairs during the first prime iteration, this information will be used during later iterations with other primes to avoid computing and reducing useless critical pairs). New critical pairs are created with this new entry (discarding useless pairs by applying Gebauer-Möller criterion). An old entry in the basis may be removed if it's leading monomial has all partial degrees greater or equal to the leading monomial corresponding degree of the new entry. Old entries may also be reduced with respect to the new entries at this step or at the end of the main loop.
10. If there are new critical pairs remaining start a new iteration (step 3). Otherwise the current basis is the Groebner basis.

**Modular algorithm**

1. Set a list of reconstructed basis to empty.
2. Learning prime : Take a prime number of 31 bits or 29 bits for pseudo division, run the Buchberger algorithm modulo this prime recording symbolic preprocessing data and the list of critical pairs reducing to 0.
3. Loop begin : Take a prime of 29 bits size or a list of $n$ primes if $n$ processors are available. Run the Buchberger algorithm. Check if the output has the same leading terms than one of the chinese remainder reconstructed outputs from previous primes, if so combine them by Chinese remaindering and go to step 4, otherwise add a new entry in the list of reconstructed basis and continue with next prime at step 3 (clearing all learning data is probably a good idea here).
4. If the Farey $\mathbb{Q}$-reconstructed basis is not identical to the previous one, go to the loop iteration step 3 (a fast way to check that is to reconstruct with all primes but the last one, and check the value modulo the last prime). If they are identical, run the final check : the initial polynomials $f_i$ must reduce to 0 modulo the reconstructed basis and the reconstructed basis s-polys must reduce to 0 (this is done on $\mathbb{Q}$ either directly or by modular reconstruction for the deterministic algorithm, or checked modulo several primes for the probabilistic algorithm). On success output the $\mathbb{Q}$ Groebner basis, otherwise continue with next prime at step 3.

**Benchmarks**

Comparison of giac (1.1.0-26) with Singular 3.1 from sage 5.10 [1] on Mac OS X.6, Dual Core i5 2.3Ghz, RAM 2*2Go :

- Mod timings were computed modulo `nextprime(2^24)` and modulo 1073741827 (`nexprime(2^30)`).
- Probabilistic check on $\mathbb{Q}$ depends linearly on log of precision, two timings are reported, one with error probability less than `1e-7`, and the second one for `1e-16`.
- Check on $\mathbb{Q}$ in giac can be done with integer or modular computations hence two times are reported.
- >> means timeout (3/4h or more) or memory exhausted (Katsura12 modular `1e-16` check with giac) or test not done because it would obviously timeout (e.g. Cyclic8 or 9 on $\mathbb{Q}$ with Singular)

| | giac mod $p$ 24, 31 bits | giac run2 | singular mod $p$ | giac $\mathbb{Q}$ prob. `1e-7`, `1e-16` | giac $\mathbb{Q}$ certified | singular std $\mathbb{Q}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cyclic7 | 0.5, 0.58 | 0.1 | 2.0 | 3.5, 4.2 | 21, 29.3 | >2700 |
| Cyclic8 | 7.2, 8.9 | 1.8 | 52.5 | 103, 106 | 258, 679 | » |
| Cyclic9 | 633, 1340 | 200 | ? | 1 day | » | » |
| Kat8 | 0.063, 0.074 | 0.009 | 0.2 | 0.33, 0.53 | 6.55, 4.35 | 4.9 |
| Kat9 | 0.29, 0.39 | 0.05 | 1.37 | 2.1, 3.2 | 54, 36 | 41 |
| Kat10 | 1.53, 2.27 | 0.3 | 11.65 | 14, 20.7 | 441, 335 | 480 |
| Kat11 | 10.4, 13.8 | 2.8 | 86.8 | 170, 210 | 4610 | ? |
| Kat12 | 76, 103 | 27 | 885 | 1950, RAM | RAM | » |
| alea6 | 0.83, 1.08 | .26 | 4.18 | 202, 204 | 738, » | >1h |

This leads to the following observations :

- Computation modulo $p$ for 24 to 31 bits is faster that Singular, but seems also faster than magma (and maple). For smaller primes, magma is 2 to 3 times faster.
- The probabilistic algorithm on $\mathbb{Q}$ is much faster than Singular on these examples. Compared to maple16, it is reported to be faster for Katsura10, and as fast for Cyclic8. Compared to magma, it is about 3 to 4 times slower.
- If [**?**] is up to date (except about giac), giac is the third software and first open-source software to solve Cyclic9 on $\mathbb{Q}$. It requires 378 primes of size 29 bits, takes a little more than 1 day, requires 5Gb of memory on 1 processor, while with 6 processors it takes 8h30 (requires 16Gb). The answer has integer coefficients of about 1600 digits (and not 800 unlike in J.-C. Faugère F4 article), for a little more than 1 milliion monomials, that's about 1.4Gb of RAM.
- The deterministic modular algorithm is much faster than Singular for Cyclic examples, and as fast for Katsura examples.
- For the random last example, the speed is comparable between magma and giac. This is where there are less pairs reducing to 0 (learning is not as efficient as for Cyclic or Katsura) and larger coefficients. This would suggest that advanced algorithms like f4/f5/etc. are probably not much more efficient than Buchberger algorithm for these kind of inputs without symmetries.
- Certification is the most time-consuming part of the process (except for Cy-

1. Singular has also a modular implementation in `modstd.lib`, but it is not called by default.

clic8). Integer certification is significantly faster than modular certification for Cyclic examples, and almost as fast for Katsura.

Example of Giac/Xcas code :

```
alea6 := [5*x^2*t+37*y*t*u+32*y*t*v+21*t*v+55*u*v,
39*x*y*v+23*y^2*u+57*y*z*u+56*y*u^2+10*z^2+52*t*u*v,
33*x^2*t+51*x^2+42*x*t*v+51*y^2*u+32*y*t^2+v^3,
44*x*t^2+42*y*t+47*y*u^2+12*z*t+2*z*u*v+43*t*u^2,
49*x^2*z+11*x*y*z+39*x*t*u+44*x*t*u+54*x*t+45*y^2*u,
48*x*z*t+2*z^2*t+59*z^2*v+17*z+36*t^3+45*u];
l:=[x,y,z,t,u,v];
p1:=prevprime(2^24); p2:=prevprime(2^29);
time(G1:=gbasis(alea6
time(G2:=gbasis(alea6
threads:=2; // set the number of threads you want to use
// debug_infolevel(1); // uncomment to show intermediate steps
proba_epsilon:=1e-7; // probabilistic algorithm.
time(H0:=gbasis(alea6,indets(cyclic5),revlex));
proba_epsilon:=0; // deterministic
time(H1:=gbasis(alea6,indets(cyclic5),revlex));
time(H2:=gbasis(alea6,indets(cyclic5),revlex,modular_check));
size(G1),size(G2),size(H0),size(H1),size(H2);
write("Halea6",H0);
```

Note that for small examples (like Cyclic5), the system performs always the deterministic check (this is the case if the number of elements of the reconstructed basis to 50).

## 9.7 Conclusion

I have described some enhancements to a modular algorithm to compute Groebner basis over $\mathbb{Q}$ which, combined to linear algebra from F4, gives a sometimes much faster open-source implementation than state-of-the-art open-source implementations for the deterministic algorithm. The probabilistic algorithm is also not ridiculous compared to the best publicly available closed-source implementations, while being much easier to implement (about 10K lines of code, while Fgb is said to be 200K lines of code, no need to have highly optimized sparse linear algebra).

This should speed up conjectures with the probabilistic algorithm and automated proofs using the deterministic algorithm (e.g. for the Geogebra theorem prover [**?**]), either using Giac/Xcas (or one of it's interfaces to java and python) or adapting it's implementation to other open-source systems. With fast closed-source implementations (like maple or magma), there is no certification that the result is a Groebner basis : there might be some hidden probabilistic step somewhere, in integer linear system reduction for example. I have no indication that it's the case but one can never know if the code is not public, and at least for my implementation, certification might take a lot more time than computation.

There is still room for additions and improvements

— the checking step can certainly be improved using knowledge on how the basis element modulo $p$ where built.

— checking could also benefit from parallelization.
— As an alternative to the modular algorithm, a first learning run could be done modulo a 24 bits prime, and the collected info used for f4 on $\mathbb{Q}$ as a probabilistic alternative to F5.
— FGLM conversion is still not optimized and therefore slow in Giac/Xcas,

**Acknowledgements**
Thanks to Frédéric Han for interfacing giac with Python. Thanks to Vanessa Vitse for insightfull discussions.

## 9.8 Représentation rationnelle univariée (rur).

Lorsqu'on résoud un système polynomial, on a (en général) autant d'équations que d'inconnues et en principe un nombre fini de solutions. On peut utiliser une base de Groebner dans l'ordre lexicographique, résoudre par rapport à la dernière variable, puis remonter, mais d'une part le calcul d'une base de Groebner dans l'ordre lexicographique est significativement plus long que dans l'ordre revlex, et d'autre part il faut calculer des PGCD et factoriser des polynômes sur des extensions algébriques dont la taille peut augmenter au fur et à mesure que l'on remonte (ou faire des calculs approchés...). Il serait plus intéressant de calculer d'un seul coup une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ qui permette d'exprimer toutes les variables. Ceci peut se faire si on arrive à trouver une forme linéaire en les variables qui sépare les solutions (la valeur de la forme est distincte si les points solutions sont distincts). On rajoute cette variable et on résoud l'équation obtenue en cette variable, pour chaque solution on aura une unique solution en remontant les autres variables. La représentation univariée rationnelle fait précisément cela, et donne même les autres variables comme polynôme en la forme linéaire séparante.

La présentation classique de la représentation univariée rationnelle utilise des calculs de trace (cf. par exemple le rapport de l'Inria 1998 de Fabrice Rouillier), l'algorithme implémenté dans Giac/Xcas (versions 1.1.1 et ultérieures) est un algorithme modulaire. On commence par se ramener au cas d'un idéal radical (c'est-à-dire que les points solutions du système sont de multiplicité 1) en ajoutant aux générateurs de l'idéal les parties squarefree des polynômes minimaux de toutes les variables. Pour un idéal radical, on montre qu'il existe une forme linéaire séparante, le degré du polynôme minimal de cette forme linéaire séparante est exactement égal à la dimension du quotient de l'anneau de polynômes par l'idéal radical. On peut donc tester si une forme linéaire est séparante en calculant son polynôme minimal. En pratique, on commence par calculer une base de Groebner pour l'ordre revlex (le plus efficace). On génère la liste des monomes du quotient en commençant par majorer les degrés en chacune des variables, puis on élimine parmi les monomes possibles ceux qui sont divisibles par le monome dominant d'un élément de la base de Groebner. On calcule ensuite la classe d'un polynôme dans le quotient en effectuant une réduction par la base de Groebner, on obtient un vecteur de coordonnées dans cette base de monome. Le calcul du polynôme minimal d'une forme linéaire devient ainsi un problème d'algèbre linéaire. Le calcul de chaque variable en fonction des puissances d'une forme linéaire séparante est également un problème d'algèbre linéaire (on le fait simultanément pour toutes les variables, si on veut optimiser on peut même faire une décomposition LU lors du calcul du

polynôme minimal et la réutiliser). Pour éviter les problèmes de croissance de coefficients dans les calculs intermédiaires, ce calcul est effectué modulo plusieurs nombres premiers dans giac, jusqu'à pouvoir reconstruire par les restes chinois le polynôme minimal de la forme séparante sur $\mathbb{Q}$ et les expressions des variables comme polynôme de la forme séparante (on n'a alors pas besoin de reconstruire la base de Groebner sur $\mathbb{Q}$). Bien entendu, il faut traiter le cas des mauvaises réductions, pour cela on regarde si les monomes de la base du quotient de l'anneau par l'idéal sont indépendants du nombre premier choisi, en cas de différence, il faut conserver le nombre premier correspondant à la liste de monômes la plus grande (l'autre nombre premier est de mauvaise réduction), ou rejeter les deux nombres premiers si aucune des deux listes de monomes ne contient l'autre.

Les fonctions `solve`, `fsolve` et `cfsolve` utilisent cet algorithme pour des systèmes polynomiaux qui s'y prêtent (en cherchant une forme séparante d'abord parmi les variables puis avec des combinaisons linéaires aléatoires à petits coefficients entiers), `solve` essaie de renvoyer des solutions exactes si le polynome minimal de la forme linéaire séparante se factorise sur $\mathbb{Q}$, `fsolve` (en mode réel) localise les racines réelles par la méthode d'Akritas, `cfsolve` localise les racines complexes par factorisation de Schur de la matrice companion. La fonction `gbasis(eqs,vars,rur)` avec comme paramètre optionnel `rur` effectue le calcul de la représentation univariée rationnelle et renvoie une liste contenant le polynôme minimal $P$ (exprimée arbitrairement en fonction de la 1ère variable du système), sa dérivee $P'$ et les $P_1, ..., P_n$ qui permettent d'exprimer la $i$-ème variable d'une solution comme étant $P_i(r)/P'(r)$ avec $r$ racine de $P$. On peut alors vérifier que l'on a bien une solution en remplaçant la variable $x_i$ par $P_i/P'$ dans les équations, le reste de la division euclidienne du numérateur de la fraction obtenue par le polynome minimal $P$ doit donner 0.

Exemple :

```
syst:=[x^2-y^2-1,x^3+y^3-x*y-5];fsolve(syst,[x,y])
```

$$\left[x^2-y^2-1, x^3+y^3-xy-5\right], \begin{bmatrix} 1.685565774888 & 1.35688318638 \\ 1.767095935129 & -1.45692417234 \\ -3.19046847532 & 3.02970115556 \end{bmatrix}$$

Calcul en mode pas à pas :

```
G:=gbasis(syst,[x,y],rur)
```

$$\left[\mathrm{rur}, y, -y^5+2y^4+3y^3+2y^2-y-12, -5y^4+8y^3+9y^2+4y-1, y^4+10y^3-9y^2+16y+7, -\right.$$

l'élément d'indice 1 est la forme linéaire séparante, en indice 2, le polynôme minimal de l'élément séparant exprimé en fonction de $x$, en indice 3 sa dérivée qui sera le dénominateur commun de la solution, en indices de 4 à la fin le numérateur de la solution en fonction de $x$

```
d:=G[3];[G[4]/d,G[5]/d]; G[2]
```

$$-5y^4+8y^3+9y^2+4y-1, \left[\frac{y^4+10y^3-9y^2+16y+7}{-5y^4+8y^3+9y^2+4y-1}, \frac{-2y^4-6y^3-6y^2+4y+60}{-5y^4+8y^3+9y^2+4y-1}\right], -y^5+2y^4+3$$

On vérifie :

```
N:=numer(normal(subst(syst,[x,y],[G[4]/d,G
[5]/d])))
```

$\left[-28y^8+76y^7+48y^6-308y^5+512y^4+564y^3+836y^2-248y-3552,-608y^{12}+3156y^{11}-1396y^{10}-71\right.$

```
rem(N[0],G[2]); rem(N[1],G[2])
```

$$0,0$$

On trouve les solutions approchées

```
S:=proot(G[2]);subst([G[4]/d,G[5]/d],x=S[0])
```

$[-1.45692417234,-0.4648300848-1.33697104174\mathrm{i},-0.4648300848+1.33697104174\mathrm{i},1.35688318638,3.029$

La représentation rationnelle univariée a des applications au-delà de la seule résolution de systèmes polynomiaux. On peut s'en servir pour trouver une extension algébrique unique de $\mathbb{Q}$ permettant de calculer toutes les racines d'un polynôme, il suffit de poser le système formé par les relations racines-coefficients de ce polynôme et d'en chercher la représentation rationnelle univariée, cf. la section **??**. On peut également s'en servir pour trouver une **extension algébrique** unique contenant plusieurs extensions de $\mathbb{Q}$ dont on a le polynôme minimal. Par exemple pour travailler dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}]$, on pose
`G:=gbasis([a^2-2,b^2-3,c^2-5],[a,b,c],rur)`,
on a alors $\pm\sqrt{2}$ =`rootof(G[4],G[2])/rootof(G[3],G[2])`,
$\pm\sqrt{3}$ =`rootof(G[5],G[2])/rootof(G[3],G[2])`,
$\pm\sqrt{5}$ =`rootof(G[6],G[2])/rootof(G[3],G[2])`
(on peut utiliser `normal` ou `evalf` pour décider du signe).

# Chapitre 10

# Courbes paramétriques et polaires

## 10.1 Introduction

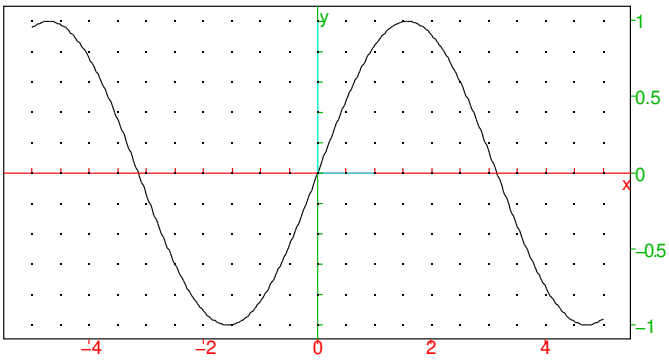
Le graphe d'une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ($I$ un intervalle) est un exemple de courbe du plan, mais il n'est pas assez général pour représenter tous les types de courbe du plan, par exemple un segment de droite vertical, ou un cercle, car deux points distincts d'un graphe doivent avoir des abscisses différentes. D'autre part, il apparait naturellement d'autres types de courbes que les graphes de fonction, par exemple la trajectoire d'un mobile dans le plan dont les coordonnées $x, y$ dépendent du temps (selon une équation différentielle ou un système différentiel), ce sont les courbes paramétriques, ou des courbes vérifiant une équation cartésienne (par exemple en géométrie le cercle $x^2 + y^2 = 1$, ou en cinématique des courbes de niveau de l'énergie totale dans le plan position-impulsion) ce sont les courbes implicites.

Dans cette section, on va étudier les courbes en paramétriques, donnée par un couple de fonctions $(x(t), y(t))$ définies pour $t$ dans un sous-ensemble des réels et à valeurs dans $\mathbb{R}$. (Ceci ne restreint pas trop la généralité, on peut montrer sous des hypothèses assez générales que l'allure locale d'une courbe implicite est identique à celle d'une courbe paramétrique, sauf en certains points dits singuliers, c'est le théorème des fonctions implicites).

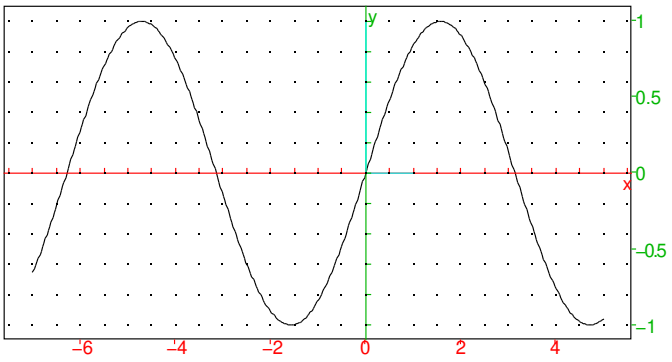
Exemples :

— le graphe d'une fonction $y = f(x)$ est une courbe paramétré d'équation $(x(t), y(t)) = (t, f(t))$ ($x$ est le temps). On aurait aussi pu choisir $(x(t), y(t)) = (t - 1, f(t - 1))$ (ce qui revient à changer l'origine des temps) ou d'autres paramétrages. Exemple :

```
plotfunc(sin(x))
```

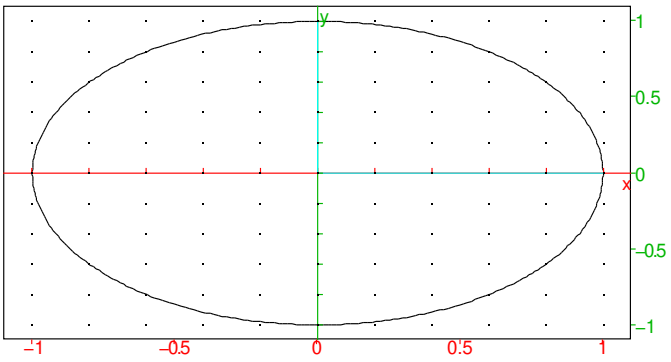



```
plotparam([t-1,sin(t-1)],t)
```

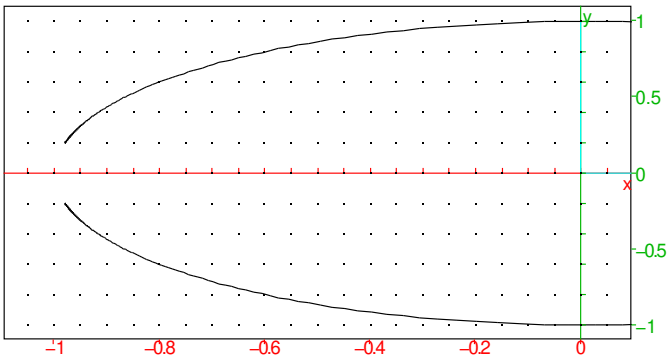



— une droite d'équation $y = ax + b$ est le graphe d'une fonction, donc paramétrable comme ci-dessus. Une droite verticale $x = a$ peut se paramétrer par $(x(t), y(t)) = (a, t)$

— le cercle de centre l'origine et de rayon 1 peut se paramétrer par $(x(t), y(t)) = (\cos(t), sin(t)), t \in [0, 2\pi[$. On peut bien sur le paramétrer par $t \in \mathbb{R}$, mais dans ce cas on parcourt plusieurs fois le cercle (périodicité). On peut aussi paramétrer tout le cercle sauf un point avec le paramétrage rationnel $(x(t), y(t)) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}), t \in \mathbb{R}$. Ce paramétrage permet de calculer plus facilement des points du cercle, mais contrairement au paramétrage trigonométrique, il n'est pas "uniforme".
Exemple
`plotparam([cos(t),sin(t)],t=0..2*pi)`

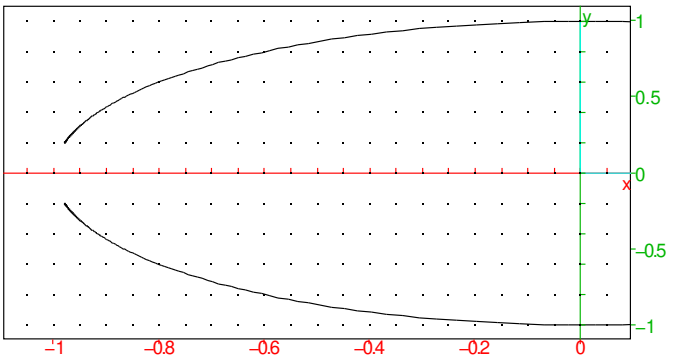



```
plotparam([(1-t^2)/(1+t^2),2t/(1+t^2)],t=-10..10)
```




ou avec les nombres complexes

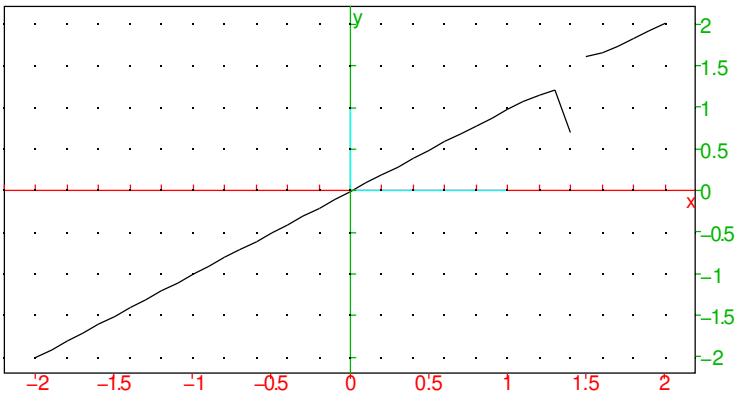
```
plotparam((1+i*t)/(1-i*t),t=-10..10)
```




## 10.2 Représentation graphique

La plupart des calculatrices graphiques et de nombreux logiciels de maths permettent de représenter graphiquement un arc de courbe en donnant des valeurs extrêmes $t_-$ et $t_+$ (souvent notées `tmin` et `tmax`) et un pas $\Delta t$ (`tstep`). Le logiciel évalue la valeur de $x(t)$ et $y(t)$ en $t_-$, $t_- + \Delta t$, $t_- + 2\Delta t$, ... puis relie les points de la courbe obtenue par des segments (parfois avec des autres arcs de courbes). La plupart du temps cela donne une bonne idée de la courbe, mais parfois on peut manquer un détail intéressant (valeur de $\Delta t$ trop grande), ou un morceau de courbe (mauvaises valeurs de $t_-$ et $t_+$). Par exemple

```
plotfunc(x+0.01/(x-sqrt(2)),x=-2..2,xstep=0.1)
```




Il peut être nécessaire d'ajuster le cadrage graphique à l'affichage (`xmin`, `xmax`, `ymin`, `ymax`) ou de l'affiner avec un menu de `zoom`. Sur les calculatrices les opérations de changement de cadrage graphique provoquent un nouveau calcul complet qui peut durer une dizaine de secondes.

Mise en oeuvre :

— avec Xcas : on utilise la commande `plotparam` dans le menu `Graphe, Courbes`. Le cadrage graphique est calculé automatiquement et peut être modifié par les touches menus à droite du graphe. On peut spécifier le pas avec l'argument optionnel `tstep=`.

— HP Prime : touche Apps puis Paramétrique, entrer les formules donnant $X1$ et $Y1$ en fonction de $T$, puis touche Plot. Pour régler la discrétisation, faire shift-Plot (Plot setup).
Ou touche Apps puis Géométrie et utiliser les mêmes commandes qu'avec Xcas.

— sur les calculatrices TI89/92/voyage 200 : il faut sélectionner le mode de tracé paramétrique avec la touche MODE, puis sur `Y=`, l'écran de définition de $x(t), y(t)$ apparait. Si les réglages graphiques ne sont pas satisfaisants, la

touche `WINDOW` permet d'y accéder, puis la touche `GRAPH` lance le tracé.

— TI Nspire : lancer Graphes depuis Home puis touche Menu, 3. Graph puis 3. Parametric. On peut aussi régler le zoom depuis Menu.

Exemples : essayez de tracer quelques courbes en paramétriques

$$(2\cos(t), 3\sin(t)), \quad (\cos(2t), \sin(3t)), \quad (t^2, t^3), \quad (t+1/t, t^2+2/t), \quad (\sqrt{t-1}, \sqrt{2-t})$$

## 10.3 Paramétrage

On adoptera souvent la convention d'appeler temps le paramétre $t$. Mais cela ne signifie pas que le paramétrage est réellement le temps mesuré en secondes. On peut très bien paramétrer une courbe avec un paramètre autre, qui peut être un multiple constant ou variable du temps (c'est d'ailleurs conforme au principe de la relativité). Le paramétrage n'est jamais unique, on peut changer de paramétrage pourvu que la fonction donnant le nouveau en fonction de l'ancien paramétrage soit une bijection (qui peut même renverser le sens de déroulement du temps c'est-à-dire le sens de parcours de la courbe). On utilisera d'ailleurs plus loin un paramétrage par la longueur, où la courbe est parcourue à vitesse constante égale à 1.

Le choix d'un paramétrage est ce qui fait la différence entre la cinématique (on prend le temps comme paramètre) et la géométrie (où on cherche à décrire les propriétés intrinséques de la courbe indépendamment du paramétrage). Ainsi, l'équation cartésienne d'une courbe est une propriété géométrique, indépendante du choix de paramétrage choisi pour l'obtenir.

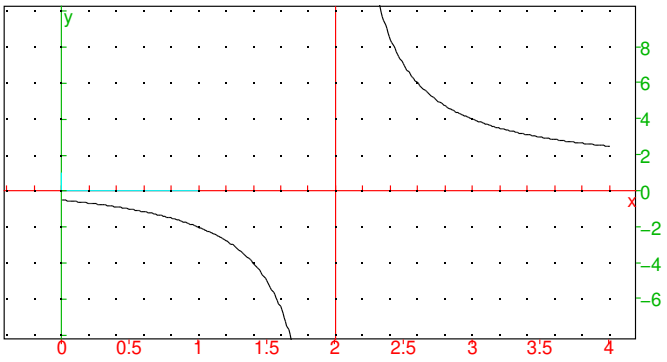
On observe aussi que l'opération inverse, trouver un paramétrage à partir d'une équation cartésienne de courbe n'est pas possible de manière explicite, sauf dans quelques cas particuliers. C'est pour cette raison qu'il est beaucoup plus difficile (et couteux en temps) d'obtenir une représentation graphique d'une courbe donnée par son équation cartésienne.

## 10.4 Étude analytique d'une courbe en paramétrique

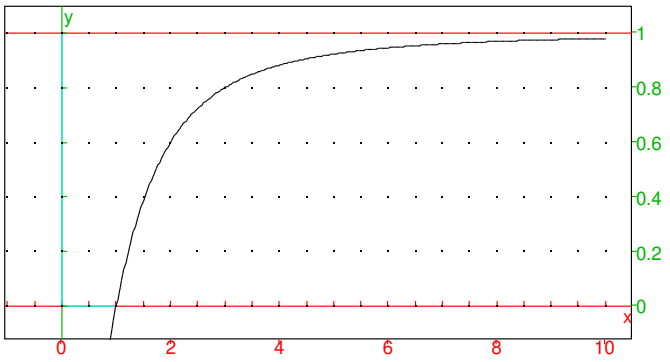
### 10.4.1 Rappel sur les graphes de fonction

Pour tracer le graphe d'une fonction $f$, on commence par déterminer le domaine de définition, on restreint éventuellement l'intervalle d'étude (parité, périodicité). Puis on calcule les limites aux bornes du domaine de définition :

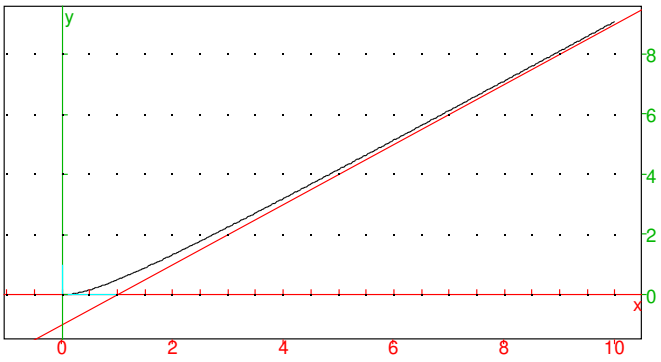
— une limite infinie en $x = a$ fini correspond à une asymptote verticale d'équation $x = a$.
Exemple
`purge(x);plot((x+1)/(x-2),x=0..4); line(x=2,color=red)`




— une limite finie $l$ lorsque $x \to \pm\infty$ correspond à une asymptote horizontale d'équation $y = l$.
Exemple
`purge(y);plot((x^2-1)/(x^2+1),x=0..10); line (y=1,color=red)`




— si $y$ tend vers $\pm\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$, on a une branche infinie. S'il s'agit d'une asymptote $y = ax + b + o(1)$, alors $y/x = a + b/x + o(1/x)$ tend vers $a$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ce qui permet de trouver $a$ en calculant $\lim_{x\to+\infty} y/x$, puis $b = \lim_{x\to+\infty} y - ax$. Si $b$ est fini, on a une asymptote, sinon une branche parabolique de direction $y = ax$. On remarque que si $a = 0$, comme $y$ tend vers l'infini, on ne peut pas avoir d'asymptote, on parle de branche parabolique de direction $Ox$. Si $y/x$ tend vers l'infini, on a une branche parabolique de direction $Oy$.
Exemple `plot(x^2/(x+1),x=0..10);line(y=x-1,color=red)`




— Lorsqu'il y a une asymptote d'équation $y = ax + b$, on peut raffiner en cherchant la position de la courbe par rapport à l'asymptote en étudiant le signe de $y - (ax + b)$

On calcule la dérivée première de $f$ pour déterminer le sens de variations, les points d'annulation correspondent à des tangentes horizontales. On peut étudier la convexité de $f$ (signe de $f''$), les points d'inflexion de la courbe se produisent lorsque $f''$ s'annule. On trace alors la courbe en faisant apparaitre les points particuliers et les asymptotes.

Pour une courbe en paramétrique, le plan général est analogue, mais l'étude est un peu plus compliquée puisqu'on a deux fonctions $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$ au lieu d'une seule $x \to y(x)$.

### 10.4.2 Domaine et périodicité

On supposera dans toute la suite que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont continument dérivables au moins 2 fois, sauf peut-être en un nombre fini de réels d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

On commence par déterminer le domaine de définition de $x(t)$ et de $y(t)$, et on essaie de le réduire si possible, soit par périodicité (par exemple pour le cercle ci-dessus, $t \in [0, 2\pi]$) soit par l'existence de symétries si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont paires ou impaires. Par exemple, si $x$ et $y$ sont paires, alors on parcourt deux

fois le même arc de courbe sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$, on peut restreindre le domaine d'étude à $t \geq 0$. Si $x$ est pair et $y$ impair, alors $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$, il y a une symétrie par rapport à l'axe des $x$, on se restreint à $t \in R^+$. Dans le cas périodique, on peut tester des symétries correspondant à des demi (voire quart) de période. Exemple : $(3\cos(t) + 2\cos(3t), 3\sin(t) - 2\sin(3t))$

### 10.4.3 Branches infinies

On s'intéresse ensuite aux bornes du domaine de définition et aux points où $x$ ou/et $y$ ne sont pas définis. Si $x$ et $y$ admettent une limite finie, on peut prolonger la courbe. Si les limites existent mais ne sont pas finies, on a une branche infinie ($x$ ou $y$). Si l'une des deux valeurs tend vers l'infini, l'autre restant finie, on a une asymptote (horizontale si $x$ tend vers l'infini, verticale si $y$ tend vers l'infini), on peut déterminer la position de l'arc de courbe par rapport à l'asymptote en cherchant le signe de $y - l$ ou $x - l$ lorsque $t$ tend vers la valeur particulière (limite à droite et limite à gauche). Enfin si $x$ et $y$ tendent vers l'infini tous les deux, on cherche la limite de $y/x$, Si $\frac{y}{x} \to a \neq 0$, on a une **branche parabolique** de direction asymptotique $y = ax$, on cherche alors la limite $y - ax$, si cette limite est finie et vaut $b$ on a une **asymptote** oblique $y = ax + b$ (on peut déterminer la position en cherchant le signe de $y - (ax + b)$.

Exemples :

$$(\frac{t^2}{t+1}, t + \frac{1}{t^2+1}),\ (t^2, t^3),\ (\frac{t^3}{t^2+1}, t + \frac{1}{t^2+2}),\ (\frac{1}{t^2-1}, \frac{t}{t+1}),$$

On peut utiliser la commande `limit` dans Xcas pour étudier une asymptote, par exemple dans le premier cas, pour étudier la branche infinie pour $t \to +\infty$ [1]
On définit les fonctions

```
X(t):=t^2/(t+1);Y(t):=t+1/(t^2+1);
```

$$t \mapsto \frac{t^2}{t+1}, t \mapsto t + \frac{1}{t^2+1}$$

puis on calcule les limites lorsque $t \to +\infty$

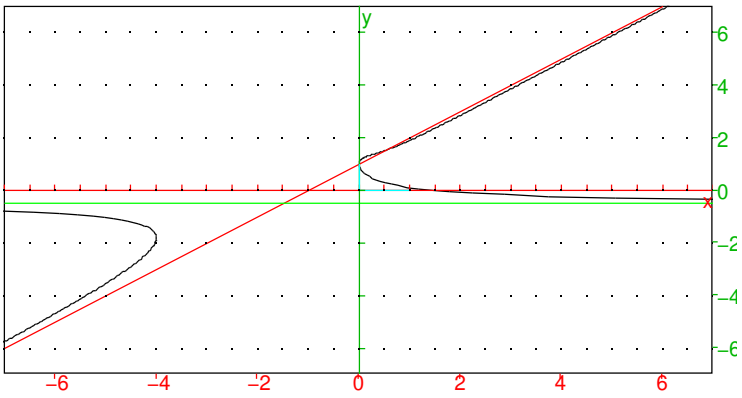
```
a:=limit(Y(t)/X(t),t=inf);b:=limit(Y(t)-a*X
(t),t=inf)
```

$$1, 1$$

Si $a$ est fini non nul et $b$ fini, on en déduit que $y = ax + b$ est asymptote à la courbe. Il y a une autre asymptote pour $t = -1$ ($Y$ fini, $X$ tend vers l'infini)

```
gl_x=-7..7;gl_y=-7..7;purge(x,y);plotparam
([X(t),Y(t)],t=-7..7);line(y=a*x+b,color=red
);line(y=Y(-1),color=green)
```

1. on notant $X(t)$ et $Y(t)$ les deux fonctions pour pouvoir utiliser $x$ et $y$ dans `droite`




Autre exemple :

```
X(t):=t^3/(t^2+1);Y(t):=t+1/(t^2+2);
```

$$t \mapsto \frac{t^3}{t^2+1}, t \mapsto t + \frac{1}{t^2+2}$$

### 10.4.4 Étude locale

On se place en une valeur de $t_0$ où $x$ et $y$ sont continument dérivables au moins deux fois. On notera la dérivation par rapport au paramètre par le signe ' (en physique on utilise aussi le point). On a alors un développement de Taylor à l'ordre 2 du vecteur

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} &= (x(t_0+h)-x(t_0), y(t_0+h)-y(t_0)) \\ &= h(x'(t_0), y'(t_0)) + \frac{h^2}{2}(x''(t_x), y''(t_y))\end{aligned}$$

où $t_x$ et $t_y$ sont compris entre $t_0$ et $t_0 + h$. Si le vecteur vitesse $v = (x'(t_0), y'(t_0))$ est non nul, on en déduit un équivalent

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} \approx h(x'(t_0), y'(t_0))$$

Lorsque $h$ est proche de 0, le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$ est équivalent à un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{v} = (x'(t_0), y'(t_0))$ (supposé non nul), qui est donc vecteur tangent à la courbe en $(x(t_0), y(t_0))$.

**Définition 15** *On appelle* **point régulier** *d'une courbe paramétrique un point où la vitesse $\overrightarrow{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ est non nulle. En un point régulier, la courbe est tangente au vecteur vitesse (la direction du vecteur vitesse est donc une propriété géométrique, alors que le vecteur vitesse est une propriété cinématique). On notera en particulier que la tangente est horizontale si $y' = 0$ et verticale si $x' = 0$.*

*On appelle* **point singulier** *un point où la vitesse s'annulle.*

On verra dans la suite comment étudier la tangente en un point singulier d'une courbe. Génériquement, une courbe n'a pas de points singuliers, car il faut annuler simultanément les deux dérivées, or on n'a qu'un seul paramètre libre $t$. Par contre une famille de courbes $(x_m(t), y_m(t))$ dépendant d'un paramètre $m$ (par exemple $x_m(t) = t^2 - mt, y_m(t) = m/(1+t^2) + t$) possède en général un nombre discret de valeurs du paramètre pour lesquelles la courbe admet un point singulier. Dans l'exemple, $x'_m = 2t - m, y'_m = -2mt/(1+t^2)^2 + 1$, les deux dérivées s'annulent si $m = -2$ (en $t = -1$, $x = -1, y = -2$) ou $m = 2$ (en $t = 1$). Commandes Xcas :

```
x:=t^2-m*t; y:=m/(1+t^2)+t;
solve([diff(x,t),diff(y,t)],[m,t]);
supposons(m=[-2.0,-5,5,0.1]);
plotparam([x,y],t=((-3) .. 3));
```

```
x:=t^2-m*t; y:=m/(1+t^2)+t;solve([diff(x,t
),diff(y,t)],[m,t]);
```

$$[-2147483647, -4294967294, -6442450927], \left[1, 2, \frac{2147483692}{15}\right], [[m, t]]$$

```
m:=-2;gl_x=-3..3;gl_y=-4..4;x:=t^2-m*t;y:=m/
(1+t^2)+t;plotparam([x,y],t=-3..3)
```

**Remarque** : en cinématique, si la vitesse et l'accélération sont nulles en un point et que les équations ne dépendent pas explicitement du temps, on reste indéfiniment en ce point qui est un point d'équilibre, la notion de tangente à la courbe n'a alors pas de sens. On peut aussi suivre une trajectoire qui se rapproche de plus en plus d'un point d'équilibre (la limite de $(x(t), y(t))$ est alors ce point, pour $t \to +\infty$ si l'équilibre est stable ou $t \to -\infty$ si l'équilibre est instable).

Pour faire une étude locale plus précise dans le cas d'un point régulier, ou pour déterminer la tangente en un point singulier, il faut poursuivre le développement

de Taylor à un ordre plus grand. Á l'ordre 2, si $x$ et $y$ sont 3 fois continument dérivables, il existe $t_x, t_y \in [t_0, t_0+h]$ tels que :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = h(x'(t_0), y'(t_0)) + \frac{h^2}{2}(x''(t_0), y''(t_0)) + \frac{h^3}{6}(x'''(t_x), y'''(t_y))$$

Si les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v} = (x'(t_0), y'(t_0))$ et accélération $\overrightarrow{a} = (x''(t_0), y''(t_0))$ ne sont pas colinéaires, alors $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{a}\}$ forme une base, et dans cette base $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$ a pour coordonnées $(h, h^2/2)$+un terme d'ordre 3 en puissances de $h$, l'arc de courbe est à l'ordre 2 identique à un arc de parabole. On parle de **point birégulier**. Si $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{a}\}$ est une base directe, l'arc est **convexe** (la vitesse "tourne" dans le sens trigonométrique), sinon il est concave. On peut tester cela en calculant le déterminant des coordonnées de $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{a}\}$ ou le sens de variations de $m$, la pente de la tangente

$$m = \frac{y'}{x'}, \quad m' = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2}$$

**Théorème 16** *Si* $det(v,a) = x'y'' - x''y' > 0$ *[resp* $< 0$*] sur un intervalle du domaine de définition, la courbe n'a que des points réguliers, la direction de la tangente en un point est donnée par le vecteur vitesse, et la courbe est convexe [resp. concave]. Si* $x'y'' - x''y' = 0$*, on parle de* **point d'inflexion** *analytique.*

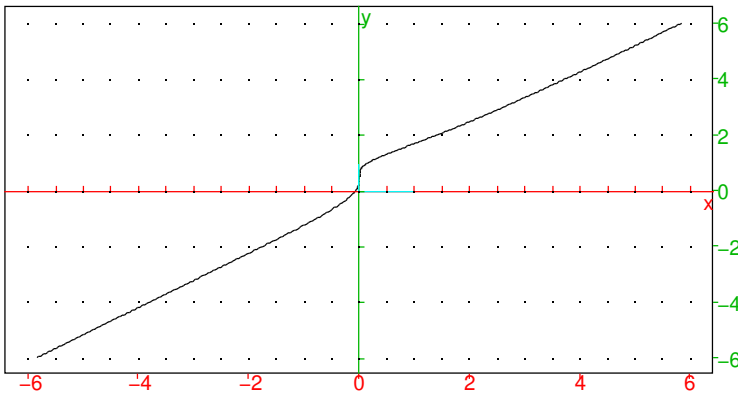
**Remarque** : pour un graphe de fonction, $x = t$, on retrouve le critère usuel $y'' > 0$.

**Exemple** : point d'inflexion en $t = 0$ de

$$(\frac{t^3}{t^2+1}, t + \frac{1}{t^2+2})$$

La courbe admet deux autres points d'inflexion ($t = -3.16...$ et $t = 1.31...$) qu'on peut déterminer avec les commandes Xcas suivantes :

```
purge(x,y);X:=x^3/(x^2+1); Y:=x+1/(x^2+2
); plotparam([X,Y],x)
```




```
fsolve(X'*Y''-X''*Y',x)
```

$$[-3.16914303038, 0.0, 1.31229969315]$$

```
tabvar([X,Y]);
```

$$\begin{bmatrix}
x & -\infty & "" & -3.169 & "" & 0 & "" & 1.312 & "" & +\infty \\
x=\frac{x^3}{x^2+1} & -\infty & "\uparrow" & -2.882 & "\uparrow" & 0 & "\uparrow" & 0.83 & "\uparrow" & +\infty \\
x'=\frac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2} & 1 & "+" & 1.074 & "+" & 0 & "+" & 1.097 & "+" & 1 \\
y=x+\frac{1}{x^2+2} & -\infty & "\uparrow" & -3.086 & "\uparrow" & \frac{1}{2} & "\uparrow" & 1.581 & "\uparrow" & +\infty \\
y'=\frac{x^4+4x^2-2x+4}{\left(x^2+2\right)^2} & 1 & "+" & 1.044 & "+" & 1 & "+" & 0.811 & "+" & 1 \\
x'y''-y'x'' & 0 & "concav" & 0 & "convex" & 0 & "concav" & 0 & "convex" & 0
\end{bmatrix}$$

Note : on utilise comme paramètre `x` au lieu de `t` pour pouvoir utiliser la notation `'` pour dériver (si on utilise `t` comme paramètre, il faut utiliser `diff(.,t)` pour

calculer la dérivée par rapport à $t$). L'instruction `fsolve` effectue une résolution numérique, pour tenter une résolution exacte, utiliser `solve`, mais on risque alors de manquer certaines solutions.

On observe que la convexité est (presque) une propriété géométrique, en effet si on change de paramétrage

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}s'$$

on dérive par rapport à $t$

$$x'' = (\frac{dx}{ds}s')' = \frac{d^2x}{ds^2}s'^2 + \frac{dx}{ds}s''$$

puis :

$$x'y''-y'x'' = \frac{dx}{ds}s'(\frac{d^2y}{ds^2}s'^2+\frac{dy}{ds}s'')-\frac{dy}{ds}s'(\frac{d^2x}{ds^2}s'^2+\frac{dx}{ds}s'') = s'^3(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2})$$

on retrouve en facteur $s'^3$ qui est positif si on parcourt la courbe dans le même sens ou négatif sinon.

La convexité décrit qualitativement la géométrie de la courbe (orientée) à l'ordre 1. On verra plus loin que le rayon de courbure décrit quantitativement la géométrie de la courbe à l'ordre 2 (comme la tangente décrit la géométrie de la courbe à l'ordre 1).

Dans le cas d'un point singulier ($\overrightarrow{v} = 0$), si l'accélération $\overrightarrow{a} \neq 0$, alors la tangente est portée par $\overrightarrow{a}$. L'étude complète de la nature d'un point singulier ou de la convexité d'un point régulier tel que $\overrightarrow{a}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$ nécessite de faire un développement de Taylor en $t = t_0$ jusqu'au premier ordre $q$, s'il existe, tel que :

- les dérivées d'ordre 1, .., $p-1$ de $(x, y)$ s'annulent
- la dérivée d'ordre $p > 0$ est non nulle, on la note $\overrightarrow{T}$
- les dérivées d'ordre $p+1, ..., q-1$ sont colinéaires à la dérivée d'ordre $p$ (ce qui inclus le cas où elles sont nulles)
- la dérivée d'ordre $q$ est non colinéaire à $p$, on la note $\overrightarrow{A}$.

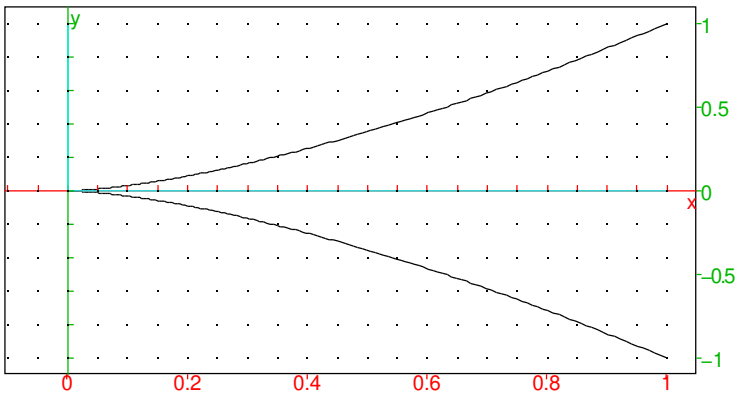
Dans la base $\{\overrightarrow{T}, \overrightarrow{A}\}$, les composantes de $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ sont alors respectivement équivalentes à $h^p/p!$ et $h^q/q!$ où $h = t - t_0$. On en déduit que la tangente à la courbe est portée par $\overrightarrow{T}$.

- si $p$ est pair, on a un rebroussement de première espèce si $q$ est impair (cas générique d'un point singulier, $p = 2, q = 3$) ou de deuxième espèce si $q$ est pair. On ne peut pas régulariser le point singulier par changement de paramétrage.
- Si $p$ est impair, on peut reparamétriser la courbe pour rendre le point non singulier (prendre $t' = (t-t_0)^{1/p}$) mais au risque de perdre de la régularité,
- Si $p$ est impair et $q$ impair on a un point d'inflexion géométrique (changement de sens de convexité).

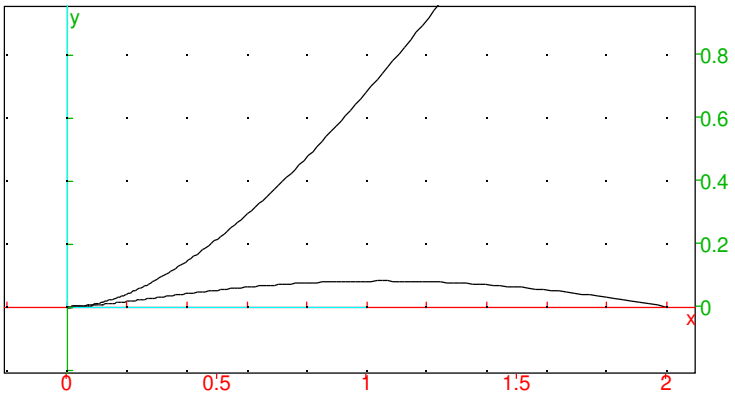
Exemples de points singuliers en $t = 0$ avec dans l'ordre rebroussement de 1ère puis 2ième espèce, méplat et inflexion :

$$(t^2, t^3),\ (t^2 + t^4, t^4 + t^5),\ (t^3, t^4),\ (t^3, t^5)$$

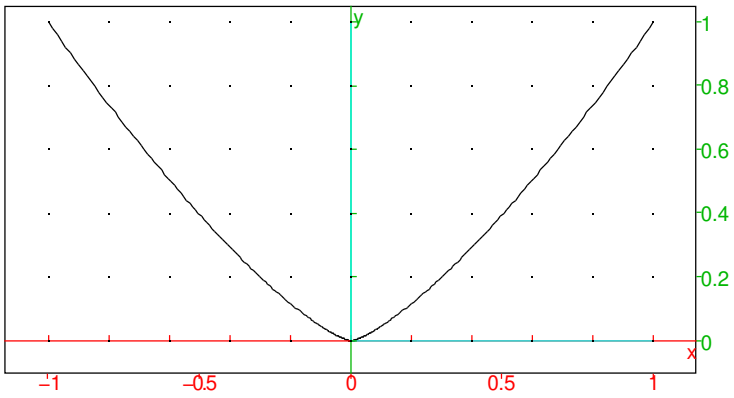
```
plotparam([t^2,t^3],t=-1..1)
```



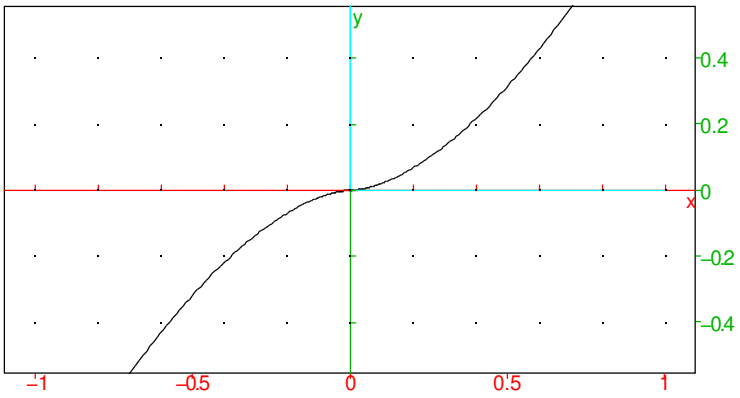

```
plotparam([t^2+t^4,t^4+t^5],t=-1..1)
```




```
plotparam([t^3,t^4],t=-1..1)
```




```
plotparam([t^3,t^5],t=-1..1)
```




Les deux derniers cas peuvent être reparamétrés (au prix de la perte de dérivabilité seconde) en posant $t' = t^{1/3}$.

Pour faire l'étude d'un point singulier avec Xcas, on peut utiliser la fonction `series` sur $x(t)$ et $y(t)$ (ici c'est inutile, le développement de Taylor est déjà fait).

Remarque : il peut arriver dans des cas pathologiques que toutes les dérivées de $(x, y)$ s'annulent en un point sans que la fonction $(x, y)$ soit nulle (par exemple si $x$ et $y$ contiennent un facteur $\exp(-1/t^2)$ en $t = 0$, on parle de fonction plate). Il peut aussi arriver que toutes les dérivées soit colinéaires à la première dérivée non nulle, si on se déplace sur une droite ou si la tangeance est plate.

## 10.5 Plan d'étude d'une courbe

1. On détermine et on restreint le domaine de définition (périodicité, symétries).
2. On étudie les branches infinies (point exclus du domaine, $\pm\infty$) : asymptotes horizontales, verticales, directions asymptotiques, asymptotes obliques.

3. Recherche de $x'$ et $y'$, on étudie l'annulation conjointe des deux (points singuliers).

4. Signe de $x'$ et $y'$, double tableau de variations faisant apparaitre $x, x', y, y'$ et mise en évidence des tangentes horizontales et verticales

5. Pour préciser le tracé, on peut chercher la convexité en étudiant le signe de $x'y'' - x''y'$.

6. Tracé des points remarquables et des asymptotes et on les relie entre eux en suivant les sens de variations du tableau de variations.

## 10.6 Courbes en polaires

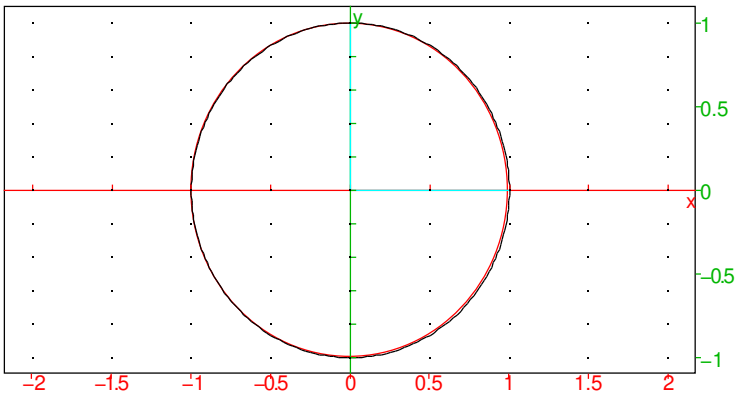
Une courbe en polaire est essentiellement donnée par la distance au centre $O$ d'un point $M$ de la courbe en fonction de l'angle $\theta$ entre la direction $Ox$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ :

$$OM = r(\theta)$$

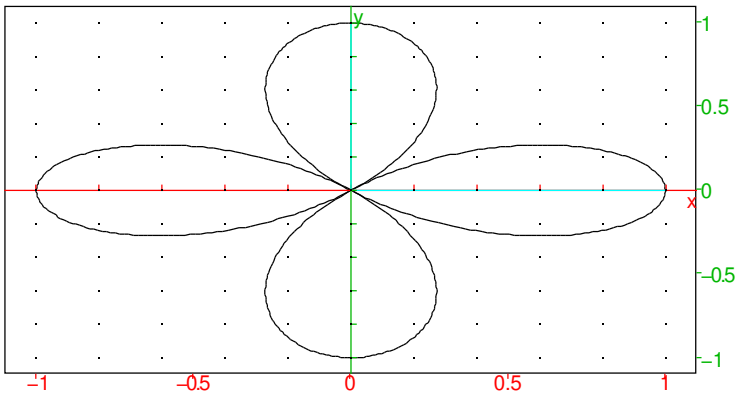
On s'autorise toutefois des valeurs négatives pour $r$, si c'est le cas, on prend alors le symétrique par rapport à l'origine du point situé à distance $-r$ et d'angle $\theta$.

Représentation graphique : avec Xcas, on utilise la commande `plotpolar`, sur calculatrices graphiques, sélectionner le mode de tracé en polaire (touche Mode sur TI89/92/V200) ou l'application Polaire ou Géométrie sur les HP Prime. Par exemple

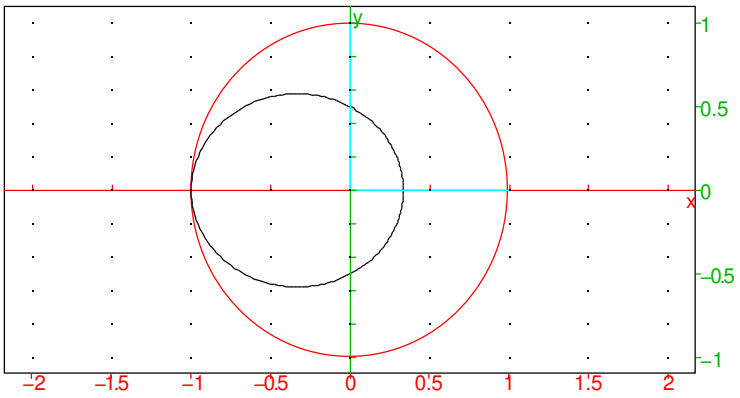
```
circle(0,1,color=red); plotpolar(1,x=0..2*pi)
```



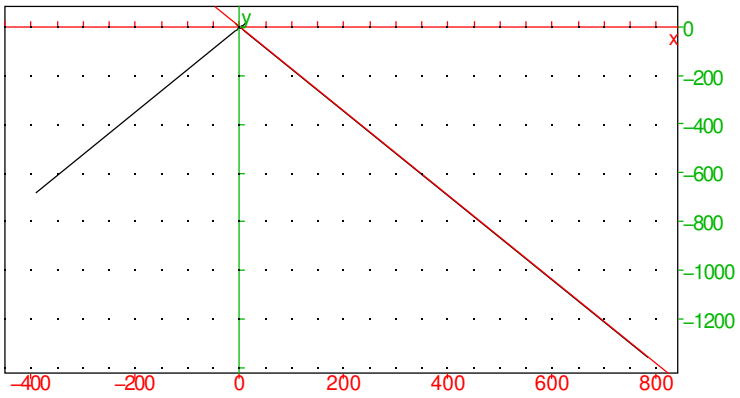

```
plotpolar(cos(2x),x=0..2*pi,tstep=0.01)
```



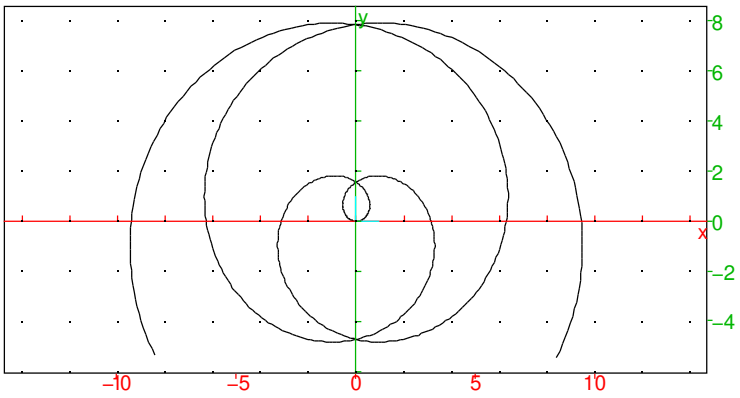

```
circle(0,1,color=red); plotpolar(1/(2+cos
(x)),x=0..2*pi);
```




```
purge(x,y);plotpolar(1/(1+2*cos(x)),x=0..2*pi
); rotation(0,2*pi/3,line(y=-sqrt(3)/3),color=red)
```




```
plotpolar(x,x=-10..10)
```




Remarque : une courbe en polaires est toujours parcourue dans le sens trigonométrique.

C'est un cas particulier de courbe en paramétriques puisque

$$(x, y) = (r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\sin(\theta))$$

mais on préfère souvent faire l'étude directement sur la fonction $r$. Le plan d'étude est calqué sur celui d'une courbe en paramétrique, mais on n'a qu'une seule fonction $r$ à étudier.

1. domaine de définition de $r$, recherche de périodicités et symétries ($\theta \to -\theta$ ou ajout d'une demi ou d'un quart de période). Si la période n'est pas un multiple de $2\pi$, cela correspond à obtenir un arc de la courbe par rotation à partir d'un autre arc de la courbe.
2. branches infinies pour $\theta_0$ (non infini) où $r$ n'est pas défini. La branche a pour direction asymptotique la droite faisant un angle $\theta_0$ avec l'axe des $x$. On calcule alors la limite si elle existe de $r\sin(\theta - \theta_0))$, c'est l'ordonnée dans le repère obtenu par rotation d'angle $\theta_0$, si la limite est finie et vaut $l$

on a une asymptote (d'équation $Y = l$ dans le repère tourné).
Exemple $r = 1/(1 + 2\cos(\theta))$. $r$ n'est pas défini pour $\cos(\theta) = -1/2$, donc $\theta = \pm 2\pi/3$. Pour $\theta_0 = 2\pi/3$, on calcule $\lim_{\theta \to 2\pi/3} r \sin(\theta - 2\pi/3)$

```
limit(1/(1+2cos(x))*sin(x-2pi/3),x=2pi/3)
```

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

La tangente est donc l'image par la rotation de centre $O$ et d'angle $2\pi/3$ de la droite $Y = -\sqrt{3}/3$

3. si la fonction n'est pas périodique, il y a lieu d'étudier l'existence de limites de $r$ en $\pm\infty$, si la limite est nulle on s'approche en spiralant de l'origine, si elle est finie, il y a un cercle asymptote, si elle est infinie une spirale.

4. comme $\overrightarrow{OM} = re_r, e_r = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, la vitesse (si le temps est $\theta$) est donnée par

$$\overrightarrow{v} = r'e_r + re_\theta$$

où $\{e_r, e_\theta\}$ est une base orthonormée directe.
Donc si $r \neq 0$ ou $r' \neq 0$, le point est régulier et l'angle $V$ de la tangente avec $e_r$ vérifie

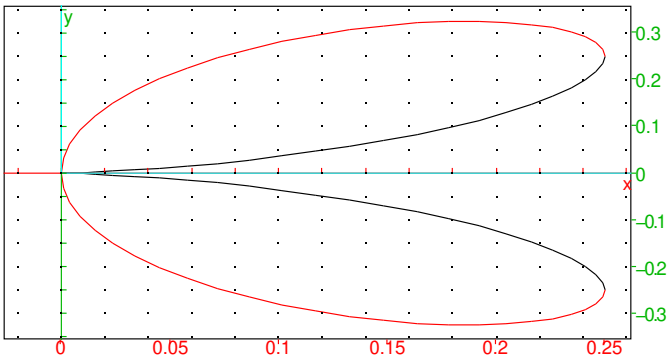
$$\tan(V) = \frac{r}{r'} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

(si $r \neq 0$ et $r' = 0$, la tangente est portée par $e_\theta$). Si $r = 0$, la tangente est portée par $e_r$.[2]

5. On ne peut avoir un point singulier que pour $r = 0$. On ne fait pas leur étude comme en paramétriques, en effet la tangente est toujours portée par $e_r$, si $r$ change de signe la courbe a la même allure que pour un point régulier, si $r$ ne change pas de signe on a un rebroussement de première espèce (puisqu'on traverse la tangente lorsque $\theta$ augmente)
Exemple :

```
plotpolar(sin(x)^2*cos(x),x=-pi/4..pi/4,tstep=pi/100
);plotpolar(sin(x)^2*cos(x),x=pi/4..3*pi/4,tstep=pi/100,color=re
)
```

2. Si $r' \neq 0$, cela se lit sur l'expression de la vitesse qui est non nulle, mais c'est encore vrai si $r(\theta) = r'(\theta) = 0$ et $r$ non identiquement nul, pour le voir, on observe que $M(\theta)M(\theta + h) = OM(\theta + h)$ a pour direction $e_r(\theta + h)$ qui tend vers $e_r(\theta)$ lorsque $h$ tend vers 0.




6. Convexité : pour avoir un point d'inflexion, il faut que

$$\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{r}\right)'{}'=0 \Leftrightarrow r^2+2r'^2-rr''=0$$

On peut le montrer de différentes manières :

— En calculant le déterminant de {vitesse,accélération } par rapport à $\theta$ dans le repère $e_r, e_\theta$, on a

$$v=r'e_r+re_\theta \quad a=r''e_r+2r'e_\theta-re_r$$

$$\Rightarrow \det(v,a)=\begin{vmatrix} r' & r''-r \\ r & 2r' \end{vmatrix}=2r'^2-rr''+r^2$$

— En calculant la dérivée de l'angle fait avec l'axe Ox $\theta+\arctan(r/r')$

— avec Xcas en se ramenant en paramétriques

```
X:=r(x)*cos(x); Y:=r(x)*sin(x); simplify
(X'*Y''-Y'*X'');simplify(1/r(x)+(1/r(x))'');
```

$$\cos x, \sin x, 1, 1$$

où on a noté $x$ l'angle $\theta$ pour pouvoir dériver avec ' et $X$ et $Y$ les deux coordonnées.

7. de même on calcule la courbure définie en section **??**

$$\kappa = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{\sqrt{r^2 + r'^2}^3}$$

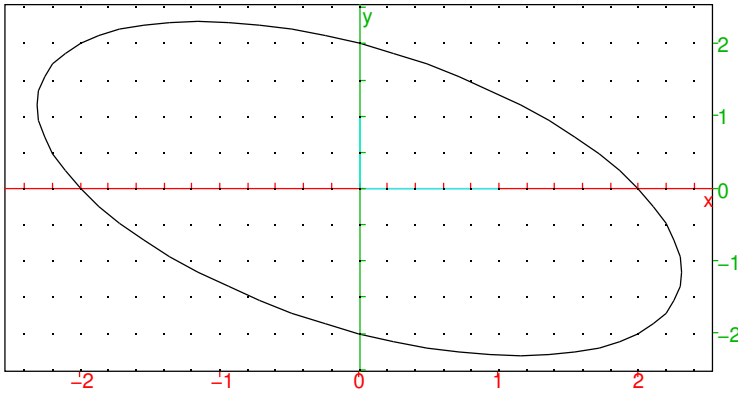
## 10.7 Coniques

Les coniques sont des courbes implicites dont l'équation cartésienne est du second degré

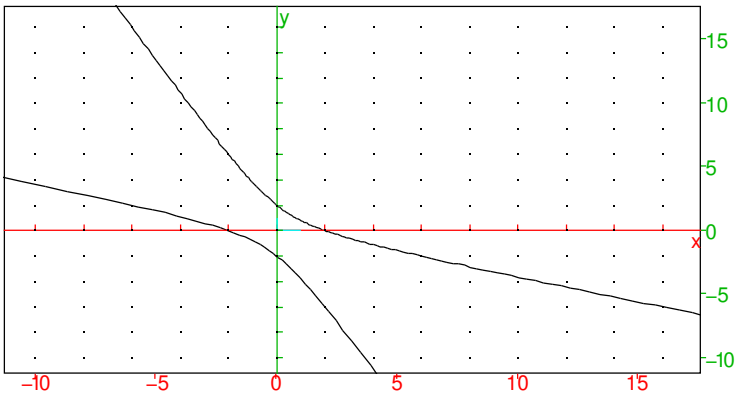
$$ax^2 + cy^2 + bxy + dx + ey + f = 0$$

Exemples :

```
purge(x,y);plotimplicit(x^2+y^2+x*y=4)
```




```
plotimplicit(x^2+y^2+3*x*y=4)
```




On va voir qu'elles sont de trois types : ellipses, hyperbole, parabole [3] et on va les paramétriser, à partir de leur équation cartésienne ou à partir de leurs éléments géométriques (le calcul des éléments géométrique à partir de l'équation cartésienne fait intervenir l'étude des formes quadratiques, il ne sera pas abordé dans ce cours). Les coniques sont des courbes importantes en géométrie, ce qui a un intérêt en optique (parabole), mais aussi en cinématique (première loi de Kepler : l'orbite décrite par une planète est une ellipse dont le Soleil occupe un foyer).

### 10.7.1 Ellipse

**Définition 17** *L'ellipse $E$ de foyers $F_1$ et $F_2$ de demi-grand axe $a$ est l'ensemble des points $M$ du plan tels que*

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

3. En toute rigueur il faut ajouter deux autres cas ; l'ensemble vide et les paires éventuellement confondues de droites

Exemple : ouvrir un niveau de géométrie 2d dans Xcas, choisir le mode ellipse cliquer 2 points (ce sont les foyers) puis un 3ème point (point de l'ellipse), passer en mode pointeur et faire bouger l'un des points, observer la forme de l'ellipse qui en résulte. Ou dans une ligne de commande normale taper la commande `ellipse()` avec en arguments les 2 points foyers et un point de l'ellipse ou l'équation cartésienne de l'ellipse, par exemple `ellipse(-1,1,3+i)` trace l'ellipse de foyers $(-1,0),(1,0)$ et passant par le point $(3,1)$.

On note $2c = F_1F_2$ la distance entre les deux foyers, qui doit être plus petite que $2a$ pour que l'ellipse soit non vide. L'excentricité de l'ellipse est définie par $e = c/a < 1$. Si $e = 0$, on obtient un cercle de centre $F_1 = F_2$ et de rayon $a$. Si $e \neq 0$, on va voir qu'il s'agit d'un cercle contracté selon l'axe perpendiculaire à $F_1F_2$ dans un rapport de $\sqrt{1-e^2}$. On va également calculer l'équation en coordonnées polaires de $E$ (c'est sous cette forme que l'on montre que la Terre décrit une ellipse dont le Soleil occupe un foyer).

Soit $O$ le milieu de $F_1$ et $F_2$, on se place dans le repère orthonormé dont le premier axe $Ox$ contient $F_1$ et $F_2$ donc les coordonnées de $F_1$ sont $(c,0)$ et celles de $F_2$ sont $(-c,0)$. Soit $M(x,y)$ un point de l'ellipse, on a d'une part :

$$MF_1^2 - MF_2^2 = (x-c)^2 - (x+c)^2 = -4cx$$

et d'autre part :

$$MF_1^2 - MF_2^2 = (MF_1 + MF_2)(MF_1 - MF_2) = 2a(MF_1 - MF_2)$$

donc :

$$MF_1 - MF_2 = \frac{-2cx}{a}$$

en additionnant avec $MF_1 + MF_2 = 2a$ et en appliquant $c = ea$, on en déduit :

$$MF_1 = a - \frac{cx}{a} = a - ex \tag{10.1}$$

En prenant le carré, on a :

$$(x-ea)^2 + y^2 = (a-ex)^2$$

d'où :

$$y^2 + x^2(1-e^2) = a^2(1-e^2)$$

finalement :

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2$$

qui est bien la contraction selon $Oy$ de rapport $\sqrt{1-e^2}$ du cercle de centre $O$ et de rayon $a$ (appelé grand cercle de l'ellipse).

En coordonnées paramétriques, on peut utiliser le paramétrage suivant :

$$(x,y) = (a\cos(t), b\sin(t))$$

En coordonnées polaires, on note $\rho$ la distance de $F_1$ à $M$, et $\theta$ l'angle entre l'axe $Ox$ et $F_1M$. L'abscisse de $M$ est donc :

$$x = ea + \rho\cos(\theta)$$

que l'on combine avec (**??**) pour obtenir :

$$\rho = a - ex = a(1 - e^2) - e\rho\cos(\theta)$$

donc :

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta)}$$

**Remarques** :

— La première loi de Képler dit que l'orbite d'une planète autour du Soleil est une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers. La troisième loi de Képler donne la relation suivante entre le demi-grand axe $a$, la période de révolution $T$ et $\mu$ le produit de la masse du Soleil[4] par la constante de gravitation :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}$$

— Attention, $t \neq \theta$. Et dans le cas de l'orbite de la Terre autour du Soleil, aucun de ces deux paramétrages n'est le temps $\tau$. Le paramétrage par le temps se déduit de la loi des aires

$$r^2 d\theta = L d\tau, \quad \frac{L^2}{\mu} = a(1 - e^2)$$

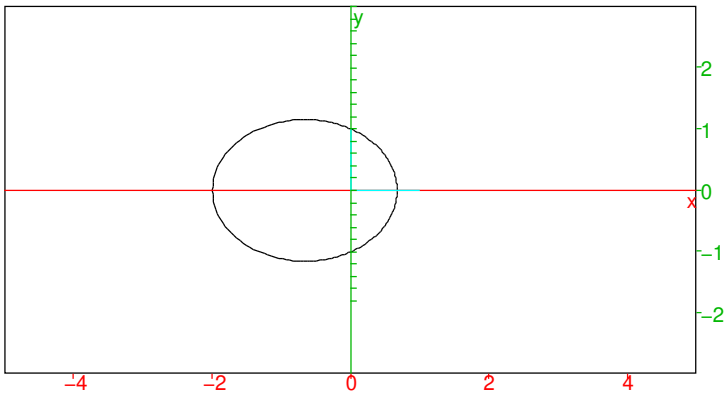
Il nécessite de résoudre une équation , cf. l'équation du temps dans le cours :
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/climat/orbite.html`
L'excentricité de la Terre est faible, $e = 0.0167$ en ce moment, elle est responsable d'une petite différence de durée des saisons, elle varie très lentement au cours des siècles sous l'action des autres planètes du système solaire, cette lente variation est une des raisons des glaciations du quartenaire.

— On peut aussi définir géométriquement l'ellipse par un foyer $F$ et une directrice $D$, c'est l'ensemble des $M$ tels que $d(M, F) = ed(M, D)$. Dans le repère d'origine $O$, $D$ a pour équation $x = a/e$ (dans le repère d'origine $F$, c'est $x = a/e - e = a(1-e^2)/e$). En effet $MF = a - ex = e(a/e - x)$.

Exemple : faites varier la valeur de l'excentricité ci-dessous, que voit-on pour E=0.0, E un peu inférieur à 1 (par exemple 0.8) et un peu supérieur à 1 (par exemple 1.3)

```
E:=0.5; gl_x=-5..5;gl_y=-3..3;plotpolar(1/
(1+E*cos(t)),t=0..2*pi,tstep=pi/100)
```

4. en négligeant la masse de la planète devant celle du Soleil




### 10.7.2 Parabole

Si $F$ est un point et $D$ une droite ne passant pas par $F$, la parabole de foyer $F$ et directrice $D$ est l'ensemble des points équidistants de $F$ et $D$. En choisissant un repère tel que la droite $D$ ait pour équation $y = 0$ et en prenant $F(0, 1)$, $M(x, y)$ appartient à la parabole si

$$|y| = d(M, D) = d(M, F) = \sqrt{(y-1)^2 + x^2}$$

donc en passant au carré :

$$y^2 = (y-1)^2 + x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2+1}{2}$$

La parabole est donc (ici) un graphe de fonction, donc un cas particulier de courbe paramétrique. On peut trouver son équation en polaire, en prenant $F$ comme origine et la directrice verticale (donc l'équation de la droite devient par exemple $y = -1$) sous la forme

$$\rho = \frac{1}{1 + \sin(\theta)}$$

cf. l'exercice sur les coniques données par foyer et directrice, qui traite aussi le cas des hyperboles. On peut aussi faire à titre d'exercice l'étude de la courbe en polaire :

$$\rho = \frac{A}{1 + e\cos(\theta)}$$

lorsque $e = 1$ et $e > 1$.

Un intérêt majeur de la parabole en optique est que les rayons incidents perpendiculaires à la directrice se réfléchissent en passant par le foyer (on peut même montrer que cela caractérise une parabole). Illustration-démonstration avec Xcas dans un niveau de géométrie taper les commandes

```
P:=plotfunc(x^2/2+1/2,x=-5..5);
supposons(a=[-1.4,-5,5,0.1]);
D:=line(x=a,color=red);
M:=inter_unique(P,D);
T:=tangent(P,M);
R:=symetrie(T,D,color=red);
trace(R);
```

puis faire varier $a$ en cliquant sur les flèches. Pour tester en ligne, commencez par initialiser la trace en exécutant

```
purge(x,y);L:=[]
```

"No such variable x", "No such variable y", []

puis faites varier $a$ en cliquant sur le bouton + ou − :

```
a:=0.6;gl_x=-5..5;gl_y=0..6;P:=plotfunc(x^2/2+1/2,x=-5..5
);D:=line(x=evalf(a),color=red);M:=single_inter
(P,D);T:=tangent(P,M);R:=symetrie(T,D,color=red
);L:=append(L,R)
```

Noter la valeur
`inter_unique(R,line(x=0))`
elle est indépendante de $a$ et est le foyer. On peut montrer qu'une courbe ayant cette propriété est une parabole.

### 10.7.3 Hyperbole

Une hyperbole de foyers $F$ et $F'$ est définie comme l'ensemble des points $M$ tels que :

$$|MF - MF'| = 2a$$

où $a$ est une constante telle que $2a > 2c = FF'$, avec une excentricité $e = c/a > 1$.

En physique, les hyperboles interviennent dans les trajectoires non périodiques en mécanique céleste, mais aussi comme courbes de déphasage constant entre deux sources situées aux deux foyers (les figures d'interférence font apparaitre des hyperboles).

On peut faire un calcul analogue à celui de l'ellipse,

$$MF - MF' = \pm 2a,\ MF + MF' = \frac{MF^2 - MF'^2}{MF - MF'} = - \pm 2ex$$

on en déduit que

$$MF = \pm(a - ex)$$

l'équation cartésienne de l'hyperbole dans le repère centré au milieu des foyers, d'axe $Ox$ l'axe des foyers est donc :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$$

On peut paramétrer les deux branches de l'hyperbole par

$$x(t) = \pm a\cosh(t), y(t) = a\sqrt{e^2-1}\sinh(t)$$

et en polaires

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta)}$$

Exercice : faire l'étude de la courbe paramétrée et montrer que l'hyperbole admet deux asymptotes d'équation $y = \pm\frac{b}{a}x$.

### 10.7.4 Paramétrisation rationnelle

Si on connait un point d'une conique, on peut effectuer un changement d'origine en ce point, l'équation cartésienne devient

$$P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$$

On suppose que $(d,e) \neq (0,0)$ [5]. On cherche alors l'intersection de la conique avec la droite $y = tx$ (de pente $t$), on va voir que la droite coupe en général la conique en deux points, l'origine et un autre point dont on calcule les coordonnées en fonction de $t$ [6]. Graphiquement, par exemple

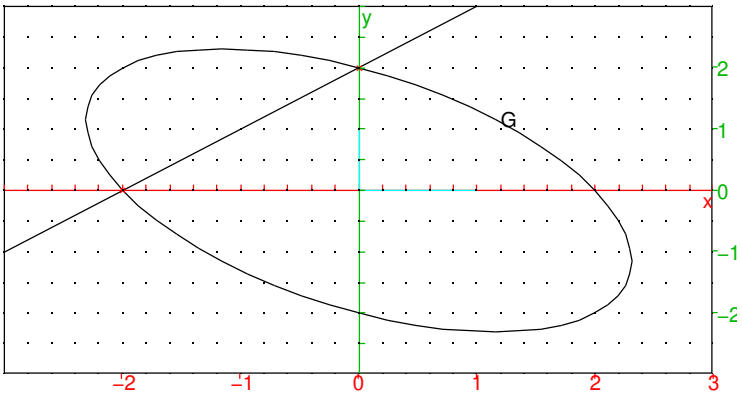
```
L:=NULL:;
```

"Done"

```
T:=1;purge(x,y);eq:=x^2+y^2+x*y-4:; gl_x=-3..3;gl_y=-3..3;G:=implicitp
(eq);D:=line(y=evalf(T)*(x+2)); L:=L,inter
(G,D,color=red)
```

5. Si $d = e = 0$, le polynôme est homogène et se factorise, on obtient l'origine ou la réunion de deux droites

6. Cette méthode fonctionne pour les coniques, mais ne fonctionne malheureusement pas pour n'importe quelle équation cartésienne




puis faire varier la valeur de $t$ ou d'un des coefficients de l'équation. En effet on obtient une équation du second degré en $x$, qui se factorise par $x$, l'autre solution donne alors $x$ comme fraction rationnelle en $t$, puis $y = tx$.

$$(ax + btx + ct^2x + d + et)x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{-d - et}{ct^2 + bt + a}$$

Comme dans le premier exemple sur le cercle trigonométrique, on n'obtient pas toujours toute la conique (s'il existe un autre point d'abscisse $x = 0$).

Si on cherche les points où le dénominateur en $t$ s'annule, on doit calculer (pour $c \neq 0$ et en supposant que la fraction $\frac{-d-et}{ct^2+bt+a}$ est irréductible [7]) le discriminant [8] de l'équation du second degré

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Il y a trois cas possibles :

7. sinon, on aura deux droites parce que le polynôme $P(x, y)$ se factorise en produit de deux facteurs de degré 1 dont $dx + ey$

8. On peut aussi voir ce discriminant comme le déterminant de la matrice de la forme quadratique associée

— si $b^2 < 4ac$, il n'y a pas de racine, le paramétrage est défini pour tout $t$ et les limites en $\pm\infty$ de $x$ sont nulles (car $c \neq 0$ puisque $4ac > b^2$), la conique est bornée, c'est une ellipse.
— si $b^2 = 4ac$, il y a une racine double, qui engendre une étude de branche infinie en $t = -b/(2c)$, on obtient une parabole (deux branches selon que $t$ tend vers $-b/(2c)$ par la droite ou la gauche). Il n'y a pas d'asymptote, on a bien $y/x = t$ qui tend vers $t_0 = -b/(2c)$, mais $y - t_0 x$ ne converge pas (le numérateur a une racine simple qui ne compense pas la racine double au dénominateur)
— si $b^2 > 4ac$, il y a deux racines distinctes $t_\pm$ , donc deux valeurs de $t$ où il faut faire une étude de branche infinie, on a alors une hyperbole avec 4 branches infinies et deux asymptotes parallèles à $y = t_\pm x$ (en effet le rapport $y/x = t$ tend bien vers $t_\pm$ et $y - t_\pm x$ a une limite car la racine au dénominateur de $x$ et $y$ est simple donc il y a simplification avec le numérateur)

**Exercice** : paramétrer et faire l'étude des coniques :
$x^2 + 4y^2 + 2xy = 4, x^2 - 3y^2 + 2xy = 4$

**Remarque** : on a vu que les ellipses, paraboles, hyperboles admettent une équation réduite du second degré. On en déduit facilement que leur équation dans un repère quelconque est toujours du second degré. Réciproquement, pour une équation cartésienne on a calculé une paramétrisation rationnelle, mais pas démontré que c'était forcément une conique. Pour faire cela, l'outil adapté est l'étude des formes quadratiques. On peut toutefois le faire à la main en dimension 2, en faisant une rotation $x, y \to X, Y$ pour annuler le coefficient de $XY$. Par exemple

```
restart; z:=(X+i*Y)*exp2trig(exp(i*alpha
));x:=re(z); y:=im(z);tlin(coeff(a*x^2+b*x*y+c*y^2,
[X,Y],[1,1]))
```

$[A, B, \text{Base}, D, E, F, G, K, L, M, N, P, P_1, Q, Q_1, R, S, \text{Somme}, T, X, Y, a, b, d, \text{descartes}, \text{eq}, \text{etat}, f$

on voit que l'angle de la rotation à effectuer vérifie

$$(c-a)\sin(2d) + b\cos(2d) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(2d) = \frac{b}{a-c}$$

# Chapitre 11

# Propriétés métriques des courbes.

## 11.1 Longueur d'arc

La longueur $ds$ d'un morceau de courbe régulier parcouru pendant un petit intervalle de temps $dt$ est égal au premier ordre à la longueur du segment tangent parcouru, ou encore au produit de la norme de la vitesse instantanée par $dt$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$$

On remarque que cette quantité est invariante par changement de paramétrage, si $t = t(\tau)$ alors

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2}\, dt \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}^2 + \frac{dy}{d\tau}^2\right)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2}\,|\frac{dt}{d\tau}|d\tau \\ &= \sqrt{\frac{dx}{d\tau}^2 + \frac{dy}{d\tau}^2}\, d\tau \end{aligned}$$

On en déduit

**Proposition 18** *La longueur d'un arc de courbe entre les points de paramètre $t_0$ et $t_1$ vaut*

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$$

*En coordonnées polaires :*

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r'^2 + r^2}d\theta$$

**Remarque** : il est très rare que l'on puisse effectuer le calcul explicite d'une primitive de $\sqrt{x'^2 + y'^2}$, il faut alors se contenter d'une valeur approchée de l'intégrale lorsque $t_0$ et $t_1$ ont des valeurs numériques, calculée par des méthodes numériques qui généralisent la méthode des rectangles (cf. le cours de mat249). Ce calcul se fait avec Xcas (ou une calculatrice formelle) en donnant une valeur approchée à l'une des bornes. Il y a quelques exceptions par exemple la longueur

d'un arc de parabole se calcule avec une formule explicite (essayez la commande `int(sqrt(1+4t^2),t,t0,t1)` ou

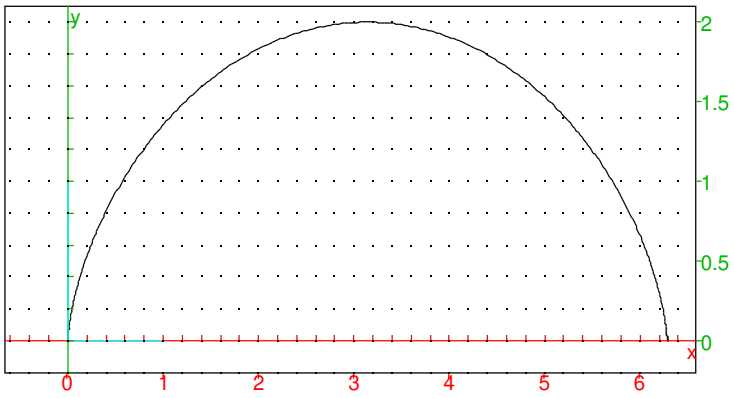
```
t:='t';arclen([t,t^2],t,t0,t1)
```

"No such variable t", $\frac{2t_1\sqrt{4t_1^2+1}-\ln\left(-2t_1+\sqrt{4t_1^2+1}\right)}{4}-\frac{2t_0\sqrt{4t_0^2+1}-\ln\left(-2t_0+\sqrt{4t_0^2+1}\right)}{4}$

La cycloïde [1]

$$x(t)=R(t-\sin(t)), y(t)=R(1-\cos(t))$$

```
plotparam([t-sin(t),1-cos(t)],t,0,2*pi)
```




admet aussi une formule simple pour sa longueur

1. qui tire son nom de la trajectoire d'un point fixé à un cercle roulant sans glisser sur une droite, par exemple l'extrémité d'un rayon sur une roue de vélo.

```
arclen([t-sin(t),1-cos(t)],t,0,2*pi)
```

$$8$$

Par contre, la longueur d'un arc d'ellipse ne se calcule pas avec les fonctions usuelles (pour pouvoir le faire, il faut introduire des fonctions spéciales adaptées, appelées intégrales elliptiques) :

```
a:=int(sqrt(sin(t)^2+4*cos(t)^2),t,0,2*pi
); evalf(a)
```

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t, 9.68844822055$$

## 11.2 Courbure, repère de Frenet, accélération normale et tangentielle.

Si on choisit $s$, la longueur d'arc, comme nouveau paramètre de temps, la longueur parcourue est égale au temps, donc la vitesse instantannée par rapport à $s$ est de norme 1. On peut aussi le voir en notant $M(t) = (x, y)$ :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{ds}\frac{ds}{dt} \;\Rightarrow\; \|\frac{dM}{dt}\| = \|\frac{dM}{ds}\|\|\frac{ds}{dt}| \;\Rightarrow\; v = \|\frac{dM}{ds}\|v$$

où $v$ est la norme de la vitesse avec $t$ comme paramètre, donc $\|\frac{dM}{ds}\|$ est bien égal à 1.

Calculons maintenant l'accélération avec ce nouveau paramètre $s$. Comme la vitesse est de norme constante égale à 1, donc de carré 1, en dérivant $(dM/ds)^2$ par rapport à $s$, on vérifie que l'accélération est perpendiculaire à la vitesse pour ce paramétrage par la longueur d'arc $s$. L'accélération par rapport à $s$ est donc portée par la normale à la trajectoire, et sa mesure algébrique est appelé courbure (signée), notée $\kappa$, la valeur absolue de l'inverse de $\kappa$ est appelé le rayon de courbure (la direction de l'accélération pointe vers le centre de courbure).

$$\frac{d^2M}{ds^2} \perp \vec{v}, \quad \|\frac{d^2M}{ds^2}\| = |\kappa| = \frac{1}{R}$$

Si on se déplace sur un cercle de centre $O$ et de rayon $R$ à vitesse 1, alors $x(t) + iy(t) = Re^{it/R}$, la vitesse est donnée par $x' + iy' = ie^{it/R}$ donc de norme 1, et l'accélération par $x'' + iy'' = -\frac{1}{R}e^{it/R}$, sa norme vaut $1/R$ et sa direction pointe vers le centre du cercle. Donc la courbe est, à l'ordre 2 au point considéré, identique à un cercle de rayon $R$.

Revenons au paramètrage initial $t$. Dérivons par rapport à $t$ la vitesse $\frac{dM}{dt} = v\frac{dM}{ds}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \frac{d^2M}{dt^2} &= \frac{dv}{dt}\frac{dM}{ds} + v\frac{d}{dt}\left(\frac{dM}{ds}\right) \\
&= \frac{dv}{dt}\frac{dM}{ds} + v\frac{ds}{dt}\frac{d^2M}{ds^2} \\
&= \frac{dv}{dt}\frac{dM}{ds} + v^2\frac{d^2M}{ds^2}
\end{aligned}$$

L'accélération se décompose donc en deux parties

— le premier terme colinéaire au vecteur tangent est l'accélération tangentielle, de norme $v'$,

— le second terme perpendiculaire au vecteur tangent est l'accélération normale, dont la norme est $v^2/R$, où $R$ est le rayon de courbure

Autre formule de calcul du rayon de courbure : l'accélération normale $a_n$ vaut $v^2/R$ donc

$$\|\vec{a}\wedge\vec{v}\| = a_n\|\vec{v}\| = \frac{v^3}{R} \;\Rightarrow\; R = v^3/\|\vec{a}\wedge\vec{v}\| = \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}^3}{|x'y''-y'x''|}$$

**Proposition 19** *On appelle repère de Frenet en un point $M$ régulier d'une courbe, le repère orthonormé direct formé par le point de la courbe, le vecteur tangent $\vec{T}$ et le vecteur normal $\vec{N}$. On a alors*

$$\vec{v} = v\vec{T} = \frac{ds}{dt}\vec{T}, \quad \frac{d}{ds}\vec{T} = \kappa\vec{N}, \frac{d}{ds}\vec{N} = -\kappa\vec{T}, \quad R = \pm\frac{1}{\kappa},$$

*(l'avant-dernière formule vient du fait que $\{\vec{T},\vec{N}\}$ est une base orthonormée directe, le signe $\pm$ est déterminé par la convexité de la courbe), et :*

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{dv}{dt}\vec{T} \pm \frac{v^2}{R}\vec{N}, \quad R = \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}^3}{|x'y''-y'x''|}$$

*On appelle centre de courbure le point $\Omega = M + \frac{1}{\kappa}\vec{N}$. Le cercle de centre $\Omega$ passant par $M$ (de rayon $R$) est appelé cercle osculateur en $M$ à la courbe.*

**Exemple** : calcul du cercle osculateur en un point d'une parabole $(t,t^2)$.

$$x'=1, y'=2t,\ \vec{T} = (\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}), \quad y''=2 \quad R = \frac{\sqrt{1+4t^2}^3}{2}$$

```
t0:=0;gl_x=-5..5; gl_y=0..6;G:=plotparam
([t,t^2],t=-2.3..2.3,color=red);M:=point
(evalf(t0),t0^2,affichage=point_croix+epaisseur_point_3
);T:=tangent(G,evalf(t0));N:=normalize([-slope
(T),1]); R:=(1+4t0^2)^(3/2)/2;C:=circle(M+R*N,R);
```

Avec Xcas version 1.1.1-18 ou supérieure, on peut taper directement :
`C:=cercle_osculateur(G,M)`

**Remarques** :

— La courbure est aussi la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne de l'angle $\theta$ fait par la tangente avec une direction fixe, par exemple l'axe $Ox$. En effet $\vec{T} = (\cos(\theta),\sin(\theta))$, dont la dérivée est le produit de $\theta'$ par le vecteur normal $\vec{N}$.

— Génériquement, une courbe reste du même coté de sa tangente (car le terme suivant dans le développement est d'ordre 2, de signe constant en 0), les exceptions sont les points d'inflexion. Par contre, génériquement une courbe traverse son cercle osculateur (en y rentrant ou en en sortant), car le terme suivant dans le développement de la différence entre les points des deux courbes est d'ordre 3 et change donc de signe en 0. Les exceptions (tangeance courbe-cercle osculateur d'ordre 3 au lieu de 2) sont appelés sommets d'une courbe, par exemple le sommet d'une parabole.

— on peut calculer les coordonnées du centre du cercle osculateur de manière algébrique (i.e. sans introduire de racines carrées) à partir des coordonnées paramétriques de $M$ et de ses dérivées
— la courbe $D$ décrite par les $\Omega$ lorsque $M$ parcourt la courbe étudiée $C$ est appelée **développée** de la courbe $C$. La vitesse de $\Omega$ vaut

$$\frac{d}{dt}(M+\frac{1}{\kappa}\vec{N}) = v\vec{T} + \frac{d\frac{1}{\kappa}}{dt}\vec{N} + \frac{1}{\kappa}v(-\kappa\vec{T}) = \frac{d\frac{1}{\kappa}}{dt}\vec{N}$$

on en déduit que la tangente à la développée en $\Omega$ a pour direction la normale $\vec{N}$ (si $\kappa$ admet un point critique, par exemple en un sommet de la courbe, la développée admet génériquement un point de rebroussement [2]).
*L'enveloppe* [3] *des normales à une courbe est donc sa développée.*
Exemple : développée de l'ellipse $(2\cos(t), \sin(t))$
Initialiser la trace avec `L:=[]`

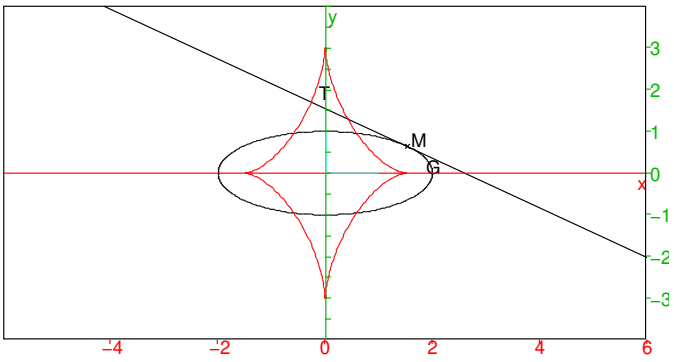
[]

puis faire varier $t0$ :

```
t0:=0.7;gl_x=-6..6;gl_y=-4..4;G:=plotparam
([2*cos(t),sin(t)],t=0..2*pi);M:=element
(G,evalf(t0));T:=tangent(M);N:=perpendiculaire
(M,T);L:=append(L,N);evolute(G,color=red)
```

2. On peut montrer qu'une courbe convexe admet au moins 4 sommets (théorème des quatre sommets), sa développée admet donc au moins 4 points de rebroussements.

3. L'enveloppe d'une famille de droites est une courbe dont l'ensemble des tangentes est la famille de droite




On observe 4 sommets pour l'ellipse, situés sur les grands et petits axes, et donc 4 points de rebroussements pour la développée. Ouvrir un niveau de géométrie 2d dans Xcas, taper une commande par ligne

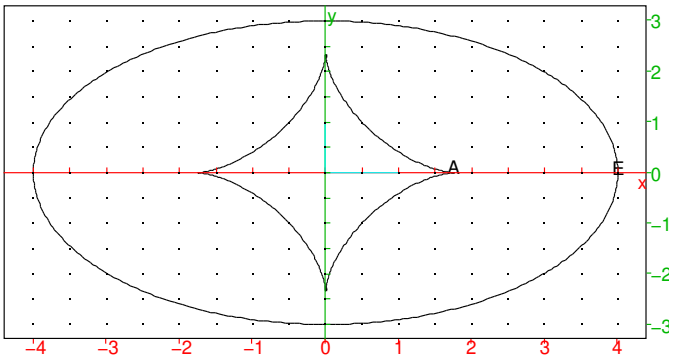
```
G:=plotparam([2*cos(t),sin(t)],t=0..2*pi);
M:=element(G);
T:=tangent(M);
N:=perpendiculaire(M,T);
trace(N)
```

passer en mode pointeur (menu mode du niveau de géométrie) et faire bouger le point $M$ le long d'un quart de l'ellipse, ceci trace un faisceau de normales à l'ellipse, dont on voit apparaitre l'enveloppe (limite entre la région couverte et non couverte par des points du faisceau de normales), cette enveloppe est la développée de l'ellipse (vous pouvez utiliser le menu M à droite du dessin pour effacer les traces). Avec Xcas version 1.1.1-18 ou ultérieure on peut tracer la développée avec la commande `developpee(G)`. Cf. aussi les animations de l'article Développée de wikipedia.

**Exercice** : calculer le repère de Frenet pour une ellipse $E$, par exemple $x(t) = 4\cos(t), y(t) = 3\sin(t)$ puis le rayon de courbure, puis la développée $A$ (on obtient une courbe image par affinité d'une astroïde). Donner une équation paramétrique simple de $A$.

Vérification avec Xcas (version à jour) :

```
E:=plotparam([4cos(t),3sin(t)],t,0,2pi);
 A:=evolute(E);
```




```
eq:=simplify(parameq(A)); trigcos(re(eq)); im(eq)
```

$$\frac{-21\tan^6\left(\frac{t}{2}\right)+63\tan^4\left(\frac{t}{2}\right)-224\mathrm{i}\tan^3\left(\frac{t}{2}\right)-63\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)+21}{12\tan^6\left(\frac{t}{2}\right)+36\tan^4\left(\frac{t}{2}\right)+36\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)+12}, 14\cos^6\left(\frac{t}{2}\right)-21\cos^4\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{21}{2}\cos^2\left($$

— De plus, comme $\vec{N}$ est normé, la longueur d'arc de courbe de la développée est donnée par :

$$\int_{t_0}^{t_1}\left|\frac{d\frac{1}{\kappa}}{dt}\right|\,dt=\left|\left[\frac{1}{\kappa}\right]_{t_0}^{t_1}\right|=|R(t_1)-R(t_0)|$$

Conséquence : si on enroule un fil sur la développée $D$, que ce fil est tendu et que son extrémité coïncide, avant de commencer à le dérouler, avec un point de la courbe $C$ alors dans la suite du déroulé, l'extrémité parcoura la courbe $C$ (on dit que $C$ est une développante de $D$).

— si la courbure est de signe constant, les cercles osculateurs sont inclus les uns dans les autres, c'est une conséquence de la remarque précédente,

de l'inégalité triangulaire et du fait que la distance entre deux centres de cercles osculateurs est plus petite que la longueur d'arc sur la développée. Comme les points de la courbe sont sur des cercles osculateurs, il en résulte que la courbe entre ou sort définitivement du cercle osculateur au point de contact.

— La développée peut servir à calculer une caustique en optique. On envoie des rayons lumineux parallèle à une direction fixée vers un miroir ayant la forme de la courbe $C$ la **caustique** est l'enveloppe des rayons lumineux réfléchis (que l'on observe par une plus grande intensité lumineuse). On peut montrer que la caustique est la développée de l'anticaustique de $C$ par rapport à une droite perpendiculaire aux rayons lumineux (pour déterminer l'anticaustique d'une courbe par rapport à une droite, on prend un point de la courbe, on le projète sur la droite puis on prend le symétrique du projeté par rapport à la tangente à la courbe au point choisi, l'anticaustique est le lieu de ces symétriques). Cf. dans Xcas la session exemple du menu `Exemple, geometrie, caustique`. Les développées peuvent aussi servir dans le calcul de caustiques par réfraction : `http://www.mathcurve.com/courbes2d/caustic/caustic.htm`

— On peut faire une étude analogue pour une courbe dans l'espace, dans ce cas la dérivée de $\vec{N}$ par rapport à l'abscisse curviligne $s$ fait intervenir une composante sur le troisième vecteur du repère direct $\vec{T}\wedge\vec{N}=\vec{B}$ ($\vec{B}$ comme binormal), appelé torsion.

— **Équation intrinsèque d'une courbe :**
Il s'agit de trouver une courbe vérifiant une relation entre la courbure (ou rayon de courbure) et l'abscisse curviligne, par exemple la relation $Rs=b^2$ avec $b>0$ fixé.[4] Pour trouver une telle courbe, on la paramètre par l'abscisse curviligne $s$, donc la vitesse $dM/ds$ est de norme 1 et caractérisée par l'angle $\phi(s)$ fait avec une direction fixe, on a alors $\phi'(s)=1/R$ et on en tire $\phi(s)$ puis $M(s)$. Dans l'exemple, on a $\phi'(s)=s/b^2$, donc $\phi(s)=s^2/(2b^2)$ (en choisissant la direction fixe pour annuler la constante d'intégration), puis :

$$\frac{dM}{ds}=\left(\cos\left(\frac{s^2}{2b^2}\right),\sin\left(\frac{s^2}{2b^2}\right)\right)$$

puis en choisissant l'origine du repère :

$$M(s)=\left(\int_0^s\cos\left(\frac{u^2}{2b^2}\right)\,du,\int_0^s\sin\left(\frac{u^2}{2b^2}\right)\,du\right)$$

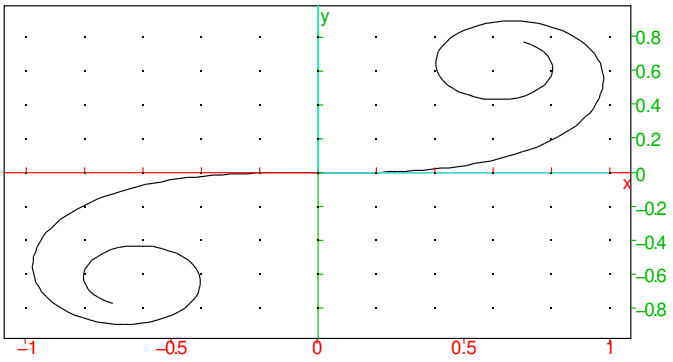
en posant $u=\sqrt{2}bv$ on a aussi

$$M(s)=\sqrt{2}b\left(\int_0^{\frac{s}{\sqrt{2}b}}\cos(v^2)\,dv,\int_0^{\frac{s}{\sqrt{2}b}}\sin(v^2)\,dv\right)$$

4. Ce type de courbe, appelé spirale d'Euler ou de Fresnel ou clothoïde, est utilisée pour faire des raccordements de chemin de fer (ou de route) entre une portion rectiligne, où l'accélération normale est nulle, et un arc de cercle, où l'accélération normale est constante, en effet si $Rs=b^2$ est constant alors l'accélération normale varie linéairement en fonction de l'abscisse curviligne donc du temps à vitesse constante. C'est plus agréable pour les passagers qui passent d'une accélération nulle à une accélération constante progressivement, mais aussi pour créer une pente progressive latérale sur les rails pour compenser la force centrifuge par la gravité et éviter une usure prématurée du rail.

Pour $b = 1/\sqrt{2}$, le tracé est obtenu par la commande

```
plotparam(int(exp(i*t^2),t,0,s),s=-3..3,tstep=0.03
)
```



# Chapitre 12

# Représentation des courbes implicites.

Certaines représentations graphiques nécessitent peu d'outillage mathématique, ainsi les fonctions, les courbes paramétrique et polaires peuvent être représentées en échantillonant une ou plusieurs expressions selon une discrétisation donnée explicitement par l'utilisateur ou par des paramètres par défaut, les points obtenus étant ensuite reliés par des segments. On pourrait bien sur automatiser avec le calcul formel l'étude de la courbe (tableaux de variations, asymptotes, points singuliers, etc.).

Par contre les courbes données par une équation implicite font intervenir des algorithmes et des mathématiques plus intéressantes. En dimension 2, on se donne donc une équation $f(x, y) = 0$ et on suppose $f$ suffisamment régulière. Supposons la courbe non vide, soit $(x_0, y_0)$ un point de cette courbe, si $(\partial_x f, \partial_y f)(x_0, y_0) \neq 0$ on peut appliquer le théorème des fonctions implicites et la courbe est localement comme une courbe de fonction (en $x$ ou en $y$). On en calcule la tangente et on peut suivre cette tangente un pas de discrétisation puis utiliser une méthode numérique de recherche de solution près de la tangente. Ces points sont appelés **points réguliers**

Les points où $(\partial_x f, \partial_y f) = 0$ sont les **points singuliers**. Génériquement, il n'y en a pas puisque cela donne 3 équations à 2 inconnues, par contre si on s'intéresse à une famille de courbes dépendant d'un paramètre, il en apparait. En ces points, on calcule le développement de Taylor et on recherche le premier terme homogène non nul (homogène après translation bien sur), par exemple $P_2 = x^2 - y^2$ pour $x^3 + x^2 - y^2$ en $(0, 0)$. Supposons que le polynôme correspondant $P_m$ est sans racines multiples, et (quitte à faire une rotation) que le coefficient de $y^m$ est non nul. $P_m$ est un polynôme homogène donc se factorise au moins numériquement (en remplaçant une des variables par 1, on est ramené en dimension 1), et on montre qu'il y a $m$ arcs de courbe complexes tangents aux droites d'équations ces $m$ facteurs (et au plus $m$ arcs de courbe réels si on ne garde que les racines réelles). En effet, on pose $y = xY$ et on est amené à résoudre

$$f(x, xY) = 0 = x^m P_m(1, Y) + x^{m+1} g(x, Y)$$

où $g$ est un polynôme si $f$ est un polynôme (plus généralement a la même régularité que $f$). Après simplification par $x^m$, on peut appliquer le théorème des fonctions

implicites pour déterminer $Y$ en fonction de $x$ au voisinage de $x = 0$ et de chacune des racines de $P_m(1, Y)$ en $Y$ (puisque les racines sont simples). Le point est dit **singulier-régulier** ou singulier ordinaire. C'est ce que fait la commande `implicitplot` de Xcas (affichage des informations intermédiaires).

Si le point singulier n'est pas ordinaire, l'équation devient

$$(Y-t)^k \prod_i (Y-t_i) + xg(x,Y) = 0, \quad k > 1$$

et il faut faire intervenir des puissances fractionnaires en $x$ (dépendant de termes supérieurs du développement de Taylor de $f$ en $(0,0)$) pour désingulariser les $k$ arcs de courbes ayant même tangente $y = tx$ en $(0,0)$. Par exemple si $g(0,t) \neq 0$, on pose $X = x^{1/k}, Y = t + XZ$ qui donne

$$Z^k \prod_i (t - t_i + XZ) + g(X^k, t + XZ) = 0$$

pour $X = 0$ on a alors $k$ solutions non nulles $Z$ qui se prolongent au voisinage de $X = 0$ par le théorème des fonctions implicites.

Certains cas particuliers peuvent être traités en transformant la courbe implicite en courbe paramétrique, c'est le cas des courbes algébriques de degré 2, qui sont des **coniques**. On peut les paramétrer rationnellement si on en connait un point (en prenant la droite passant par ce point de pente $m$ et en cherchant l'autre point d'intersection avec la conique (il y en a forcément un et un seul autre, parce que l'équation correspondant aux points d'intersection est de degré 2 et on connait déjà une solution), cette paramétrisation est intéressante pour faire du calcul formel, mais moins pour des représentations graphiques, on lui préferera une paramétrisation trigonométrique pour une conique ou exponentielle pour une hypebole, par exemple $(\cos(t), \sin(t))$ plutot que $\frac{1+it}{1-it}$ pour le cercle unité, paramétrisation obtenue en calculant les éléments propres de la conique (`conique_reduite`). Pour les courbes algébriques de degré plus grand, on commence par factoriser le polynôme, c'est une factorisation absolue (section **??**) qui est nécessaire (ou au moins numérique dans $\mathbb{C}[x, y]$). Pour le moment, Xcas fait simplement une factorisation sur le corps des coefficients, et repère les équations de coniques.

# Chapitre 13

# Formes différentielles et intégrales curvilignes

Il s'agit dans cette section de calculer des intégrales le long de l'arc. Cela intervient par exemple pour calculer le travail d'une force au cours d'un déplacement le long d'une courbe ou la quantité de chaleur/travail pendant un cycle en thermodynamique (le long d'une courbe dans le plan défini par deux coordonnées indépendantes comme par exemple pression-température ou pression-volume). Dans les cas favorables, on a un analogue des primitives, on peut calculer un potentiel et faire la différence de potentiel entre les deux extrémités du chemin pour calculer l'intégrale curviligne. On va d'abord définir ce qu'on peut intégrer le long d'une courbe, à savoir une forme différentielle (aussi appelée 1-forme), puis on donnera quelques résultats sur les formes fermées et exactes (c'est le cas favorable, il correspond aux forces conservatives en mécanique ou aux différentielles totales de fonctions d'état en thermodynamique).

## 13.1 Forme différentielle

Soit $V(x,y)$ une fonction de deux variables continument dérivable. On s'intéresse aux variations de $V$ lorsqu'on se déplace dans le plan depuis le point $M(x,y)$ dans une direction donnée à la vitesse $w$. On a alors une formule équivalente à celle de la dérivée d'une fonction d'une variable :

**Proposition 20** *Pour tout vecteur $w=(w_1,w_2)$, la dérivée de $V$ en $(x,y)$ dans la direction $w$ est donnée par :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{V((x,y)+wh)-V(x,y)}{h}=\partial_x V w_1+\partial_y V w_2$$

*On appelle* **différentielle** *de $V$ et on note $dV$ l'application qui en un point $(x,y)$ associe au vecteur $w$ la valeur de la dérivée directionnelle de $V$ en $(x,y)$ selon $w$*

$$dV(w)=\partial_x V w_1+\partial_y V w_2$$

*Cette application est linéaire par rapport à $w$.*

En effet :

$$\begin{aligned} V(x+w_1h, y+w_2h) &= V(x+w_1h, y) + \partial_y V(x+w_1h, y)w_2h + o(h) \\ &= V(x,y) + \partial_x V(x,y)w_1h + \partial_y V(x+w_1h, y)w_2h + o(h) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{V(x+w_1h, y+w_2h) - V(x,y)}{h} &= \partial_x V(x,y)w_1 + \partial_y V(x+w_1h, y)w_2 + o(1) \\ \to_{h\to 0} & \partial_x V(x,y)w_1 + \partial_y V(x,y)w_2 \end{aligned}$$

**Exemples** :

— la dérivée de $V$ selon la direction $(1,0)$ (axe des $x$) est $\partial_x V$ et selon la direction $(0,1)$ (axe des $y$) est $\partial_y V$.

— Soit $A(a,b)$ et $V(x,y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ la distance de $A$ au point $M(x,y)$. Alors $dV$ existe en tout point $M$ différent de $A$ et $(\partial_x V, \partial_y V) = (x-a, y-b)/AM$ est le vecteur unitaire porté par $\to AM$.

**Remarque : Différentielle et gradient**

La différentielle $dV$ a les mêmes composantes que le **gradient** de $V$ (`gradient(V,[x,y])` avec Xcas), mais ce ne sont pas les mêmes objets : en un point donné $dV$ est une application linéaire (qui a un sens indépendamment de la définition d'un produit scalaire) alors que $\nabla V$ est un vecteur (dont la relation avec la dérivée directionnelle dépend du produit scalaire), on a pour tout vecteur $w$ la relation

$$dV(w) = \nabla V.w$$

On a la même relation entre le travail d'une force (qui est une forme linéaire qui s'applique sur les vecteurs déplacement) et la force correspondante (qui est un vecteur défini à l'aide du produit scalaire). On parle parfois de vecteur covariant pour la différentielle (et vecteur contravariant pour le gradient).

**Applications** :

— Tangente à une courbe de niveau :
le vecteur tangent en un point $M$ d'une courbe de niveau de $V$ est dans le noyau de l'application linéaire $dV$ en ce point (puisque $V$ est constant le long de le courbe), ou de manière équivalente $\nabla V$ est orthogonal à la courbe de niveau.

— Calcul du gradient en coordonnées polaires.
le repère $\{e_r, e_\theta\}$ est orthonormé, pour connaitre les coordonnées de $\nabla V$ dans ce repère il suffit de calculer la dérivée directionnelle de $V$ dans les directions $e_r$ et $e_\theta$ car :

$$\nabla V.e_r = dV(e_r), \quad \nabla V.e_\theta = dV(e_\theta)$$

Or la dérivée directionnelle selon $e_r$ est la dérivée partielle de $V$ par rapport à $r$, et la dérivée directionnelle selon $e_\theta$ est la dérivée partielle de $V$ par rapport à $\theta$ divisée par $r$ (il faut diviser par $r$ parce qu'on se déplace tangentiellement au cercle de rayon $r$), donc

$$\nabla V = \partial_r V e_r + \frac{1}{r}\partial_\theta V e_\theta$$

— Tangente et la normale en un point $M$ d'une ellipse :
Ce sont la bissectrice extérieure et intérieure issues de $M$ du triangle défini par $M$ et les foyers. Cela vient du fait que le gradient de la distance $FM$ est le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{FM}$ et que l'ellipse est courbe de niveau de la somme des distances aux foyers. On retrouve ainsi qu'un rayon lumineux issu d'un foyer se réfléchit sur l'ellipse en passant par l'autre foyer.
— De même on peut déterminer géométriquement la tangente et la normale à une parabole, ce sont les bissectrices issues de $M$ de la droite $MF$ (où $F$ est le foyer) et de la perpendiculaire en $M$ à la directrice de la parabole, on retrouve ainsi que les rayons lumineux perpendiculaires à la directrice se réflechissent sur la parabole en passant par le foyer) et à une hyperbole (comme pour une ellipse).

On note donc $dx$ [resp. $dy$] la différentielle de $V(x,y) = x$ [resp. $V(x,y) = y$] [1] on a :

$$dV = \partial_x V dx + \partial_y V dy$$

Une **forme différentielle** $\omega$ est la généralisation de la différentielle d'une fonction, elle s'écrit sous la forme

$$\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

où $M$ et $N$ sont des fonctions des deux variables $x, y$, mais pas forcément les dérivées partielles d'une fonction $V$.

La définition géométrique d'une forme différentielle $\omega$ est la donnée en tout point du plan (ou d'un domaine ouvert du plan) d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$ [2] (ou en tout point de l'espace d'une application linéraire de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour une courbe de $\mathbb{R}^3$). Si on prend la base canonique de $\mathbb{R}^2$, une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est caractérisée par sa matrice qui possède une ligne et deux colonnes et a donc deux coefficients $M$ et $N$, une forme différentielle équivaut donc bien à la donnée d'un couple de fonction $M(x,y), N(x,y)$.

## 13.2 Intégrale curviligne

Ceci permet de donner la :

**Définition 21** *Pour calculer* **l'intégrale curviligne** *d'une forme différentielle le long d'un arc de courbe orienté, on choisit un paramétrage de l'arc continument dérivable par morceaux (on suppose qu'il en existe un), et on calcule l'intégrale usuelle par rapport au paramètre de la forme différentielle appliquée au vecteur tangent entre les deux valeurs du paramètre correspondant à l'origine et extrémité de l'arc de courbe :*

$$\int_\gamma \omega = \int_{t_0}^{t_1} \omega\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right) dt$$

1. Géométriquement, $dx$ [resp. $dy$] est la forme linéaire constante (i.e. indépendante du point du plan choisi) qui a tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ associe sa première [resp. deuxième] coordonnée :

$$dx(v_1, v_2) = v_1, \quad dy(v_1, v_2) = v_2$$

2. Pour être complet, on suppose de plus que cette application linéaire qui dépend du point du plan en dépend de manière continue voire différentiable

*En coordonnées,*

$$\int_\gamma \omega = \int_{t_0}^{t_1} (M(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + N(x(t),y(t)\frac{dy}{dt})\ dt$$

Exemple : on prend $\omega = ydx$ et on calcule l'intégrale curviligne le long de l'arc de parabole $(t,t^2)$ pour $t \in [0,1]$, on obtient

$$\int_0^1 t^2\ dt = \frac{1}{3}$$

En paramétrant par $(u^2,u^4)$ avec $u \in [0,1]$

$$\int_0^1 u^4(2u\ du) = \left[2\frac{u^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

on retrouve le même résultat.

La valeur de l'intégrale est bien définie indépendamment du paramétrage, en effet si on change de paramétrage avec une bijection $t \to u(t)$ envoyant $[t_0,t_1]$ sur $[u_0,u_1]$, on a (en utilisant la linéarité de $\omega$ à la deuxième ligne) :

$$\begin{aligned}\int_{u_0}^{u_1} \omega\left(\frac{d\gamma(u)}{du}\right) du &= \int_{t_0}^{t_1} \omega\left(\frac{dt}{du}\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)\frac{du}{dt}dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{du}\omega\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)\frac{du}{dt}dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \omega\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right) dt\end{aligned}$$

Attention à l'orientation, si on change d'orientation, on change le signe, par exemple si on parcourt l'arc de parabole de $(1,1)$ vers $(0,0)$, en utilisant le paramétrage $(1-t,(1-t)^2), t \in [0,1]$, on obtient l'opposé :

$$\int_0^1 (1-t)(-dt) = \left[\frac{(t-1)^2}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

Remarque : le travail d'une force $\overrightarrow{F} = (F_x,F_y)$ le long d'un arc de courbe est donné par l'intégrale curviligne de la forme différentielle $F_xdx + F_ydy$.

## 13.3 Forme différentielle exacte

Voyons maintenant à quelle condition il existe un analogue du calcul avec une primitive. On a :

$$\int_\gamma dV = V(\gamma(t_1)) - V(\gamma(t_0)),$$

En effet, si on est sur un morceau d'arc où on peut paramétrer par $x$ alors

$$\int_\gamma dV = \int_{x_0}^{x_1} \partial_x V\ dx = V(\gamma(t_1)) - V(\gamma(t_0))$$

De même si on peut paramétrer par $y$. On recolle alors les morceaux d'arcs (on peut paramétrer par $x$ ou par $y$ en tout point régulier de $\gamma$).

Pour une force qui dérive d'un potentiel, on a donc montré que le travail de la force se calcule en faisant la différence de potentiel entre les deux extrémités. Cette propriété, analogue au calcul d'intégrale classique en utilisant une primitive n'est pas automatique, car elle implique que l'intégrale curviligne ne dépend pas du chemin choisi pour relier les deux points. Or en thermodynamique, la chaleur est modélisée par une forme différentielle, mais la chaleur échangée dépend du chemin suivi (c'est vrai aussi en mécanique pour le travail de forces non conservatives comme les forces de frottement). En mathématiques, on parle de forme différentielle exacte ou non exacte.

**Définition 22** *Une forme différentielle $\omega$ est exacte s'il existe une fonction $V$ telle que sur tout arc de courbe $\gamma$ d'origine $A$ et extrémité $B$*

$$\int_\gamma \omega = V(B) - V(A)$$

*Attention la convention de signe est opposée à celle utilisée pour le* **potentiel** *d'une force en physique.*

Si on choisit comme chemin un segment entre deux points $A$ et $B$ d'ordonnées identiques $y$ et d'abscisses $x$ et $x+h$, alors

$$\int_x^{x+h} Mdx + Ndy = V(x+h, y) - V(x, y)$$

en faisant tendre $h$ vers 0, on a

$$M = \lim_{h\to 0} \frac{V(x+h, y) - V(x)}{h} = \partial_x V$$

De même $N = \partial_y V$. Réciproquement, si $M = \partial_x V$ et $N = \partial_y V$ alors $\omega = dV$ donc $\int_\gamma \omega = V(B) - V(A)$

**Proposition 23** *Une forme différentielle $\omega$ est exacte si et seulement si il existe une fonction $V$ telle que :*

$$\omega = \partial_x V dx + \partial_y V dy = dV$$

Si $V$ est deux fois continument différentiable alors $\partial_{yx} V = \partial_{xy} V$. D'où une condition nécessaire pour que $\omega$ soit exacte :

$$\partial_y M = \partial_{yx} V = \partial_{xy} V = \partial_x N$$

**Définition 24** *On appelle forme différentielle fermée une forme différentielle $\omega = Mdx + Ndy$ telle que $\partial_y M = \partial_x N$*

Une forme exacte est toujours fermée, mais la réciproque n'est pas toujours vraie, une forme fermée n'est pas forcément exacte, cela dépend où elle est définie. Si elle est définie dans un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ sans trou ($\mathbb{R}^2$ tout entier, un rectangle, un disque, etc.), on peut montrer qu'une forme fermée est une forme exacte, en

appliquant le théorème de Stokes (voir section suivante). Sinon, il existe des contre-exemples, comme sur le cercle unité

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

La forme est fermée :

```
simplify(diff(y/(x^2+y^2),y)-diff(-x/(x^2+y^2),x))
```

mais elle n'est pas exacte :

```
x:=cos(t); y:=sin(t);
int((y*diff(x,t)-x*diff(y,t))/(x^2+y^2),t,0,2*pi)
```

Pour trouver le potentiel $V$ dont une forme différentielle fermée $\omega = Mdx + Ndy$ est la différentielle, on résoud d'abord par exemple $M = \partial_x V$ en intégrant $M$ par rapport à $x$, $y$ étant considéré comme un paramètre, on obtient $V$ à une constante d'intégration près, cette constante d'intégration en $x$ peut dépendre de $y$, c'est donc une fonction $C(y)$, on remplace dans $N = \partial_y V$ et on intègre en $y$ pour trouver la valeur de $C(y)$ (à une constante près). Cette opération est executée par la commande `potential()` de Xcas.

Si une forme n'est pas fermée, elle n'est pas exacte, et on ne peut pas calculer une intégrale curviligne par différence de potentiel. Il peut arriver qu'en multipliant la forme par une fonction, on trouve une nouvelle forme qui elle est fermée, on parle alors de facteur intégrant. Par exemple en thermodynamique, la forme chaleur n'est pas fermée, mais en divisant par la température on obtient une forme fermée dont le potentiel est l'entropie. Cela peut aussi servir à trouver des constantes du mouvement pour certaines équations différentielles. En effet, si on se déplace le long d'une courbe de niveau du potentiel d'une forme exacte, alors le long de cette courbe le potentiel est constant, donc la forme appliquée au vecteur tangent est nulle, on dit que la courbe de niveau est une courbe intégrale de la forme différentielle (exacte).

## 13.4 Intégrale curviligne et intégrales doubles.

Terminons ce chapitre par le lien entre intégrale curviligne sur un lacet (chemin fermé) et intégrale double à l'intérieur du lacet. C'est évidemment surtout intéressant pour les formes non exactes, car si $\gamma$ est un lacet et $\omega$ une forme exacte, alors $\int_\gamma \omega = 0$. On a le théorème de **Stokes**, aussi appelé en dimension 2 formule de **Green-Riemann** :

**Théorème 25** *Si $U$ est un domaine de frontière orientée $\gamma$ continument dérivable ($\gamma$ est donc un chemin fermé parcouru une fois que l'on oriente dans le sens trigonométrique), et si $\omega = Mdx + Ndy$ est une forme différentielle continument dérivable alors :*

$$\int_\gamma \omega = \int\int_U d\omega := \int\int_U (\partial_x N - \partial_y M)\, dxdy$$

Idée de la preuve : on commence par le cas où $U$ est un rectangle $[a, b] \times [\alpha, \beta]$, on peut alors calculer

$$\int\int_U \partial_x N\, dxdy = \int_\alpha^\beta (\int_a^b \partial_x N\, dx)dy = \int_\alpha^\beta (N(b, y) - N(a, y))dy$$

on compare avec les intégrales curvilignes sur les segments verticaux $\{(a,y), y \in [\alpha,\beta]\}$ et $\{(b,y), y \in [\beta,\alpha]\}$. De même pour $M$ et les segments horizontaux.

Pour le cas d'un domaine d'intégration $U$ plus général, on approche $U$ par une réunion disjointe de petits rectangles.

**Application** : pour calculer l'aire d'un domaine $U$ de frontière $\gamma$, il suffit de calculer l'une des intégrales curvilignes :

$$\int_\gamma ydx = \int_\gamma -xdy = \int_\gamma \frac{ydx - xdy}{2}$$

Par exemple, l'aire à l'intérieur de l'ellipse $x = a\cos(t), y = b\sin(t)$ vaut

$$\int_0^{2\pi} \frac{b\sin(t)d(a\cos(t)) - a\cos(t)d(b\sin(t))}{2} = ab\pi$$

On peut aussi calculer des moments d'**inertie** ou la position d'un **centre de gravité** en se ramenant à une intégrale curviligne.

**Exemple** : Calculer la position du centre d'inertie d'un quart de cercle $C = \{(\cos(t),\sin(t)),\ t \in [0,\pi/2]\}$.

On a donc $U$ délimité par $\gamma$, réunion de $\{(x,0),\ x \in [0,1]\}$, $C$ et $\{(0,y), y \in [1,0]\}$. Pour trouver la position du centre d'inertie en $x$ (en $y$ c'est identique), on doit calculer

$$\int\int_U x\ dxdy = \int_\gamma \frac{1}{2}x^2\ dy = 0 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\cos(t)\ dt + 0 = \frac{1}{3}$$

et on divise par $\pi/4$ l'aire du quart de cercle, on trouve donc $(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi})$, on peut visualiser avec la commande `cercle(0,1); G:=point(4/(3*pi),4/(3*pi))`

# Chapitre 14

# Équations et systèmes différentiels.

## 14.1 Introduction et représentation graphique.

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(y,t) \tag{14.1}$$

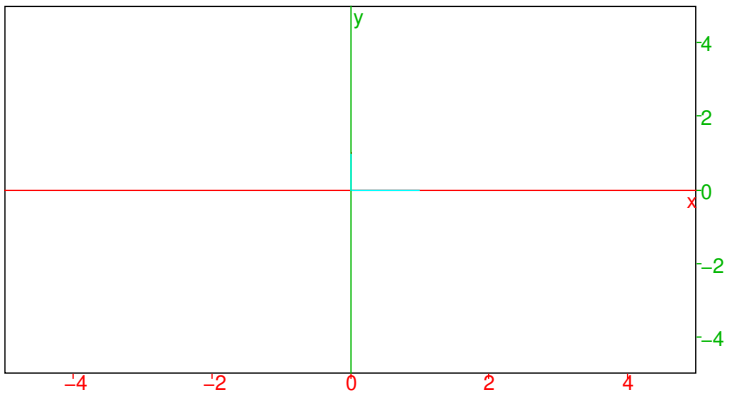
où $y(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Si $n = 1$, c'est une équation différentielle, si $n > 1$ c'est un système différentiel.

Exemple : en dimension $n = 1$, $y' = f(y,t) = ay$. On sait résoudre cette équation, les solutions sont de la forme $y(t) = Ce^{at}$. Si on trace la courbe représentative de ces solutions (appelée courbe intégrale), on observe que par tout point du plan, il passe une solution unique. La tangente à une courbe intégrale a pour pente $y' = ay$ donc pour vecteur directeur le vecteur de composantes $(1, ay)$.

C'est vrai de manière plus générale, le vecteur directeur de la tangente à une courbe intégrale est $(1, f(y,t))$. Si on représente dans le plan selon un quadrillage régulier les vecteurs $(1, f(y,t))$, une courbe intégrale doit être tangente à ces vecteurs chaque fois qu'elle passe en un point du quadrillage, (et à peu près tangente si elle passe à proximité). Un tel quadrillage est appelé champ des tangentes (commande `plotfield` en Xcas, mode également disponible sur certaines calculatrices).

Exercice : tracer le champ des tangentes et quelques solutions pour quelques exemples de fonction $f(y,t)$, avec Xcas créer une figure 2d, puis choisir le mode Champ des tangentes du menu Geo, Graphe, entrer la fonction, puis cliquer en quelques points pour faire tracer la solution passant par ces points.
Par exemple pour $y' = -y + \cos(t)$

```
y0:=1.0;gl_x=-5..5; gl_y=-5..5;plotfield
(-y+cos(t),[t=-5..5,y=-5..5],xstep=0.4,ystep=0.4
);plotode(-y+cos(t),[t=-5..5,y],[0,y0],tstep=0.1,color=red
)
```




L'équation (**??**) est d'ordre 1, or certaines équations différentielles se présentent naturellement comme des équations d'ordre 2, par exemple l'équation fondementale de la dynamique (accélération=somme des forces divisée par la masse). Mais on peut facilement se ramener à un système différentiel d'ordre 1, en augmentant la dimension de $y$. Par exemple, si on pose $y = (x(t), v(t))$, où $x(t)$ est la position et $v(t)$ la vitesse, alors l'équation devient un système d'ordre 1

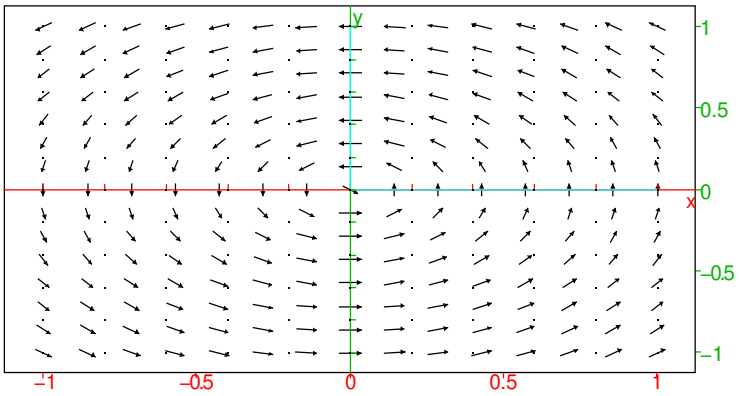
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \frac{F}{m} \end{pmatrix}$$

où $F$ est la force, qui dépend de la position $x(t)$ (champ électrique, gravitation...) et éventuellement de la vitesse (force de frottement, champ magnétique...). On utilise aussi assez fréquemment $y = (q(t), p(t))$ où $q(t)$ est la position, et $p(t)$ la quantité de mouvement (qui dépend de la vitesse, linéairement en mécanique classique).

Représentation graphique : comme précédemment, on peut se placer dans l'espace des $(t, x, v)$ (si $x$ est en dimension 1), mais il est souvent plus difficile d'observer des phénomènes sur un graphe en 3-d que dans le plan, on préfère ne pas

représenter explicitement le temps $t$, mais uniquement $(x, v)$, on est donc naturellement ramené à représenter une solution (une courbe intégrale) par une courbe paramétrique en $(x, v)$ (ou en position impulsion). On a encore la notion de champ des tangentes si $f(y, t) = f(y)$ ne dépend pas explicitement du temps (on dit que le système est *autonome*), dans ce cas une courbe intégrale a pour tangente en $y \in \mathbb{R}^2$ de direction portée par le vecteur $f(y) \in \mathbb{R}^2$.
**Exemple** : $(x, v)' = 5(-v, x)$. La commande

```
purge(v,x);plotfield(5*[-v,x],[x=-1..1,v=-1..1
],normalize)
```




permet d'en représenter le champ des tangentes et d'avoir une idée approximative de l'allure des solutions (`normalize` affiche des vecteur tangents de norme 1, si on n'utilise pas cette option, la taille des vecteurs tangents donne la "vitesse" de déplacement). On sait résoudre ce système différentiel, soit en appliquant une technique matricielle présentée ci-dessous, soit en se ramenant à une équation

linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

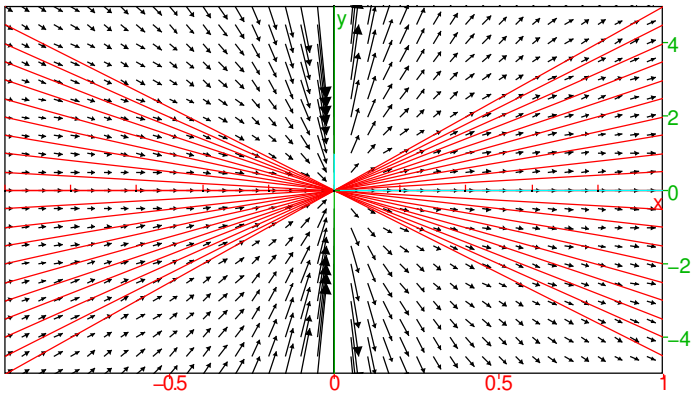
$$x'' = -5v' = -25x$$

donc $x(t) = A\cos(5t) + B\sin(5t)$, $A, B$ étant déterminés par les conditions initiales sur $(x, v)$.

Une équation donnée sous la forme (**??**) est appelée une équation résolue en $y$, car on a exprimé la dérivée en fonction de $y$ et de $t$. Il existe (plus fréquemment en mathématiques) d'autres formes d'équations différentielles (non résolues) où le premier travail de résolution peut consister à exprimer $y'$ en fonction de $y$ et $t$ (ce qui n'est pas toujours possible explicitement).

Exemple : en dimension 1, $ty' = y$, on sait résoudre exactement cette équation à variables séparables, les solutions sont de la forme $Ct$.

```
purge(x,y);gl_x=-1..1;gl_y=-5..5;plotfield
(y/t,[t=-1..1,y=-5..5],xstep=0.05,ystep=0.5
);seq(line(y=k*x,color=red),k,-5,5,0.5)
```



On observe que contrairement à $y' = ay$ où passe une solution et une seule par chaque point du plan, ici toutes les solutions valent 0 en $t = 0$ : il passe une infinité de solutions par le point $(0, 0)$ et il n'en passe aucune par $(0, a),\ a \neq 0$. Ce phénomène de non unicité/non existence vient de la mise sous forme résolue $y' = y/t$ qui fait apparaitre une singularité de $f(y, t)$ en $t = 0$.

On présente dans la suite de cette section des résultats qualitatifs sur les équations sous forme résolue lorsqu'on ne sait pas les résoudre, ainsi que quelques méthodes explicites pour certaines équations différentielles que l'on sait résoudre.

## 14.2 Existence et unicité

Il s'agit ici de préciser dans quelles conditions le résultat intuitif suivant est vrai : étant donné une condition initiale $y(t_0) = y_0$, il y a une et une seule évolution possible, donc une solution unique $y(t)$ de l'équation ou du système (**??**).

On a le :

**Théorème 26** *(Cauchy-Lipschitz) Si $f$ est continument dérivable en $y$ et $t$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ou sur un domaine ouvert $D$ inclus dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, alors l'équation (ou le système) résolu (**??**) admet pour toute condition initiale $y(t_0) = y_0$ une solution unique sur un intervalle maximal ouvert en temps contenant $t_0$.*

**Remarques**

- Attention, l'existence d'une solution ne signifie absolument pas que l'on sait calculer explicitement $y(t)$.
- L'existence et l'unicité d'une solution permet d'affirmer le caractère déterministe de l'équation. Mais la méconnaissance précise de la condition initiale peut au cours du temps provoquer une erreur tellement grande sur $y(t)$ que celle-ci devient imprédictible.
- Le théorème ne dit rien sur la taille de l'intervalle d'existence de la solution (en temps). Certaines solutions peuvent exploser en temps fini, par exemple `desolve(y'=y^2 and y(0)=1)`
  Bien entendu, si on modélise une quantité physique par $y$, dire que $y$ explose (en temps fini ou infini du reste) signifie que les approximations utilisées pour la modélisation ne sont plus valable bien avant.

On admettra ce théorème, voici quelques idées heuristiques de la preuve. L'équation $y' = f(y, t)$ peut se réécrire sous la forme intégrale équivalente

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(u)\, du = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y(u), u)\, du$$

Si $t$ est assez proche de $t_0$, on peut approcher l'intégrale par

$$y(t) = y(t_0) + (t - t_0) f(y(t_0), t_0) + \text{petite erreur}$$

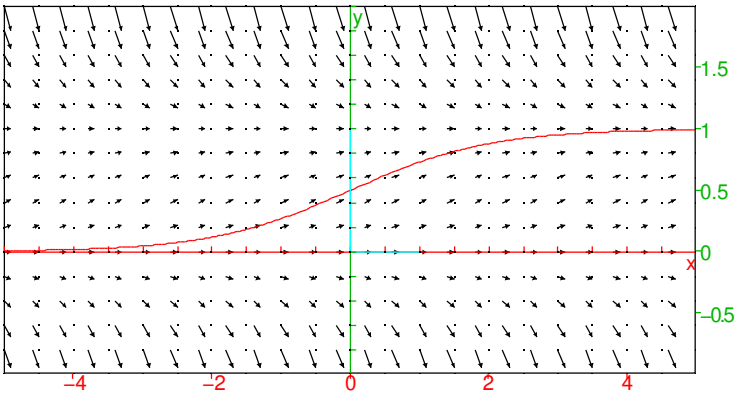
C'est exactement ce qu'on fait en suivant le champ des tangentes pour approcher une courbe intégrale graphiquement, et si on discrétise le temps avec un pas petit, cette méthode d'approximation est appelée méthode d'Euler. On peut bien sur utiliser d'autres approximations (meilleures) de l'intégrale pour avoir une meilleure approximation de la solution, et les méthodes dites de Runge-Kutta utilisent cette

idée. D'un point de vue théorique, la preuve repose plutôt sur ce qu'on appelle le théorème du point fixe, on met la valeur approchée de $y(t)$ trouvée dans l'équation intégrale pour avoir une nouvelle valeur approchée de $y(t)$, on recommence, ainsi de suite, et on montre que le processus converge (il s'agit mathématiquement parlant d'une suite récurrente de fonctions, la preuve rigoureuse de la convergence nécessite des outils mathématiques de niveau L3-M1 de maths, c'est l'analogue des suites récurrentes de réels qui permettent de résoudre numériquement des équations comme $x = \cos(x)$ abordées en mat249).

**Conséquence du théorème ??** : deux courbes intégrales de la même équation différentielle ne peuvent se couper dans $D$. Donc si on connait une courbe intégrale $C$ de $D$ et qu'on prend une condition initiale en-dehors de cette courbe, la courbe intégrale unique passant par cette condition initiale restera du même coté de $D$. Si on connait deux courbes intégrales de $D$, une courbe intégrale passant par une condition initiale entre les deux courbes restera entre les deux courbes.

**Exemple** : $y' = y(1-y)$ (équation logistique).

```
y0:=0.5;gl_x=-5..5;gl_y=-1..2;plotfield(y*
(1-y),[t=-5..5,y=-1..2],xstep=0.4,ystep=0.2
);plotode(y*(1-y),[t=-5..5,y],[0,y0],tstep=0.1,color=red
)
```




Cette équation autonome admet deux solutions évidentes $y = 0$ et $y = 1$. Donc pour toute condition initiale $y(t_0) \in ]0, 1[$, on a $y(t) \in ]0, 1[$ [1]. On en déduit que $y' = y(1 - y) > 0$ donc la solution $y$ est strictement croissante, comme elle est bornée par 0 et 1, elle admet une limite pour $t \to \pm\infty$, donc $y'$ tend vers 0 pour $t \to \pm\infty$, donc $y$ tend vers 0 ou 1, et comme $y$ croit, $y \to 0$ en $t = -\infty$ et $y \to 1$ en $t = +\infty$. Le comportement à l'infini est donc indépendant de la valeur précise de la condition initiale, pourvu qu'elle soit dans $]0, 1[$.

**Exercice** : toujours pour $y' = y(1 - y)$ que se passe-t-il pour une condition initiale $y(t_0) > 1$ ?

1. En toute rigueur, il faut prouver que la solution maximale est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Soit $]t_m, t_M[$ l'intervalle maximal de définition de la solution. Si $t_M \neq +\infty$, alors en intégrant $y'$ qui est borné sur $[t_0, t_M[$ on obtient une valeur finie pour la limite en $t_M$ de $y(t)$, on peut alors prolonger $y(t)$ autour de $t_M$ en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz en $t = t_M$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de maximalité. Donc $t_M = +\infty$ et de même $t_m = -\infty$

## 14.3 Quelques méthodes de résolution explicite.

### 14.3.1 Équations à variables séparables

Si on peut factoriser $f(y,t)$ en termes ne dépendant que de $y$ ou ne dépendant que de $t$, on dit que l'équation est à variable séparable

$$y' = f(y,t) = g(t)h(y)$$

Cette équation admet des solutions constantes $y = y_0$ lorsque $h(y_0) = 0$. Si $h(y(t_0)) \neq 0$, par le théorème de Cauchy-Lipschitz $h(y(t))$ ne s'annule nulle part sur son domaine de définition. On peut donc diviser par $h(y)$ et intégrer :

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)\, dt$$

On obtient une équation implicite de la forme $H(y) = G(t) + C$ où $G$ est une primitive de $g$, $H$ de $1/h$ et $C$ une constante arbitraire. Dans les cas favorables, on peut exprimer $y$ en fonction de $t$ (par exemple si l'équation est linéaire sans second membre, on a $h(y) = y$ donc $H$ est le log que l'on sait inverser). Dans les cas moins favorables, on peut exprimer $y$ et $t$ en fonction d'un paramètre $u$ : la courbe intégrale est une courbe paramétrée. Dans les cas défavorables, on reste sous forme implicite.

**Exercice** : résoudre explicitement l'équation $y' = y(1-y)$ et retrouver les résultats qualitatifs de la section précédente.

```
desolve(y'=y*(1-y))
```

$$\left[\frac{1}{-c_0 \mathrm{e}^{-x} + 1}\right]$$

### 14.3.2 Équations linéaires

On commence par résoudre l'équation sans second membre (aussi appelée homogène)

$$a_n(t)y^{[n]} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

sur un intervalle ouvert sur lequel $a_n(t) \neq 0$. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel (car l'équation est linéaire) et de dimension l'ordre de l'équation : pour le prouver on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au système d'ordre 1 équivalent, ce système est tel que $y$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on a ensuite un isomorphisme entre les solutions et la condition initiale.

Si l'ordre est 1, on a une équation à variables séparables $y'/y = -a_0(t)/a_1(t)$ et la solution est une exponentielle :

$$y(t) = Ce^{-\int \frac{a_0}{a_1}\, dt}$$

**Exemple** : $y' - ty = 0$, on a $y(t) = Ce^{\int t\, dt} = Ce^{t^2/2}$

Si l'ordre est plus grand que 1, on n'a en général pas de solution explicitable avec les fonctions usuelles et des primitives [2], pour certaines équations importantes

2. On peut d'ailleurs démontrer que certaines équations ne sont pas résolubles de cette manière, cf. la théorie de Galois différentielle

en physique, des fonctions spéciales ont été créées pour exprimer les solutions, par exemple les fonctions de Bessel. Il existe quelques cas particuliers où le calcul explicite est possible, dont le cas où les coefficients sont constants (section suivante). Si on connait une solution $w$ d'une équation linéaire, alors en posant $y = wz$, la fonction $z'$ vérifie une équation linéaire d'ordre un de moins, ainsi si on connait une solution d'une équation linéaire d'ordre 2, on peut la résoudre complètement.

Le calcul d'une solution particulière d'une équation linéaire avec second membre se fait en faisant varier les constantes d'intégration : on prend la forme générale de la solution de l'équation homogène, on remplace les constantes d'intégration par des fonctions inconnues, on remplace dans l'équation avec second membre et on résoud en les fonctions inconnues, la méthode détaillée dans le cas des coefficients constants s'applique à l'identique. La solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre.

**Exemple** : $y' - ty = -t$, solution générale de l'équation homogène $y(t) = Ce^{t^2/2}$, variation de la constante on remplace $y(t) = C(t)e^{t^2/2}$ dans $y' - ty = -t$ et on obtient $C'e^{t^2/2} = -t$, donc $C' = -te^{-t^2/2}$ et $C = e^{-t^2/2} + K$, d'où la solution générale $y(t) = (e^{-t^2/2} + K)e^{t^2/2} = 1 + Ke^{t^2/2}$.

### 14.3.3 Équations linéaires à coefficients constants

On peut chercher des solutions de l'équation sans second membre sous la forme d'exponentielles $e^{rt}$, $r$ doit alors vérifier une équation polynomiale $P(r) = 0$ appelée **équation caractéristique**, de degré le degré de l'équation différentielle. Plus précisément, si on remplace $e^{rt}$ dans

$$a_n y^{[n]} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

alors

$$a_n r^n + ... + a_1 r + a_0 = P(r) = 0$$

**Théorème 27** *Si $P$ n'a que des racines simples $r_1, ..., r_n \in \mathbb{C}$, l'ensemble des solutions est alors l'espace vectoriel engendré par $\{e^{r_1 t}, ..., e^{r_n t}\}$*

En effet, on a le bon nombre d'éléments ($n$), il suffit donc de montrer qu'il s'agit d'une famille libre.

Pour cela, il suffit de faire tendre $t$ vers l'infini si toutes les parties réelles des $r_j$ sont distinctes. Si certaines sont égales, on peut faire tendre $t$ vers l'infini sur une demi-droite du plan complexe, on pose $t = Te^{i\alpha}, T \in \mathbb{R}^+$ où $\alpha$ est un petit angle choisi pour que les parties réelles de $r_j e^{i\alpha}$ soient toutes distinctes (ceci revient à choisir $\alpha$ tel que les projections des racines $r_j$ sur l'axe $Ox$ tourné de $-\alpha$ soient toutes distinctes, on brise ainsi une symétrie sur les racines de $P$).

On peut aussi faire une récurrence. Au rang $n = 1$ c'est évident. Si $n > 1$ et si $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ vérifient :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{r_j t} = 0$$

on factorise $e^{r_n t}$ et on dérive, on a

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j (r_j - r_n) e^{(r_j - r_n)t} = 0$$

on est ramené à l'identité précédente au rang $n-1$ donc par récurrence, $\lambda_j(r_j - r_n) = 0$ et $\lambda_j = 0$ si $j \neq n$, puis $\lambda_n = 0$ avec la relation du départ.

Dans le cas général, on a :

**Théorème 28** *Si $P$ a des racines multiples, il faut modifier la base de l'énoncé précédent : pour chaque racine $r_k$ de multiplicité $m > 1$, on remplace $e^{r_k t}$ répété $m$ fois par $\{e^{r_k t}, te^{r_k t}, ..., t^{m-1}e^{r_k t}\}$*

En effet, on a :

$$(ty)^{[j]} = ty^{[j]} + jy^{[j-1]}$$

Supposons que $y$ est solution de l'équation, alors $ty$ est encore solution si :

$$na_n y^{[n-1]} + (n-1)a_{n-1}y^{[n-2]} + ... + a_1 y = 0$$

et on reconnait une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $P' = 0$, on a donc montré la :

**Proposition 29** *Si $y$ est solution des deux équations différentielles à coefficients constants de polynomes caractéristiques respectifs $P$ et $P'$ alors $ty$ est solution de l'équation différentielle à coefficients constants de polynome caractéristique $P$.*

Pour prouver le théorème, il faut encore se convaincre que la famille est une base, ce qui revient à prouver l'indépendance linéaire de ces fonctions. Cela se fait comme précédemment. Si toutes les parties réelles des racines sont distinctes, en faisant tendre $t$ vers l'infini on se ramène à un équivalent polynômial nul. Si certaines parties réelles sont égales, on peut à nouveau faire tendre $t$ vers l'infini dans le plan complexe en tournant d'un petit angle. On peut aussi adapter la récurrence, sur le nombre de racines. S'il y en a une, on a un polynôme. Sinon, on factorise $e^{r_n t}$, et on dérive la multiplicité de $r_n$ pour appliquer le résultat au cran $n-1$, on a alors un système triangulaire sur le groupe d'inconnues de la même exponentielle. On peut aussi se ramener à des polynômes en posant comme ci-dessus $t = Te^{i\alpha}$ et en faisant tendre $T$ vers l'infini.

Si $P$ est à coefficients réels et admet une racine non réelle $z$ alors $\overline{z}$ est encore racine, on peut réécrire la base d'exponentielles complexes en une base de fonctions réelles en utilisant des fonctions trigonométriques. En effet les combinaisons linéaires réelles de $e^{zt}$ et $e^{\overline{z}t}$ ont des coefficients conjugués :

$$(\alpha + i\beta)e^{(a+ib)t} + (\alpha - i\beta)e^{(a-ib)t} = e^{at}(2\alpha\cos(bt) - 2\beta\sin(bt))$$

**Exemples** :

— $y'' + 3y' - 4y = 0$, équation caractéristique $r^2 + 3r - 4 = 0$, deux racines distinctes $r = 1, r = -4$, donc $y(t) = \alpha e^t + \beta e^{-4t}$

— $y'' + 2y' + y = 0$, équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$, a une racine double $r = -1$, donc $y(t) = \alpha e^{-t} + \beta te^{-t}$

— $y'' + 2y' + 2y = 0$, équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$, deux racines conjuguées $r = -1 \pm i$, donc $y(t) = e^{-t}(\alpha\cos(t) + \beta\sin(t))$

```
desolve(y''+2y'+2y=0)
```

$$\mathrm{e}^{-x}\left(c_0\cos x + c_1\sin x\right)$$

On peut trouver une solution particulière de l'équation avec second membre $s(t)$ par la méthode de variation des constantes, qui s'applique d'ailleurs également lorsque l'équation est linéaire à coefficients variables. Si la solution générale est engendrée par $y_1, ..., y_n$, on pose :

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$$

On pose

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' y_i = 0 \ \Rightarrow \ y' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i'$$

et ainsi de suite jusqu'à la dérivée d'ordre $n$ de $y$, ces $n-1$ équations et l'équation différentielle donnent alors un système linéaire $n, n$ en les $\lambda_i'$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' y_i & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' y_i' & = & 0 \\ \cdots & & \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' y_i^{[n-2]} & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' y_i^{[n-1]} & = & \frac{s(t)}{a_n} \end{array} \right.$$

Ce système a pour déterminant $d$ la matrice de $i$-ième ligne la dérivée d'ordre $i-1$ de $y_1, ..., y_n$. Si on calcule la dérivée de $d$, il faut faire porter la dérivée sur la dernière ligne pour avoir une contribution non nulle, on peut alors utiliser l'équation différentielle pour montrer que $d$ vérifie une équation linéaire d'ordre 1 $a_n d' = (-1)^n a_{n-1} d$ donc il est soit identiquement nul soit jamais nul. On montre alors par récurrence que l'indépendance linéaire de $y_1, ..., y_n$ entraine alors que le déterminant est non nul. En effet s'il est nul au rang $n$, alors l'une des colonnes est combinaison linéaire des autres, par exemple la dernière, on a donc :

$$y_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j y_j, \quad y_n' = \sum_{j=1}^{n-1} c_j y_j', ... \quad y_n^{[k]} = \sum_{j=1}^{n-1} c_j y_j^{[k]}, ...$$

en dérivant on en déduit que

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_j' y_j = 0, ..., \sum_{j=1}^{n-1} c_j' y_j^{[k-1]} = 0, ...$$

on est ramené à un système linéaire homogène en $n-1$ inconnues (les $c_j'$) à qui on applique l'hypothèse de récurrence, on en déduit que les $c_j'$ sont nuls donc les $c_j$ sont des constantes ce qui contredit l'indépendance linéaire des $y_j$.

Pour des second membre combinaison linéaire de termes $b(t)e^{rt}$ avec $b$ polynôme, il est plus simple de chercher directement une solution particulière combinaison linéaire de $a(t)e^{rt}$ où $a$ est de même degré que $b$ si $r$ n'est pas racine de $P$, ou de degré le degré de $b$ plus la multiplicité de $r$ comme racine de $P$. On peut aussi utiliser la transformation de Laplace et son inverse.

### 14.3.4 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants d'ordre 1.

Il s'agit donc de systèmes de la forme

$$y' = Ay + b(t)$$

où $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $A$ est une matrice carrée de taille $n$ indépendante du temps, et $b(t) \in \mathbb{R}^n$.

On commence par résoudre l'équation homogène $y' = Ay$. Si la matrice $A$ est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ où $D$=diag$(d_1, ..., d_n)$ est diagonale et $P$ inversible, le système devient :

$$y' = PDP^{-1}y$$

donc en posant $y = Pz$, on a (puisque $P$ est indépendant du temps) :

$$z' = Dz \quad \Leftrightarrow \quad z'_k = d_k z_k,\ k = 1..n$$

donc $z_k = c_k e^{d_k t}$, puis la solution générale

$$y(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{d_1 t} \\ ... \\ c_n e^{d_n t} \end{pmatrix}$$

Le calcul avec Xcas se fait en utilisant la commande `desolve`, par exemple
`desolve(y'=[[1,2],[2,1]]*y)`

```
desolve(y'=[[1,2],[2,1]]*y)
```

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{c_0 e^{-x} + c_0 e^{3x} - c_1 e^{-x} + c_1 e^{3x}}{2} & \frac{-c_0 e^{-x} + c_0 e^{3x} + c_1 e^{-x} + c_1 e^{3x}}{2} \end{array} \right]$$

ou avec conditions initiales
`desolve(y'=[[1,2],[2,1]]*y and y(0)=[1,2])`

```
desolve([y'=[[1,2],[2,1]]*y,y(0)=[1,2]])
```

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{-e^{-x} + 3e^{3x}}{2} & \frac{e^{-x} + 3e^{3x}}{2} \end{array} \right]$$

On peut aussi utiliser la fonction `exp` avec comme argument $At$ (on généralise ainsi la notation $e^{at}$ de la dimension 1), multiplié par la condition initiale :
`exp([[1,2],[2,1]]*t)*[1,2]`
Les calculs intermédiaires pour diagonaliser la matrice $A$ sont exécutés par les commandes `eigenvals`, `eigenvects`, `jordan`.

On peut ensuite calculer une solution particulière par la méthode de variation des constantes, ou encore en résolvant $z' = Dz + P^{-1}b(t)$ composante par composante (ou par transformation de Laplace). Avec Xcas, il suffit d'ajouter le second membre dans la commande `desolve`
`desolve(y'=[[1,2],[2,1]]*y+[x,x+1])`

Si la matrice $A$ n'est pas diagonalisable (ce qui entraine qu'elle a au moins une valeur propre de multiplicité plus grande que 1), on peut alors la trigonaliser, on se ramene à résoudre un système triangulaire, ce qui revient à résoudre pour chaque composante une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec un éventuel second membre.

### 14.3.5 Systèmes et équations

Il y a un lien entre systèmes différentiels linéaires et équations linéaires. En effet une équation d'ordre $n$ peut s'écrire comme un système différentiel d'ordre 1, on peut calculer le polynôme caractéristique de la matrice on retrouve alors l'équation caractéristique. Inversement, toute matrice $A$ admet un polynôme $P$ annulateur tel que $P(A) = 0$ [3], le polynôme caractéristique de $A$ est un polynôme annulateur (théorème de Cayley-Hamilton). Les composantes des solutions du système différentiel sont des solutions de l'équation différentielle dont l'équation caractéristique est $P(x) = 0$. En effet :

$$0 = P(A)y = \sum_{k=0}^{n} p_k A^k y = \sum_{k=0}^{n} p_k y^{[k]}$$

**Exemple en dimension 2.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si $b = 0$ alors $y_1' = ay_1$ on en déduit $y_1$ puis $y_2$. Supposons donc $b \neq 0$, alors

$$P(x) = x^2 - x(a+d) + ad - bc$$

(on peut vérifier que $P(A) = 0$) donc si $y' = Ay$ alors

$$y_1'' - (a+d)y_1' + ad - bc = 0$$

et $y_2$ s'en déduit avec $y_1' - ay_1 = by_2$ (on peut du reste partir de cette relation pour établir l'équation d'ordre 2 vérifiée par $y_1$). On peut ainsi résoudre tous les systèmes de dimension 2, même si la matrice $A$ n'est pas diagonalisable.

**Exercice** : Résoudre de cette manière le système

```
desolve(y'=[[1,2],[2,1]]*y and y(0)=[1,2])
```

```
desolve([y'=[[1,2],[2,1]]*y,y(0)=[1,2]])
```

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{-e^{-x}+3e^{3x}}{2} & \frac{e^{-x}+3e^{3x}}{2} \end{array}\right]$$

**Autre exemple** : système d'ordre 2 se ramenant à une équation d'ordre 2 à coefficients complexes. Les équations pour une particule chargée dans un champ

3. Cela vient du fait que les puissances de $A$ forment une famille d'un espace vectoriel de dimension finie $n^2$, donc la famille est liée à partir de $n^2 + 1$ éléments, en fait on peut montrer que c'est le cas si on considère $I, A, ..., A^n$.

magnétique constant porté par l'axe $Oz$ et un champ électrique constant perpendiculaire (donc dans le plan $Oxy$), avec vitesse initiale nulle ou contenue dans le plan $Oxy$ donnent une trajectoire plane

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m\ddot{x} & = & qB\dot{y} + qE_x \\ m\ddot{y} & = & -qB\dot{x} + qE_y \end{array} \right.$$

Si on pose $z = x + iy$ alors $z$ vérifie l'équation

$$\ddot{z} = -i\frac{qB}{m}\dot{z} + \frac{qE}{m}, \quad E = E_x + iE_y$$

Le polynôme caractéristique de cette équation

$$r^2 = -i\frac{qB}{m}r$$

possède deux racines distinctes 0 et $-i\frac{qB}{m}$ (mais pas le conjugué, l'équation n'est pas à coefficients réels !) donc la solution homogène est

$$z = \alpha + \beta e^{-i\frac{qB}{m}t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Le champ électrique joue ici le rôle de second membre, comme 0 est solution de l'équation caractéristique, la forme de la solution particulière est $z = At$, en remplaçant on obtient $A = iE/B$ donc

$$z = \alpha + \beta e^{-i\frac{qB}{m}t} + i\frac{E}{B}t$$

La forme générale des solutions est un cercle si $E = 0$ parcouru une infinité de fois, qui se déforme sous l'effet du champ électrique en une sorte de spirale de ressort, pour une vitesse initialle nulle, on obtient une cycloïde.

### 14.3.6 Allure des courbes en dimension 2.

Si on se place dans le repère propre (en prenant les vecteurs propres comme vecteurs de base), et si $A$ a deux valeurs propres distinctes ($A$ est alors diagonalisable), alors chaque coordonnée suit une exponentielle, dans ce repère $y(t) = (\alpha e^{at}, \beta e^{bt})$ avec $a \neq b$. Si $a$ et $b$ sont réels, l'une des exponentielles domine l'autre lorsque $t \to +\infty$ et c'est l'inverse lorsque $t \to -\infty$, la courbe est donc asymptote aux directions propres. Si $a$ et $b$ sont complexes conjugués de partie réelle non nulle, on a une spirale qui tend vers 0 d'un coté et vers l'infini de l'autre (selon le signe de la partie réelle). Si $A$ est symétrique, alors $a$ et $b$ sont réels, ce cas ne peut pas se produire, de plus on peut choisir un repère propre orthonormé, les courbes ressemblent à des hyperboles. Ce sont des hyperboles si trace$(A) = 0$ (la somme des valeurs propres vaut 0 donc le produit des coordonnées dans le repère propre vaut une constante), ces hyperboles sont équilatères si $A$ est symétrique. Quelques exemples :

```
A:=[[-1,1],[1,2]];p,d:=jordan(A)
```

$$\left[ \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} \sqrt{13}-3 & -\sqrt{13}-3 \\ 2 & 2 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{13}+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{13}+1}{2} \end{array} \right]$$

```
A:=[[1,-1],[2,4]];p,d:=jordan(A)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

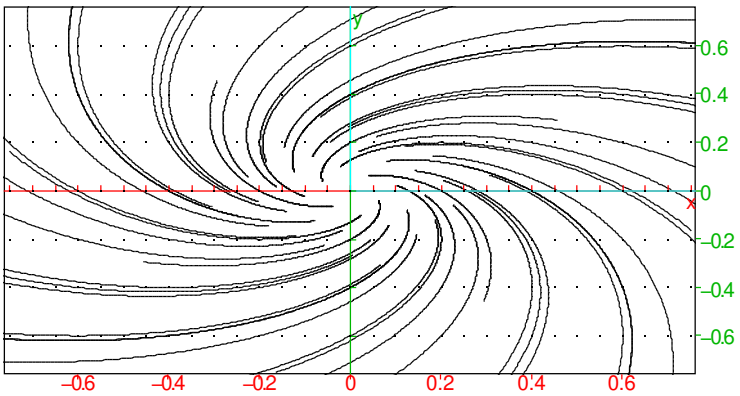
```
A:=[[0,1],[-1,0]];p,d:=jordan(A)
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & i \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

```
A:=[[1,1],[-1,1]];p,d:=jordan(A)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & i \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$$

```
seq(seq(plotparam(exp(A*t)*[a/5,b/5],t=-1..1,affichage=arrow_line
),a,-3,3),b,-3,3)
```




**Remarque :**pour un système différentiel à coefficients non constants, il n'existe pas de méthode générale de résolution. Il arrive que dans certains cas particuliers,

on puisse résoudre le système, par exemple si on trouve une matrice de passage indépendante du temps ramenant le système à un système diagonal ou triangulaire : un exemple avec

$$A = \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$$

Ou si $\int A(t)\,dt$ commute avec $A$, on peut prendre $\exp(\int A(t))$ comme solution.

### 14.3.7 Systèmes d'ordre plus grand que 1

On se ramène à un système d'ordre 1. Par exemple deux ressorts couplés

$$\begin{cases} \ddot{x_1} &= -2\omega^2 x_1 + \omega^2 x_2 \\ \ddot{x_2} &= \omega^2 x_1 - 2\omega^2 x_2 \end{cases}$$

on pose $Y = (x_1, x_2, \dot{x_1}, \dot{x_2})$, on a

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\cdot\omega^2 & \omega^2 & 0 & 0 \\ \omega^2 & -2\cdot\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix}$$

On délègue le calcul des valeurs propres à la machine :

```
assume(omega>0);a:=omega^2*[[-2,1],[1,-2]]
```

$$\omega, \begin{bmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{bmatrix}$$

```
A:=blockmatrix(2,2,[0*idn(2),idn(2),a,0*idn(2)])
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\omega^2 & \omega^2 & 0 & 0 \\ \omega^2 & -2\omega^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
p,d:=jordan(A)
```

$$\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -\omega & -\omega & \sqrt{3}\omega & \sqrt{3}\omega \\ -\omega & -\omega & -\sqrt{3}\omega & -\sqrt{3}\omega \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i}\sqrt{3}\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}\sqrt{3}\omega \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont $\pm i\omega, \pm i\sqrt{3}\omega$ imaginaires pures, donc les solutions du système sont périodiques de fréquence $\omega$ et $\sqrt{3}\omega$, qui sont des fréquences intrinsèques du système. Si on ajoute un second membre périodique de période $\Omega$, lorsque $\Omega \neq \omega$ et $\Omega \neq \sqrt{3}\omega$, il y a une solution particulière de fréquence $\Omega$ et les solutions sont bornées (3 fréquences), par contre si $\Omega = \omega$ ou $\Omega = \sqrt{3}\omega$, il y a résonance.

### 14.3.8 Intégrales premières.

Lorsqu'on ne sait pas résoudre explicitement une équation ou un système différentiel, il peut arriver qu'on connaisse une ou des constantes du mouvement en cinématique, appelées aussi intégrales premières.

C'est le cas par exemple de l'énergie totale (mécanique plus cinétique) pour des forces conservatives. En dimension un, la connaissance de l'intégrale première énergie totale permet de ramener l'équation fondamentale de la dynamique d'ordre 2 à une équation du premier ordre à variables séparables :

$$\frac{1}{2}mx'^2 + V(x) = E$$

soit

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}}$$

donc

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2(E-V(x))}{m}}} = dt$$

on peut ainsi calculer le temps en fonction de $x$ et tracer le graphe de $t$ en fonction de $x$ puis le graphe de $x$ en fonction de $t$ par symétrie par rapport à la première bissectrice.

Exemple : calcul de la période d'un pendule, on repère une masse reliée à un fil de longueur $l$ à un point fixe par l'angle $\theta$ formé avec la verticale (orienté vers le bas), de sorte que l'énergie potentielle de la masse est $-mgl\cos(\theta)$ on a donc

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos(\theta) = E$$

puis

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2(E + mgl\cos(\theta))}{ml^2}}$$

Si on lache sans vitesse initiale la masse avec un angle $\theta_0 \in ]-\pi, \pi[$ alors $E = -mgl\cos(\theta_0)$ donc

$$\dot{\theta} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}$$

puis

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2\frac{g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} = dt$$

Pour des raisons de symétrie, la période du pendule est donc

$$T = 4\int_{t/\theta(t)=0}^{t/\theta(t)=\theta_0} dt = 4\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2\frac{g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}}$$

L'expression à intégrer n'admet pas de primitive avec les fonctions usuelles, on l'appelle intégrale elliptique (il y a un lien avec la longueur d'un arc d'ellipse). On peut calculer une valeur numérique approchée de cette intégrale si $\theta_0$ est donné.

```
theta0:=0.78; 4/sqrt(g/l)*int(1/sqrt(2*(cos
(theta)-cos(theta0))),theta,0,theta0)
```

$$0.78, \frac{4 \cdot 1.63269465635}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Pour de petites valeurs de $\theta_0$, on peut approcher $\cos(\theta)$ par $1 - \theta^2/2$ et calculer l'intégrale

```
assume(theta0>0); 4/sqrt(g/l)*int(1/sqrt
(theta0^2-theta^2),theta,0,theta0)
```

$$\theta_0, \frac{4\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{g}{l} \cdot 2}}$$

qui ne dépend pas de $\theta_0$. On observe que cette approximation est encore assez bonne pour $\theta_0 < \pi/4$ (erreur<4%).

En dimension plus grande, l'existence d'intégrales premières peut permettre de connaitre la forme de la courbe intégrale et même parfois de résoudre complètement l'équation (cas du problème à deux corps ci-dessous).

Autre exemple, la découverte d'un facteur intégrant pour la forme différentielle $Mdx+Ndy$ donne une intégrale première pour l'équation $dy/dx = M/N$, en effet $\omega = \phi(Mdx + Ndy) = dV(x, y)$ est nul sur une courbe intégrale, donc $V(x, y)$ est constant, les courbes intégrales sont donc les courbes de niveau de $V(x, y)$. Une équation à variables séparables est un cas particulier, avec $M$ ne dépendant que de $x$ et $N$ de $y$.

Pour un système autonome, $E$ est une intégrale première si grad$(E).f = 0$, en effet

$$\frac{d}{dt}E(y(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial y_j} f_j$$

**Problème à deux corps** Cas d'un point de $\mathbb{R}^3$ soumis à une force centrale comme la gravité ou la force coulombienne :

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

on montre

— la conservation du moment cinétique

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

(vérification immédiate en dérivant). Ceci entraine que le mouvement est dans un plan orthogonal à $\mathbf{L} = L\overrightarrow{k}$ et la loi des aires (où $\theta$ est l'angle formé par $\mathbf{r}$ avec une direction fixe du plan) :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = L$$

(ceci est vrai dès que la force est centrale, indépendamment de la norme de la force)

— la conservation du vecteur excentricité défini par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu}\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{L}{\mu}\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \overrightarrow{k} - \overrightarrow{e_r}$$

En effet $d\overrightarrow{e_r}/dt = d\theta/dt\overrightarrow{e_\theta}$ où $\{\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{k}\}$ est orthonormé direct et $L = r^2 d\theta/dt$.

Si on prend l'axe des $x$ porté par $\mathbf{E}$, en faisant le produit scalaire avec $\mathbf{r}$ :

$$rE\cos(\theta) = \mathbf{r}.\mathbf{E} = \frac{1}{\mu}(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \mathbf{L}).\mathbf{r} - r$$

on obtient en appliquant les propriétés du produit mixte et la définition de $\mathbf{L}$ :

$$r = \frac{L^2}{\mu(1 + E\cos(\theta))}$$

la courbe intégrale est donc une conique d'excentricité $E$ ayant l'origine pour foyer et parcourue selon la loi des aires (l'aire balayée par le segment origine-point mobile est proportionnelle au temps).

### 14.3.9 Le modèle proie-prédateur

C'est un système autonome en dimension 2 pour lequel on sait calculer une intégrale première. Il se présente sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a - by) \\ \dot{y} &= -y(c - dx) \end{aligned}$$

avec $a, b, c, d$ des constantes positives, $x$ l'effectif des proies, $y$ celui des prédateurs, $a$ correspond à la reproduction naturelle des proies, $b$ à la mortalité par rencontre d'un prédateur, $c$ à la mortalité naturelle des prédateurs et $d$ à la natalité dépendant du nombre de proies. On peut déterminer les points d'équilibre et leur stabilité comme pour n'importe quel système autonome (exercice), on trouve $(0, 0)$ qui est instable et $(c/d, a/b)$, les valeurs propres du linéarisé sont 2 imaginaires purs conjugués, donc on ne peut pas conclure sur la stabilité à ce stade.

On peut déterminer une intégrale première en faisant apparaitre des dérivées logarthmiques

$$\frac{d}{dt}(\ln(x)) = a - by, \quad \frac{d}{dt}(\ln(y)) = -c + dx$$

donc en posant $X = \ln(x), Y = \ln(y)$ on a

$$\dot{X} = a - be^Y, \quad \dot{Y} = -c + de^X$$

d'où :

$$\dot{X}(de^X - c) + \dot{Y}(be^Y - a) = 0$$

donc :

$$f(X, Y) = de^X - cX + be^Y - aY$$

est une intégrale première du mouvement, qui se passe donc sur les courbes de niveau de $f$ en $(X, Y)$ ou de $dx - c\ln(x) + by - a\ln(y)$ en $(x, y)$. On observe

que ces courbes de niveau sont fermées, impliquant un mouvement périodique, si on exprime $y$ en fonction de $x$ par le théorème des fonctions implicites donc sur toute la courbe à l'exception des deux points $x_\pm$ où la tangente est verticale

$$dx - c\ln(x) + by - a\ln(y) = K \Rightarrow y = y_\pm(x)$$

alors on peut calculer la période du mouvement en appliquant :

$$\frac{dx}{x(a - by(x))} = dt$$

donc

$$T = \int dt = \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{x(a - by_+(x))} + \int_{x_+}^{x_-} \frac{dx}{x(a - by_-(x))}$$

### 14.3.10 Quelques autres méthodes

On peut encore citer : changement de fonction, changement de variables, équation homogène, équations de Bernoulli, de Clairault, de Ricatti, développements en séries entières..., certaines de ces méthodes sont implémentées par les logiciels de calcul formel.

## 14.4 Comportement asymptotique des solutions

Les équations de la physique sont souvent des équations autonomes sans second membre (pas de dépendance explicite en temps) ou avec un second membre qui est le seul terme de l'équation dépendant du temps (il s'agit d'un forçage extérieur). Dans le premier cas, les solutions doivent rester bornées (par exemple en énergie), donc ne peuvent pas tendre vers l'infini. Dans le second cas, une question naturelle est alors la suivante : le système atteint-il un équilibre, peut-on décomposer la solution en deux parties : un régime permanent et un régime transitoire ?

On a déjà fait une étude de comportement asymptotique pour l'équation $y' = y(1 - y)$, la solution $y = 0$ se comporte comme un point déquilibre instable, si on en dévie même légèrement, on s'en éloigne définitivement, alors que $y = 1$ se comporte comme un point déquilibre stable. Nous allons généraliser cette étude, pour les équations linéaires à coefficients constants (avec ou sans second membre, perturbation dépendant du temps), les équations autonomes sans second membre, et dans le cas de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

### 14.4.1 Équations linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2

Pour les équations homogènes d'ordre 1 $y' + ay = 0$, la solution générale est $y(t) = Ce^{-at}$, le comportement asymptotique lorsque $t \to +\infty$ dépend du signe de $a$, si $a > 0$ la limite est 0 et la solution décroit exponentiellement vite. Donc si $a > 0$, quelle que soit la condition initiale, toutes les solutions de l'équation avec second membre $y' + ay = f(t)$ ont le même comportement asymptotique, celui d'une solution particulière de l'équation :on a donc un régime transitoire exponentiellement décroissant et un régime permanent.

Pour les équations homogènes d'ordre 2 $ay'' + by' + cy = 0$, la solution générale est $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ si $r_1$ et $r_2$ sont les deux racines simples de $ar^2 + br + c = 0$

ou $y(t) = e^{r_1 t}(A + Bt)$ si l'équation caractéristique admet une racine double. Le comportement à l'infini dépend du signe de la partie réelle de $r_1$ et $r_2$. Il faut que les deux parties réelles soient strictement négatives pour que la solution tende vers 0, à vitesse exponentielle, si l'une au moins des parties réelles est positive ou nulle, alors il n'y a pas convergence vers 0. Plus précisément

— Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, il y a deux racines complexes conjuguées distinctes de partie réelle $-b/(2a)$, donc la solution décroit exponentiellement vers 0 si $b/a > 0$, comme $e^{-b/(2a)t}$, avec des oscillations périodiques en $e^{i\sqrt{-\Delta}/(2a)t}$, de période $T = 4\pi a/\sqrt{-\Delta}$ (régime oscillatoire amorti enveloppé par $e^{-b/(2a)t}$). Si $b = 0$, la solution ne tend pas vers 0, reste de taille bornée, elle est périodique de période $T = 4\pi a/\sqrt{-\Delta}$ (régime oscillatoire)
— Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, on a deux racines réelles distinctes, qui sont toutes les deux strictement négatives si l'opposé de leur somme et leur produit sont positifs : $b/a > 0, c/a > 0$ (régime amorti équivalent à la plus grande des deux exponentielles)
— Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, on a une racine double $-b/(2a)$, il y a convergence vers 0 si $b/a > 0$.
— Dans tous les autres cas, la partie réelle d'une des racines est positive ou nulle et il n'y a pas de convergence vers 0 de la solution générale. Si on a deux racines imaginaires pures conjuguées, la solution est périodique, sinon la solution tend vers l'infini pour une condition initiale générique.

**Exemples**

— $y'' + y = 0$, deux racines imaginaires pures conjuguées, solution générale $a\sin(x) + b\cos(x)$ périodique
— $y'' + y' + y = 0$, deux racines complexes conjuguées de partie réelle négative, il y a convergence exponentielle vers 0 avec des oscillations, la solution générale est $e^{-x/2}(a\cos(\sqrt{3}x/2) + b\sin(\sqrt{3}x/2))$.
— $y'' - 2y' - 3y = 0$, deux racines réelles, une positive, une négative. La solution générale est $ae^x + be^{-3x}$, elle tend génériquement vers l'infini (sauf condition initiale annulant $a$).
— ...

On peut généraliser à un ordre quelconque. Si toutes les racines de l'équation caractéristique sont de partie réelle négative, la solution générale de l'équation homogène tend vers 0 à l'infini, elle est appelée régime transitoire. Quelle que soit la condition initiale, on tend vers la solution particulière appelée régime permanent.

### 14.4.2 Forçage périodique

Il arrive souvent qu'un système physique soit soumis à un forçage extérieur périodique, par exemple pour la température à échelle fine, l'alternance jour-nuit, ou à grande échelle, l'alternance des saisons, ou circuit RCL soumis à un courant périodique. Il est donc utile de déterminer les caractéristiques de la solution en régime permanent.

Exemple : ordre 1

$$y' + ay = Ae^{i\omega t}, \quad a > 0$$

On sait qu'une solution particulière est donnée par $Be^{i\omega t}$, on remplace et on obtient

$$B(i\omega + a) = A \Rightarrow B = \frac{A}{a + i\omega}$$

L'amplitude de la solution particulière est donc l'amplitude du second membre divisée par le module $|a+i\omega| = \sqrt{a^2+\omega^2}$, et l'exponentielle subit un déphasage donné par l'argument de $B$ soit $-\arctan(\omega/a) \in ]-\pi/2, 0[$. La solution particulière suit donc le second membre, avec un déphasage compris entre 0 et un quart de période, selon la valeur de $a$. Si le système a une forte inertie intrinsèque ($a$ petit pour avoir une exponentielle décroissant lentement), on s'approche du quart de période, c'est pour cette raison que la température près de la mer atteint son maximum en été environ 2 mois après le solstice, alors que dans les terres, c'est plutot 3 semaines après (le maximum d'un quart de période étant presque réalisé par la banquise qui atteint son minimum d'extend presque 3 mois après le solstice).

À l'ordre 2, on peut faire la même étude, cette fois l'amplitude est divisée par

$$|-a\omega^2+ib\omega+c| = \sqrt{b^2\omega^2+(a\omega^2-c)^2} = \omega^2\sqrt{b^2+(a\omega-\frac{c}{\omega})^2}$$

Si $b=0$ (pas de frottements) et si $i\omega$ est solution de l'équation caractéristique, la solution particulière est en $Ate^{i\omega t}$, il y a résonance (c'est pour éviter d'entrer en résonance avec une fréquence propre d'un pont qu'on ne doit pas le traverser à plusieurs en marchant au même pas cadencé).

### 14.4.3 Équation autonome sans second membre

Il s'agit d'une équation de la forme $y' = f(y)$ où on suppose $f$ continument dérivable. Les solutions stationnaires sont données par les racines de $f$ (les $r$ telles que $f(r)=0$). Pour toute condition initiale entre deux racines consécutive de $f$, la solution va rester entre ces deux racines consécutives. Comme $f$ ne s'annule pas entre deux racines consécutives, $f$ est de signe constant donc la solution est monotone, et tend vers une des racines lorsque $t \to \pm\infty$[4]. Si $f>0$, on tend vers la plus grande des racines lorsque $t \to +\infty$, sinon vers la plus petite. Si la condition initiale est au-delà de la plus grande racine ou en-deça de la plus petite racine, on tend soit vers l'infini, soit vers la racines.

On peut préciser la vitesse de convergence. Si $f(y) = c(y-r), c<0$, ($f$ linéaire) la convergence vers $r$ se fait comme $e^{ct}$ pour $t \to +\infty$. Dans le cas général, si $f'(r) \neq 0$, ce résultat est encore valable, heuristiquement :

$$f(y) = (y-r)(f'(r)+o(1)) \Rightarrow \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{f'(r)(y-r)}\frac{1}{1+o(1)} = \frac{1}{f'(r)(y-r)}(1+o(1))$$

où $o(1)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque $y$ tend vers $r$, donc :

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int \frac{dy}{f'(r)(y-r)}(1+o(1))dy = \frac{\ln|y-r|}{f'(r)}(1+o(1)) = \int dt = t+K$$

d'où le résultat (pour une justification plus rigoureuse il faut appliquer le théorème des fonctions implicites pour déterminer $y$ et vérifier que $o(1)$ s'intègre).

**Théorème 30** *On considère l'équation différentielle $y' = f(y)$ où $f$ est continument dérivable, et a des racines réelles classées par ordre croissant ..., $r_k$, .... Si la*

4. On peut prouver l'existence globale de la solution exactement comme pour l'exemple $y' = y(1-y)$ de la section **??**

*condition initiale $y(t_0)$ est située entre deux racines, la solution est monotone entre ces deux racines et tend vers une des racines lorsque $t \to \pm\infty$. Si $y(t_0)$ est situé au-delà de la dernière racine ou en-decà de la première racine (si elles existent), la solution est monotone et tend vers cette racine lorsque $t \to \pm\infty$ ou diverge (en temps fini ou infini).*

*Si $f'(r_k) < 0$, la solution $y = r_k$ est appelée équilibre stable : pour toute condition initiale situé entre $r_{k-1}$ et $r_{k+1}$ la solution tend vers $r_k$ lorsque $t \to +\infty$ et la convergence se fait à vitesse exponentielle, comme $Ce^{f'(r_k)t(1+o(1))}$.*

**Exemple** : pour l'équation logistique $y' = y(1-y)$, $f(r) = r(1-r) = r - r^2$, $f'(r) = 1 - 2r$, il y a deux équilibres $r_0 = 0$ et $r_1 = 1$, avec $f'(r_0) = 1 > 0$ et $f'(r_1) = -1 < 0$ donc un équilibre stable en 1, et un équilibre instable en 0.

### 14.4.4 Systèmes linéaires

**Cas linéaire**

L'évolution du système est gouvernée par les valeurs propres de la matrice $A$ du système, exactement comme pour les équations linéaires où ce sont les racines de l'équation caractéristique. La solution générale tend vers 0 si toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative. S'il y a des paires de valeurs propres conjuguées de partie réelle négative, des phénomènes cycliques amortis apparaissent. Si les valeurs propres sont négatives ou nulles mais distinctes, la solution reste bornée (avec des composantes qui peuvent être périodiques). Si une des valeurs propres a une partie réelle strictement positive, alors pour une condition initiale générique, la solution tend vers l'infini.

**Exemples**

- `[Y]:=desolve(y'=A*y and y(0)=[1,0,0])` pour `A:=[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]`, puis `plot(Y[0],x=0..4)` la solution tend vers l'infini, à vitesse exponentielle comme on peut le voir avec `plot(ln(Y[0]),x=0..4)`. En effet 16.12... est valeur propre de $A$ (`eigenvalues(approx(A))`). On observe le même comportement en remplaçant $A$ par $-A$ (ceci diffère de la dimension 1, où en changeant le sens du temps une solution divergente devient convergente). On peut représenter le graphe de la courbe décrite dans l'espace par exemple avec `plotparam(Y,x=0..2)`
- `[Y]:=desolve(y'=A*y and y(0)=[1,0])` pour `A:=[[-3,1],[1,-5]]`, la courbe dans le plan est obtenue par `plotparam(Y,x=0..10)`, en faisant plusieurs zoom out, on voit la courbe partir de la condition initiale le point $(1,0)$ et aboutir (presque) en l'origine. Les valeurs propres sont en effet $-4 \pm \sqrt{2} < 0$.
- Même chose avec `A:=[[-1,2],[-2,-1]];`. La courbe part toujours du point $(1,0)$ pour aboutir presque en l'origine, cette fois en spiralant (car les valeurs propres sont complexes conjuguées)
- Pour `A:=[[0,2],[-2,0]];`, les valeurs propres sont imaginaires pures, la courbe est un cercle décrite de manière périodique.

**Cas autonome**

On ne sait pas intégrer un système $y' = f(y)$ sans plus de précision sur $f$ (ce n'est plus une équation à variables séparables et il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{R}^n$, donc

pas de monotonie des solutions à attendre). On ne peut donc espérer un résultat général que si la condition initiale est proche d'un point d'équilibre (une solution de $f(r) = 0$). Dans la plupart des cas, on peut conclure sur la stabilité ou l'instabilité du point déquilibre en fonction de la partie réelle des valeurs propres de $f'(r)$, un peu comme en dimension 1. Si toutes les valeurs propres ont des parties strictement négative on peut montrer que le système revient à l'équilibre exponentiellement vite, si l'une des parties réelles est strictement positive, pour une condition initiale générique, le système s'en éloigne, et s'il y a des parties réelles nulles, on ne peut pas conclure/

### 14.4.5 Forçage près d'un point d'équilibre de système.

Si on ajoute un terme dépendant du temps $y' = f(y) + g(t)$, on ne sait plus résoudre l'équation ni décrire son comportement qualitatif en toute généralité. Si la condition initiale est proche d'un équilibre stable, et si la perturbation est "petite" (en tenant compte de l'échelle de temps des exponentielles du système linéarisé) on peut alors linéariser et espérer que la solution se comporte comme la solution de

$$y' = f'(r_k)(y - r_k) + g(t)$$

au moins pendant un certain intervalle de temps. Si $g(t) = g$ est petit et constant, le point d'équilibre est déplacé au premier ordre de

$$y - r_k = -f'(r_k)^{-1} g$$

**Exemple** : modèle d'évolution température puis température-CO2.

Le modèle le plus simple ne tient compte que des radiations venues du Soleil et réémises par la Terre, considérée comme un corps noir

$$\frac{dT}{dt} = k\left(S - \sigma T^4\right)$$

où $k$ modélise l'inertie thermique, $S$ est la constante solaire (environ 1364/4$W/m^2$) et $\sigma$ est relié à la constante de Stefan-Boltzmann (5.67e-8 S.I.). On a alors un équilibre pour $T_e = S^{1/4}$, et cet équilibre est stable.

Si on perturbe par un effet de serre additionnel du CO2, on modélise l'évolution de la température $T$ de la Terre par

$$\frac{dT}{dt} = k\left(6\ln(\frac{CO2}{280}) - \sigma(T^4 - T_e^4)\right)$$

où $T_e = 288K$ est la température d'équiibre de la Terre et $CO2(t)$ la concentration en ppm de gaz carbonique, $k$ modélise la capacité calorifique de la Terre (on peut estimer $k = 0.0025K/yr$), $\sigma$ la constante de Stefan-Boltzmann (5.67e-8 S.I.). Par exemple avec un taux de CO2 stabilisé à 450ppm, le nouvel équilibre est donné à l'ordre 1 par

$$T - T_e = (4\sigma T_e^3)^{-1}(6\ln(\frac{450}{280}))$$

Le taux de CO2 de l'atmosphère peut être considéré comme un forçage extérieur (dépendant de scénarios d'émissions de CO2) mais il dépend aussi de la

température de l'océan, on peut donc modéliser l'évolution conjointe des deux variables par un système différentiel autonome auquel on ajoute une composante dépendant du temps (émissions anthropiques). Par exemple un système 2 par 2 avec un second membre constant dans un scénario avec émissions de CO2 constantes.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix} = F(T,C) = \begin{pmatrix} k(\sigma(T_0^4 - T^4) + 6\ln(\frac{C}{280})) \\ g(T,C) + a \end{pmatrix}$$

où $\partial_C g$ est négatif (l'océan absorbe l'excédent de CO2 émis par rapport à la valeur avec laquelle il est en équilibre, on peut estimer $\partial_C g = -2.5/120$ par les observations : émissions 4.5 ppm par an, hausse de CO2 2ppm/an, donc $g(400) = -2.5 = \partial_C g(400-280)$), et $a$ représente la perturbation anthropique (par exemple $a = 5ppm/an$ si stabilisation des émissions de CO2 à ce niveau). Dans un modèle simplifié $g$ ne dépend que de $C$, la dérivée $F'$ a des coefficients négatifs sur la diagonale et un coefficient nul sous la diagonale, donc les valeurs propres de $F'$ sont négatives, le climat est stable. On atteint alors un nouvel équilibre avec une température $T$ et un taux de CO2 $C$ donnés par

$$\begin{pmatrix} \Delta T_e \\ \Delta C_e \end{pmatrix} = -F'(T_e, C_e)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad F' = \begin{pmatrix} -4k\sigma T_e^3 & 6k/C_e \\ 0 & \partial_C g \end{pmatrix}$$

La valeur de la constante de couplage entre CO2 et T affecte évidemment le calcul de $F'^{-1}$ donc des valeurs à l'équilibre. Ici avec nos estimations :

```
k:=0.0025; s:=5.67e-8;Fp:=[[-4*k*s*288^3,6*k/280
],[0,-2.5/120]]; -Fp^-1*[0,5]
```

$$0.0025, 5.67\times10^{-8}, \begin{bmatrix} -0.013544423424 & 5.35714285714\times10^{-5} \\ 0 & -0.0208333333333 \end{bmatrix}, [0.949257303516, 240.0]$$

on obtient une hausse de température de 1 degré et de CO2 de 240ppm. Cela semble inférieur à la hausse de température observée, car on n'a pas tenu compte d'autres rétroactions, en particulier la glace et l'eau. De plus dans un modèle plus réaliste, $g$ dépend aussi de $T$, en effet si l'océan se réchauffe il dégaze du CO2. La matrice $F'$ n'est plus triangulaire supérieure, mais a 2 coefficients négatifs sur la diagonale et 2 positifs en-dehors. Si les valeurs propres restent négatives, le climat est stable, mais si le couplage était suffisamment fort pour que l'une des valeurs propres dépasse 0, le climat pourrait devenir instable ! Ici on peut estimer grossièrement $\partial_T g = 0.42$ en tenant compte des cycles climatiques du passé, pour une hausse de 5 degrés on observe une hausse de 100ppm à l'équilibre (on doit avoir $F' * [5, 100] = [x, 0]$, $x$ correspondant au forçage astronomique sur la température). Cette estimation laisse les valeurs propres négatives, augmente de 10% environ la hausse de température et de CO2 à l'équilibre.

On peut raffiner ce modèle en ajoutant par exemple la glace et ses interactions avec la température (si la température monte, la glace fond, si la glace fond, l'albédo de la Terre diminue ce qui va faire monter la température), ce qui amène à un système différentiel en dimension 3

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T \\ G \\ C \end{pmatrix} = F(T,G,C) = \begin{pmatrix} k(\sigma(T_0^4 - T^4) + 6\ln(\frac{C}{280}) - \beta G^{2/3}) \\ f(T) \\ g(T,C) + a(t) \end{pmatrix}$$

où $f$ est une fonction décroissante, $\partial_T g$ est positif, et $a(t)$ représente la perturbation anthropique (la puissance deux tiers appliquée à la masse de glace sert à passer d'un volume à une surface pour représenter l'effet de la variation de volume de glace sur l'albédo).

## 14.5 Résolution numérique

### 14.5.1 Méthodes à un pas

On considère l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(t) \in \mathbb{R}^d, y(0) = y_0$$

où $y(t)$ est la fonction inconnue cherchée et où $f$ est une fonction régulière de $t$ et $y$ (par exemple $C^1$ sur un domaine pour avoir existence et non recoupement des courbes intégrales dans ce domaine). On cherche à approcher numériquement $y(t)$ pour $t > 0$. On présente ici des méthodes de résolution numérique à un pas, dont le principe consiste à discrétiser l'intervalle $[0, t]$ en des subdivisions en temps de petite taille $[0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{n-1}, t_n = t]$. Si $y_i$ est une valeur approchée de $y(t_i)$ la méthode à un pas se traduit par une relation de récurrence entre $y_i$ et $y_{i+1}$ qui reflète une méthode d'intégration approchée de

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt$$

Par exemple, la **méthode d'Euler explicite** utilise la méthode des rectangles à gauche

$$y_{i+1} = y_i + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, y_i) = y_i + h f(t_i, y_i)$$

où $h = t_{i+1} - t_i$ [5] alors que la méthode d'Euler implicite utilise la méthode des rectangles à droite

$$y_{i+1} = y_i + (t_{i+1} - t_i) f(t_{i+1}, y_{i+1}) = y_i + h f(t_i + h, y_{i+1})$$

cette dernière relation nécéssite de résoudre une équation pour déterminer $y_{i+1}$ d'où son nom de méthode implicite. Plus généralement, la méthode de résolution revient à se donner une fonction $\Phi(t, y, h)$ et à poser :

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i, h)$$

pour la méthode d'Euler explicite, $\Phi(t, y, h) = f(t, y)$, pour la méthode d'Euler implicite, $\Phi$ s'obtient en résolvant une équation (par exemple avec la méthode du point fixe, pour $h$ suffisamment petit).

```
fonction Euler(f,t0,t1,N,y0)
  // y'=f(t,y) avec f(t0)=y0, calcul de f(t1)
  local h,y,j;
  h:=(t1-t0)/N; // pas
  y:=evalf(y0);
```

5. Pour une méthode à pas variable, le pas $h$ peut dépendre de $i$

```
  pour j de 0 jusque N-1 faire
    y += h*f(t0+j*h,y); // y(t+h)=y(t)+h*y'
  fpour;
  return y;
ffonction:;

  f(t,y):=y; Euler(f,0,1,100,1)-exp(1);
```

$$(t, y) \mapsto y, -0.0134679990382$$

Lorsqu'on compare la solution de l'équation et une valeur approchée obtenue par une méthode à un pas, il faut distinguer

— l'erreur locale (ou erreur de consistance) de la méthode qui est une majoration de $|y_1 - y(t_1)|$ en fonction du pas $h = t_1 - t_0$, on dit qu'une méthode est d'ordre au moins $n$ si $|y_1 - y(t_1)| \leq C_n h^{n+1}$ (cette notion est reliée à l'ordre de la méthode numérique d'intégration approchée utilisée).

— l'erreur globale de la méthode, qui accumule deux phénomènes, l'erreur locale à chaque pas et l'erreur sur la condition initiale pour les subdivisions $[t_i, t_{i+1}], i > 0$, conséquence des erreurs précédentes (en pratique il faudrait aussi ajouter les erreurs d'arrondis et l'erreur éventuelle sur la condition initiale). Pour majorer cette erreur, il est nécessaire de supposer que la fonction $f$ est lipschitzienne par rapport à la variable $y$, l'erreur globale fera alors intervenir un terme en $e^{Ct}$ multiplié par l'erreur locale (accumulation exponentielle des erreurs au cours du temps).

Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Théorème 31** *Soit $y(t)$ la solution de $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ sur $[t_0, T]$. On considére une méthode de résolution à un pas :*

$$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(t_i, y_i, h_i)$$

*Si la méthode est d'ordre p, i.e. si pour $h = max(h_i)$ l'erreur locale satisfait*

$$|y(t) + h\Phi(t, y(t), h) - y(t + h)| \leq C_p h^{p+1}, \quad \forall t \in [t_0, T], h \leq H$$

*et si la fonction $\Phi$ est lipschitzienne en $y$ de constante $\Lambda$ pour $h \leq H$ et $y$ dans un voisinage de la solution $y(t)$, i.e. si*

$$|\Phi(t, z, h) - \Phi(t, y, h)| \leq \Lambda |z - y|$$

*alors l'erreur globale vérifie*

$$|y(t_n) - y_n| \leq h^p \frac{C_p}{\Lambda} (e^{\Lambda(t_n - t_0)} - 1)$$

Par exemple, pour Euler explicite, $\Phi(t, y, h) = f(t, y)$, la constante $\Lambda$ est la constante de Lipschitz de $f$, et on prendra pour $C_1$ un majorant de $\frac{1}{2}|\partial_y f(t, y)|$ dans un voisinage de la solution $y(t)$ pour $t \in [t_0, t_n]$.

Pour prouver ce résultat, il faut déterminer comment se propagent les erreurs locales introduites à chaque pas. Par exemple, on a une erreur locale au pas 1

$y(t_1) - y_1$ donc une condition initiale modifiée pour le pas 2 $y_1$ au lieu de $y(t_1)$. Cette erreur se propage au pas 2 en une erreur

$$|y_1 - y(t_1) + h_1(\Phi(t_1, y_1, h_1) - \Phi(t_1, y(t_1), h_1)| \leq (1 + h_1\Lambda)|y_1 - y(t_1)| \leq e^{h_1\Lambda}|y_1 - y(t_1)|$$

De même aux pas suivants, donc au pas $n$ l'erreur locale au pas 1 s'est propagée en une erreur inférieure ou égale à

$$e^{h_{n-1}\Lambda} ... e^{h_2\Lambda} e^{h_1\Lambda}|y_1 - y(t_1)| = e^{\Lambda(t_n - t_0)}|y_1 - y(t_1)| \leq C_p h_0^{p+1} e^{\Lambda(t_n - t_0)}$$

Il faut ensuite sommer les erreurs locales propagées de chaque pas

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_p h_i^{p+1} e^{\Lambda(t_n - t_i)} \leq C_p h^p \sum_{i=0}^{n-1} h_i e^{\Lambda(t_n - t_i)}$$

Comme $e^{\Lambda(t_n - t)}$ est positive décroissante sur $[t_0, t_n]$, on peut majorer la somme par l'intégrale

$$C_p h^p \int_{t_0}^{t_n} e^{\Lambda(t_n - t)}\, dt$$

d'où le résultat.

On observe qu'on peut atteindre n'importe quelle précision pourvu que $h$ soit suffisamment petit. Mais en pratique, ce n'est pas le cas. En effet, le théorème ne tient pas compte des erreurs d'arrondis. Si le pas est trop petit, les erreurs d'arrondi ne sont plus négligeables, elles s'ajoutent aux erreurs locales et se propagent comme les erreurs locales avec amplification exponentielle. Il y a donc un pas optimal, et une précision maximale que l'on peut atteindre.

Références : Hairer, Demailly.

### 14.5.2 Méthodes de Runge-Kutta (explicites)

Ce sont des méthodes explicites qui utilisent une méthode de Newton-Cotes pour approcher $\int f(t, y(t))\, dt$ sur $[t_i, t_{i+1}]$. Pour simplifier les notations, notons $t_i = \alpha, t_{i+1} = \beta$, on a alors

$$\int_\alpha^\beta f(t, y(t)) \equiv \sum_{k=0}^{N} \omega_k f(\alpha_k, y(\alpha_k)))$$

Pour estimer la valeur de $f(\alpha_k, y(\alpha_k))$, il est nécessaire d'approcher $y(\alpha_k)$ ce qui se fait par une méthode de Newton-Cotes, en utilisant les estimations des valeurs des $y(\alpha_j), j < k$. On a donc des méthodes de Newton-Cotes avec un sous-ensemble croissant de points d'interpolation, donc pour chaque valeur de $k$ une suite de coefficients $\omega_{j,k}, j < k$ correspondant à la méthode de Newton-Cotes utilisée. Il faut aussi indiquer la valeur de $\alpha_k$ en donnant un coefficient $c_k \in [0, 1]$ tel que

$$\alpha_k = t_i + c_k(t_{i+1} - t_i) = t_i + c_k h$$

En pratique on stocke un tableau dont les lignes donnent $c_k$ et les $c_k\omega_{j,k}, j < k$, et le calcul de $y(\alpha_k)$ se fait ligne par ligne

$$y(\alpha_k) \approx Y_k = y(\alpha_0) + h \sum_{j=0}^{k-1} c_k \omega_{j,k} f(\alpha_j, y(\alpha_j))$$

. Par exemple pour la méthode d'Euler explicite, il y a deux lignes contenant 0 et un seul coefficient :

$$\begin{array}{lll} 0 & : & \\ 1 & : & 1 \end{array}$$

. Pour la méthode du point milieu, il y a trois lignes, la deuxière ligne exprime comment on estime $y(t_i + h/2)$, la troisième $y(t_{i+1}) = y(t_i + h)$ :

$$\begin{array}{lllll} 0 & : & & & \\ \frac{1}{2} & : & \frac{1}{2} & & \\ 1 & : & 0 & 1 & \end{array}$$

on a donc

$$y(t_i + \frac{1}{2}h) \approx Y_1 = y(t_i) + \frac{1}{2}hf(t_i, y(t_i))$$

$$y(t_i+h) \approx Y_2 = y(t_i)+hf(t_i+\frac{h}{2}, Y_1) = y(t_i)+hf(t_i+\frac{h}{2}, y(t_i)+\frac{h}{2}f(t_i, y(t_i)))$$

La suite des temps $\alpha_k$ est croissante, mais pas forcément de manière stricte, on peut avoir $\alpha_k = \alpha_{k+1}$, la valeur de $y(\alpha_k)$ n'étant pas estimée par la même méthode de Newton-Cotes que $y(\alpha_{k+1})$. La valeur des coefficients est ensuite déterminée pour obtenir un ordre le plus grand possible pour l'erreur locale (ce qui peut nécessiter la résolution de systèmes avec pas mal d'inconnues).

Ainsi, la méthode RK4 utilise le tableau suivant

$$\begin{array}{lllllll} 0 & : & & & & & \\ \frac{1}{2} & : & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{2} & : & 0 & \frac{1}{2} & & & \\ 1 & : & 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & : & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

Ce qui se traduit par

$$\begin{aligned} Y_1 &= y(t_0) + \frac{h}{2}f(t_0, y_0) \\ Y_2 &= y(t_0) + \frac{h}{2}f(t_0 + \frac{h}{2}, Y_1) \\ Y_3 &= y(t_0) + hf(t_0 + h, Y_2) \\ Y_4 &= y(t_0) + \frac{h}{6}\left(f(t_0, y(t_0)) + 2f(t_0 + \frac{h}{2}, Y_1) + 2f(t_0 + \frac{h}{2}, Y_2) + f(t_0 + h, Y_3)\right) \end{aligned}$$

Les méthodes de Newton-Cotes utilisées sont les rectangles à gauche puis à droite pour estimer le point milieu, et la méthode de Simpson (en prenant la moyenne des deux estimations pour le point milieu). On peut montrer qu'elle est d'ordre 4 (erreur locale en $O(h^5)$)

Les méthodes de résolution numériques implémentées dans Xcas sont des méthodes explicites de Runge-Kutta emboitées avec pas adaptatif, (le pas adaptatif est calculé en estimant l'erreur avec 2 méthodes emboitées RK4 et Prince-Dormand, cf. Hairer).

# Chapitre 15

# Introduction au calcul variationnel

La recherche de minimas/maximas est une des application du calcul différentiel : en dimension 1, la dérivée s'annule lorsque la fonction est maximale ou minimale, en dimension plus grande c'est le gradient qui s'annule. Le calcul variationnel est une généralisation du principe précédent lorsque l'inconnue n'est pas l'endroit $x$ où l'extrêmum est atteint (un réel ou un point), mais une fonction $\gamma(t)$. Par exemple, si on recherche le plus court chemin entre 2 points de l'espace, ou entre 2 points situé sur une sphère ou une surface : dans ce cas l'inconnue est le chemin, que l'on peut représenter par une courbe paramétrée. On obtient alors une équation différentielle qui permet de déterminer le chemin, de même que l'équation $f'(x) = 0$ ou $\nabla f = 0$ permettait de trouver la position d'un extrêmum. Réciproquement, certaines équations différentielles de la physique peuvent se mettre sous la forme minimiser une fonction dépendant d'un chemin, le chemin étant la courbe intégrale de l'équation différentielle. C'est le cas par exemple des équations de la dynamique en mécanique classique aussi bien qu'en relativité. Un des intérêts d'une formulation variationnelle de ces équations, c'est que ce type de formulation est plus intrinsèque (plus géométrique) elle ne dépend pas des coordonnées.

Dans le cas général on se donne :

— $L$ une fonction deux fois continument dérivable dépendant de la position $x$ dans un système de coordonnées, de la dérivée de $x$ par rapport au temps $\dot{x}$ et du temps $t$ appelé **lagrangien** :

$$(x, \dot{x}, t) \to L(x, \dot{x}, t) \in \mathbb{R}$$

En coordonnées cartésiennes $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, en coordonnées polaires $x = (r, \theta)$, etc. En coordonnées cartésienne, $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$ est la vitesse [1], alors qu'en polaires la vitesse n'est pas $(\dot{r}, \dot{\theta})$.

— $A$ et $B \in \mathbb{R}^n$ deux points

et on cherche parmi les courbes paramétrées deux fois continument dérivables $\gamma(t)$ d'origine $\gamma(t_0) = A$ et extrémité $\gamma(t_1) = B$ le(s) chemin(s) réalisant le minimum

1. on appelle espace des configurations l'espace des positions, vitesses, $(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en coordonnées cartésiennes, espace que l'on a déjà utilisé implicitement pour passer d'une équation différentielle d'ordre 2 à un système différentiel d'ordre 1

(s'il existe) de l'**action**[2] :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \frac{d\gamma(t)}{dt}, t)dt$$

En coordonnées cartésiennes, $\gamma(t)$ est une courbe paramétrique (mais en coordonnées polaires, $(r(t), \theta(t))$ n'est pas une courbe en polaires).

Exemples :

— longueur minimale dans le plan, en coordonnées cartésiennes $n = 2$ et $x = (x_1, x_2)$

$$L(x, \dot{x}, t) = \|\dot{x}\| = \sqrt{\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2}$$

— lagrangien de la mécanique classique ($n = 1, 2$ ou 3, dans un référentiel galiléen en coordonnées cartésiennes) : énergie cinétique **moins**[3] énergie potentielle :

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x, t)$$

— lagrangien en relativité restreinte :

$$L(x, \dot{x}, t) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} - V(x, t)$$

le premier terme est proportionnel à l'opposé du temps propre.

— si on considère une particule chargée de charge $q$ dans un champ électrique alors $V(x, t) = q\phi(x, t)$ (dans un champ électro-magnétrique $V$ dépend de la vitesse, $V(x, \dot{x}, t) = q\phi(x, t) - q\dot{x}.\overrightarrow{A(x, t)}$), où $\phi(x, t)$ est le potentiel scalaire (et où $\overrightarrow{A(x)}$ est le potentiel vecteur tel que rot$(\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{B}$). Les champs $\phi$ et $A$ peuvent dépendre du temps ou non.

**Proposition 32** *Équations d'Euler-Lagrange : ce sont des conditions nécessaires pour que $\gamma(t)$ soit un extrêmum, si $x = (x_1, ..., x_n)$ est un système de coordonnées (pas forcément cartésiennes), elles sont données par :*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad \textit{pour } i = 1, ..., n$$

*(On vérifie que cette équation a la bonne homogénéité.)*

Sur les exemples, on obtient

— pour la longueur minimale dans le plan, on a

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}} = \frac{\dot{x_1}}{\sqrt{\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2}}$$

qui est la première composante du vecteur tangent, de même pour la deuxième composante, donc le long de la courbe le vecteur tangent a sa dérivée nulle, donc est constant. Une courbe réalisant un extrêmum de la distance entre deux points dans le plan est donc portée par une droite, c'est le segment reliant ces deux points.

2. On pourrait bien sur avoir une action dépendant de dérivées d'ordre supérieur de $\gamma(t)$
3. Le signe moins vient de la convention adoptée en physique pour le lien entre potentiel et force

— Pour le deuxième exemple

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = m\dot{x_1}$$

c'est-à-dire la composante sur $x_1$ de la force et de la quantité de mouvement, donc l'équation d'Euler-Lagrange donne l'équation fondamentale de la dynamique.

— Pour le troisième exemple, on a

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = m\frac{\dot{x_1}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}}$$

c'est-à-dire la composante sur $x$ de la force et de la quantité de mouvement en relativité restreinte, on retrouve donc l'équation fondamentale de la dynamique.

**Démonstration (idée) :**
On fait varier le chemin en ajoutant à $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ un vecteur $u\Delta(t)$ avec $\Delta(t_0) = \Delta(t_1) = 0$, on obtient une action $S(u)$, on calcule la dérivée en $u = 0$ de $S(u)$, elle doit s'annuler pour avoir un extrêmum, et ce quel que soit la valeur de la fonction $\Delta$ telle que $\Delta(t_0) = \Delta(t_1) = 0$. Prenons pour commencer $\Delta$ uniquement sur la première composante $\Delta(t) = (\delta(t), 0, ..., 0)$, on a :

$$S(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(x_1(t) + u\delta(t), x_2(t), ..., x_n, \dot{x_1} + u\dot{\delta}, \dot{x_2}, ..., x_n', t)\ dt$$

on dérive par rapport à $u$ sous le signe intégrale (on peut intervertir dérivée et intégrale car $\gamma, \delta, L$ sont deux fois continument dérivables). Comme $u$ intervient dans deux composantes de $L$, il y a deux dérivées partielles qui interviennent :

$$S'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\delta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\dot{\delta}\right)\ dt$$

On intègre par parties le deuxième terme ($\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt}$), le terme tout intégré est nul car $\delta(t_0) = \delta(t_1) = 0$, d'où :

$$0 = S'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\delta - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\delta\right)\ dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right)\delta\ dt$$

Comme le résultat doit être nul pour toute valeur de $\delta$, on en déduit la première équation d'Euler-Lagrange (en prenant $\delta = (t - t_0)(t_1 - t)(\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}})$ si la régularité est suffisante, ou sinon en raisonnant par l'absurde : si l'équation n'est pas vérifiée en un point, alors on prend $\delta$ non nulle seulement au voisinage de ce point et nulle ailleurs, et on choisit $\delta$ de même signe que l'autre facteur, l'intégrale est alors strictement positive, absurde).

Un des intérêts de cette écriture des équations de la mécanique, c'est de pouvoir effectuer un changement de coordonnées plus facilement, car la propriété de rendre l'action extrêmale pour un chemin est indépendant du choix des coordonnées. **Exemple :** si $n = 2$, on peut utiliser les coordonnées polaires $(r, \theta)$, on a alors

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r, \theta)$$

Si le potentiel dépend seulement de $r$ (en dimension 2), alors $L$ ne dépend pas de $\theta$ (seulement de $\dot{\theta}$) donc

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

on a donc une intégrale première, qui est le moment cinétique $mr^2\dot{\theta} = \mathcal{L}$. L'autre équation est

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - V'(r)$$

et s'exprime uniquement en fonction de $r$

$$m\ddot{r} = \frac{\mathcal{L}^2}{mr^3} - V'(r)$$

tout se passe comme si on était en dimension 1 avec un potentiel effectif $V(r) + \frac{\mathcal{L}^2}{2mr^2}$.

**Exercice** : Calculer le lagrangien en coordonnées sphériques et donner les équations d'Euler-Lagrange si le potentiel $V$ est radial ($V = V(r)$).
**Solution abrégée**

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin(\theta)^2\dot{\phi}^2) - V$$

$L$ ne dépend pas explicitement de $\phi$, il y a donc une constante du mouvement

$$p_\phi = \partial L/\partial\dot{\phi} = mr^2\sin(\theta)^2\dot{\phi}, \quad \dot{p_\phi} = 0$$

c'est le moment cinétique par rapport à $Oz$. $V$ ne dépend pas de $\theta$ mais $L$ en dépend, donc $p_\theta = \partial L/\partial\dot{\theta}$ n'est pas conservé :

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad \dot{p_\theta} = mr^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2$$

Toutefois, pour des raisons de symétrie, les moments par rapport à $Ox$ et $Oy$ sont aussi conservés, on a donc d'autres constantes du mouvement. On peut continuer de deux manières, soit choisir le repère pour avoir $\dot{\phi} = 0$ à la condition initiale, alors $\dot{\phi}$ reste nul pendant tout le mouvement qui se passe dans le plan $\phi$ constant, on est ramené à un lagrangien en coordonnées polaires, qui ne dépend plus de $\theta$. Ou bien on montre que $p_\theta^2 + p_\phi^2/\sin^2(\theta)$ est constant.

Plus généralement, si $L$ ne dépend pas explicitement du temps, alors le **hamiltonien** défini par :

$$H = \sum_i \dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L$$

est une intégrale première, en effet

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \sum_i \ddot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_i \dot{x}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{d\dot{x}_i}{dt}\right) \\
&= \sum_i \ddot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_i \dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial x_i} - \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

**Exercice** : calculer $H$ pour le lagrangien de la mécanique classique et de la relativité restreinte.

**Exemple** : On cherche la forme d'un toboggan qui permette de se rendre le plus rapidement possible d'un point $A$ (origine du repère) à un point $B$ situé à une altitude plus basse sous l'action de la gravité (en négligeant les frottements). Si cette courbe est un graphe de fonction $y(x)$ alors la vitesse est donnée par $\overrightarrow{v} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = \frac{dx}{dt}(1, y')$. D'autre part $v = \sqrt{-2gy}$. Donc

$$\frac{dx}{dt}\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{-2gy}$$

on en déduit :

$$dt = dx\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}}$$

donc le temps à minimiser est

$$\int_{x_A=0}^{x_B} dt = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}}dx$$

Pour se ramener au problème précédent, on change de notations, $x$ devient un "temps virtuel" $\tau$ et $y' = \dot{y}$ est la dérivée de $y$ par rapport à ce temps virtuel, il faut minimiser

$$\int_0^{\tau_B} L(y, \dot{y}, \tau)d\tau, \quad L(y, \dot{y}, \tau) = \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{-2gy}}$$

le lagrangien ne dépend pas explicitement de $\tau$, donc le hamiltonient correspondant

$$H = \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L$$

est conservé, donc indépendant de $\tau$ donc en revenant à la notation $x$ pour l'abscisse on a

$$\begin{aligned} H &= y'\frac{\partial\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}}\right)}{\partial y'} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-2gy}}\left(y'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-2gy}\sqrt{1+y'^2}} \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient l'équation différentielle :

$$-2gH^2y(1+y'^2) = 1$$

soit

$$y'^2 = \frac{-2c}{y} - 1, \quad c = gH^2$$

Comme $y \leq 0$ et $y'(0) = 0$, on en déduit que $y'$ est négatif :

$$-dy = \sqrt{\frac{-2c}{y} - 1}\, dx$$

Il s'agit d'une équation à variables séparables. En posant $y = -c + cY, x = cX$ on obtient une équation indépendante de $c$ :

$$-dY = \sqrt{\frac{2}{1-Y} - 1}\, dX = \sqrt{\frac{1+Y}{1-Y}} dX$$

Donc

$$-\int \sqrt{\frac{1-Y}{1+Y}} dY = \int dX$$

puis (pour trouver la constante d'intégration, on observe que $Y = 1$ pour $X = 0$) :

$$-\sqrt{1-Y^2} + \arccos(Y) = X$$

Si on pose $Y = \cos(t), t \in [0, \pi]$, on a $X = t - \sin(t)$, la solution est donc une cycloïde renversée. On peut aussi le vérifier directement en remplaçant dans l'équation $x$ et $y$ par les équations paramétriques de la cycloïde renversée

$$x = c(t - \sin(t)),\ y = -c + c\cos(t),\ t \in [0, \pi]$$

on trouve pour le membre de droite :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{-2c}{y} - 1}\, dx &= c\sqrt{\frac{2}{1-\cos(t)} - 1}\,(1 - \cos(t))\, dt \\
&= c\sqrt{\frac{1+\cos(t)}{1-\cos(t)}}\,(1 - \cos(t))\, dt \\
&= c\sqrt{1 - \cos(t)^2}\, dt \\
&= c\sin(t)\, dt \\
&= -dy
\end{aligned}$$

**Pour aller plus loin** :

— le théorème de Noether permet de déduire une constante du mouvement lorsque le lagrangien est invariant par un groupe continu de transformations (par exemple translation ou rotation dans l'espace).

— les équations de la mécanique peuvent se réécrire en terme du hamiltonien, en utilisant les coordonnées $(q = x, p = \partial L/\partial \dot{x})$ de l'espace des phases, sous la forme

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

On obtient un système *symplectique* qui possède des propriétés géométriques et permet de calculer des solutions numériques de meilleure qualité en en tenant compte (intégration symplectique). La formulation hamiltonienne de la mécanique est aussi très liée à la mécanique quantique (principe de correspondance).

# Chapitre 16

# Corps finis.

## 16.1 Rappels

Soit $K$ un corps fini. Le plus petit entier $p$ tel que $p.1 = 0$ est la caractéristique du corps, c'est un nombre premier (car $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$), et $K$ est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ espace vectoriel de dimension finie $n$, donc son cardinal est $p^n$.

Les inversibles pour la multiplication forment un groupe de cardinal $p^n - 1$ et ce groupe est cyclique (sinon on construit un élément d'ordre $d$ le PPCM des ordres des éléments de $K^*$, cet ordre est donc un diviseur strict de $p^n - 1$, mais c'est impossible car le polynôme $x^d - x$ a alors $p^n - 1 > d$ racines).

L'application $\phi : x \to x^p$ est une application linéaire et le noyau de $\phi$-id est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $P$ est un polynôme irréductible à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de degré divisant $n$, alors $P$ se décompose en produit de facteurs de degré 1 et on passe d'une racine de $P$ dans $K$ à une autre en appliquant $\phi$ (en effet $P$ divise $x^{p^n} - x$ modulo $p$ et $x^{p^n} - x = \prod_{\alpha \in K}(x - \alpha)$). Exemple : faire `GF(3,5)` pour créer le corps $K$ de cardinal $3^5$, puis `P:=randpoly(5) % 3; factor(P)` et exécuter à niveau la commande jusqu'à ce que $P$ soit irréductible, puis tester `factor(P,g)`. Evidemment, ce résultat n'est plus vrai si $P$ a des coefficients dans $K$ au lieu de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (essayer avec `P:=randpoly(5,g)`).

## 16.2 Représentation des corps non premiers.

### 16.2.1 Cas général.

Pour représenter $K$, on utilise généralement la représentation dite additive, c'est-à-dire que $K$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]/P(X)$ avec $P$ un polynôme irréductible de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ de degré $n$. Si la classe de $X$ est d'ordre $p^n - 1$ dans $K^*$ on dit que $P$ est **primitif**. Dans Xcas, c'est cette représentation qui est utilisée, l'instruction `GF(p,n)` génère aléatoirement un polynôme irréductible de degré $n$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, puis cherche un élément cyclique, calcule son polynôme minimal (qui est donc primitif), et affiche le nom d'un générateur (par défaut `g`), il suffit alors d'écrire n'importe quelle expression symbolique polynomiale en ce générateur pour créer un élément de $K$. En interne, Xcas stocke les éléments de $K$ comme des polynômes-listes à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et les affiche comme polynôme symbolique en fonction du générateur. On peut aussi utiliser un entier entre 0 et $p^n - 1$ dont l'écriture en base $p$ représente les coefficients du polynôme.

Pour générer un polynôme **irréductible**, on utilise un génerateur aléatoire d'entiers dans $[0, p[$, on crée un polynôme unitaire de degré $n$, et on teste son irréductibilité en calculant le PGCD de $P$ avec les $x^{p^k} - x$ pour $k$ de 1 jusque $n/2$. En pratique, on calcule les `powmod(x,p^k,p,P)` (en prenant la puissance modulaire $p$-ième du précédent), on retire $x$ et on calcule le pgcd avec $P$, si on trouve un résultat différent de 1, on passe au polynôme suivant (généré aléatoirement). On peut calculer la probabilité de réussir en dénombrant les polynômes irréductibles de degré $n$ à l'aide de la formule $x^{p^n} - x = \prod_{P \text{ irréductible unitaire }/\deg(P) \text{ divise } n} P$.

Trouver un élément **cyclique** se fait aussi au hasard (`rand(g)` en Xcas si `g` est le générateur d'un corps fini), la probabilité se calcule à l'aide de l'indicatrice d'Euler de $p^n - 1$. Déterminer le polynome minimal d'un élément est alors un problème d'algèbre linéaire, il se résoud en calculant le noyau de la matrice dont les colonnes sont les coefficients des puissances de l'élément (instruction `pmin` en Xcas).

La représentation additive est pratique pour additionner ou soustraire des éléments de $K$, multiplier nécessite de faire une division euclidienne par $P$ et prendre le reste, inverser nécessite de faire une identité de Bézout avec $P$. Il existe une représentation alternative, dite multiplicative, on représente alors un élément $g^k$ de $K^*$ par la puissance $k \in [0, p^-2]$ du générateur $g$, et on représente $0_K$ par -1 ou par $p^n - 1$. Mais l'addition est alors difficile sauf si on dispose d'une table passant de la représentation additive à la représentation multiplicative.

### 16.2.2 Corps de petit cardinal, cas de la caractéristique 2

Si le cardinal du corps n'est pas trop grand (par exemple moins que quelques milliers), il est intéressant de construire une table de passage entre représentation additive et multiplicative, c'est-à-dire une permutation de $[0, p^n - 1]$ si on utilise des entiers pour la représentation additive. On calcule donc une fois pour toutes la représentation additive de toutes les puissances de $g$ ce qui fournit la table de passage multiplicatif vers additif, puis la permutation inverse, on peut alors effectuer toutes les opérations sur le corps $K$ très rapidement : la multiplication devient un test si l'un des éléments vaut $p^n - 1$ suivi d'une addition modulo $p^n - 1$ si ce n'est pas le cas, l'addition une écriture en base $p$ et $n$ additions dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

En caractéristique 2, l'addition est encore plus simple, il s'agit d'un ou exclusif bit à bit (sur un type entier court 8 ou 16 ou 32 bits). De plus le calcul de la permutation de passage est très rapide, pour trouver $g^{k+1}$ en fonction de $g^k$ il faut multiplier par $g$ ce qui est un décalage de bit vers la gauche, tester si l'entier est supérieur à $2^n$ et si oui faire un ou exclusif avec l'entier représentant le polynôme minimal de $g$. Si le cardinal du corps est assez petit (par exemple $2^8$, ou disons moins que $2^{13}$), la permutation et son inverse tiennent dans le cache du microprocesseur et les opérations sur le corps $K$ se font en une dizaine de cycles du microprocesseur.

## 16.3 Exercices

Dans Xcas, pour travailler dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on utilise l'opérateur `%`. Attention à bien laisser un espace avant ou/et après `%` si vous utilisez des noms de variables. Par exemple `p:=7; 3 % p` représente la classe de 3 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Pour travailler dans un corps fini non premier de caractéristique $p$ et de cardinal $p^n$, on crée le corps avec la commande `GF(p,n)` ou une variante. Les variantes permettent de préciser le nom de variable pour générer les éléments du corps comme polynômes en cette variable, ou pour préciser le polynôme minimal ou pour indiquer si on ne souhaite pas que le polynôme minimal soit primitif (i.e. que les puissances de la variable engendre le corps moins 0). Par exemple

— `GF(2,8,r)` utilisera `r` comme variable
— `GF(2,128,0)` utilisera un polynôme minimal pas forcément primitif
— `GF(2,128,r,0)` combine les deux
— `GF(2,w^8+w^7+w^5+w+1)` utilise `w` comme variable et le polynôme minimal `w^8+w^7+w^5+w+1` qui n'est pas forcément primitif.

Exercices :

1. Construire un corps $K$ à 81 éléments avec la commande `GF`. Chercher un polynôme irréductible de degré 4 sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, puis le factoriser sur le corps $K$.

2. Trouver un polynôme irréductible $P$ de degré 5 sur $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. En déduire une représentation de `GF(7,5)`. Factoriser le polynôme $P$ sur votre représentation de `GF(7,5)` (on pourra utiliser l'application $x \to x^7$).

3. Déterminer le polynôme minimal de quelques éléments de `GF(7,5)` en utilisant votre représentation ou celle de Xcas. Même question mais en degré 4 avec la représentation de Xcas.

4. Factoriser avec Xcas $x^{16} - x$ modulo 2 (on pourra utiliser `factors()`, `% 2` et `% 0`). En déduire les polynômes irréductibles de degré 4 sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, déterminez les polynômes irréductibles primitif de degré 4, pour l'un d'entre eux construire une table entre représentation multiplicative et additive de `GF(2,4)`.

5. Écrire une fonction permettant de déterminer si un polynôme $A$ est irréductible modulo $p$, en utilisant le PGCD avec les $x^{p^k} - x$ modulo $p$. Quelle est sa complexité si $A$ est irréductible de degré $d$ ?

6. Créer une matrice carrée $M$ d'ordre 3 à coefficients dans un corps de cardinal 25, déterminer son polynome minimal et son ordre. Quels sont les ordres possibles ?

## 16.4 Rappels de quelques complexités de base

$n$ désigne un majorant commun de la taille des arguments, ou bien $n_1$ et $n_2$ désignent la taille des 2 arguments.

### 16.4.1 Polynomes denses et entiers

Pour un polynôme en une variable à coefficients dans un corps fini, la taille est le degré du polynôme, on prend comme convention que la somme et le produit des coefficients se fait en temps $O(1)$.

Pour un entier, la taille est le nombre de chiffres dans l'écriture dans une base quelconque, $n$ est donc un majorant de $\log_b(N)$.

- Addition, soustraction : $O(n)$ ou $O(\max(n_1, n_2))$
- Multiplication naïve : $O(n^2)$ ou $O(n_1 n_2)$
- Division naïve : $O(n^2)$ ou $O(n_2(n_1 - n_2))$.
- Multiplication rapide : Karatsuba $O(n^{\log(3)/\log(2)})$, ..., FFT $O(n\ln(n))$ pour des polynômes
- PGCD, Bézout : $O(n^2)$
- calcul de $a^N \pmod p$ ou cout d'un test de Miller-Rabin : en $O(\ln(N))$ étapes, donc en $O(\ln(N)\ln(p)^2)$

**Remarques**

- Attention, le cout est plus important si les coefficients sont entiers ou rationnels.
- Si on tient compte du cout des opérations sur le corps fini de cardinal $c$. Il faut multiplier les couts par $O(\ln(c))$ pour $+, -$ et par $O(\ln(c)^2)$ pour les autres opérations.
- Pour des polynômes creux, les couts sont estimés en fonction du nombre de coefficients non nuls.

### 16.4.2 Algèbre linéaire dense

Pour une matrice carrée $n, n$ à coefficients dans un corps fini où les opérations se font en temps $O(1)$.

- Addition, soustraction, multiplication par un scalaire, multiplication par un vecteur : $O(n^2)$
- Multiplication de 2 matrices, pivot de Gauss (décomposition $LU$, inverse, déterminant...) : $O(n^3)$
- Multiplication rapide par blocs (Strassen) en $O(n^{\log(7)/\log(2)})$, que l'on peut généraliser au pivot de Gauss

**Remarques**

- Attention, le cout est plus important si les coefficients sont entiers ou rationnels.
- Pour des matrices creuses, les couts sont estimés en fonction du nombre de coefficients non nuls.

## 16.5 Codes linéaires et polynomiaux.

Les corps finis premiers servent dans tous les algorithmes modulaires, on en a vu par exemple l'intérêt pour le PGCD, la factorisation...

Les corps finis premiers et non premiers servent aussi dans le domaine de la cryptographie et des codes correcteurs d'erreurs, on présente ici ce dernier point.

Références : Demazure, G. Zémor, wikipedia (pour les codes de Hamming binaires).

On appellera symbole d'information l'unité de base transmise, qu'on supposera appartenir à un corps fini $K$, par exemple pour un bit un élément de $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ou pour un octet un élément du corps à 256 éléments $K = F_{256} = F_d$.

On veut coder un message de longueur $k$ avec des possibilités de détection et de correction d'erreurs, pour cela on rajoute des symboles calculés à partir des précédents, on envoie un élément d'un code ayant $n$ symboles.

### 16.5.1 Le bit de parité.

On prend $k = 7$ bits et $n = 8$ bits. On compte le nombre de 1 parmi les 7 bits envoyés, si ce nombre est pair, on envoie 0 comme 8ième bit, sinon 1. Au final le nombre de bits à 1 de l'octet (1 octet=8 bits) est pair. On peut ainsi détecter une erreur de transmission si à la réception le nombre de bits d'un octet est impair, mais on ne peut pas corriger d'erreurs. On peut aussi dire que l'octet représente un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ divisible par $X + 1$.

**Exercice** : Écrire un programme Xcas permettant de rajouter un bit de parité à une liste composée de 7 bits. Puis un programme de vérification qui accepte ou non un octet selon sa parité. Vous représenterez l'octet par une liste de bits, avec le délimiteur `poly1[` pour pouvoir effectuer des opérations arithmétiques polynomiales, et vous effectuerez la vérification de deux manières, en comptant le nombre de 1 ou avec l'instruction `rem`.

### 16.5.2 Codes linéaires

**Définition** : On multiplie le vecteur des $k$ symboles par une matrice $M$ à coefficients dans $K$ de taille $n \times k$ et on transmet l'image. Pour assurer qu'on peut identifier un antécédent unique à partir d'une image, il faut que $M$ corresponde à une application linéaire injective, ce qui entraine $n \geq k$. On dit qu'un vecteur de $n$ symboles est un mot du code s'il est dans l'image de l'application linéaire.

Pour assurer l'injectivité tout en facilitant le décodage, on utilise souvent une matrice identité $k, k$ comme sous-bloc de la matrice $n, k$, par exemple on prend l'identité pour les $k$ premières lignes de $M$, on ajoute ensuite $n - k$ lignes.

Pour savoir si un vecteur est un mot de code, il faut vérifier qu'il est dans l'image de $M$. On peut par exemple vérifier qu'en ajoutant la colonne de ses coordonnées à $M$, on ne change pas le rang de $M$ (qui doit être $k$) mais c'est assez couteux. On préfère utiliser une matrice de controle $H$

$$x \in \mathrm{Im}(M) \Leftrightarrow Hx = 0$$

Si la matrice $M$ est composée de l'identité $I_k$ et d'une matrice $C$ sur ses $n - k$ dernières lignes, alors $H = (-C, I_{n-k})$.

**Exercice** : créez une matrice $M$ de taille 7,4 injective. Puis un programme qui teste si un vecteur est un mot de code et en extrait alors la partie avant codage. Vérifiez votre programme avec un vecteur $Mv$, on doit obtenir un mot de code.
Instructions utiles : `idn` (matrice identité) `ker` (noyau d'une application linéaire), `rank` (rang), `tran` (tranposée), ... Pour créer une matrice, on peut coller les lignes de 2 matrices $A$ et $B$ par `[op(A),op(B)]` ou avec `blockmatrix`.

### 16.5.3 Codes polynomiaux

**Définition** : Il s'agit d'un cas particulier de codes linéaires. On se donne un polynôme $g(x)$ de degré $n-k$, On représente le message de longueur $k$ à coder par un polynôme $P$ de degré $k-1$. On multiplie $P$ par $x^{n-k}$, on calcule le reste $R$ de la division de $Px^{n-k}$ par $g$. On émet alors $Px^{n-k}-R$ qui est divisible par $g$. Les mots de code sont les polynômes divisibles par $g$.

**Exercice** : écrire de cette façon le codage du bit de parité. Puis une procédure Xcas de codage utilisant $g=X^7+X^3+1$ (ce polynôme était utilisé par le Minitel). N.B. on obtient le polynôme $X^{n-k}$ sous forme de polynome-liste dans Xcas par `poly1[1,0$(n-k)]`.

### 16.5.4 Détection et correction d'erreur

Si le mot recu n'est pas dans l'image de l'application linéaire il y a eu erreur de transmission. Sinon, il n'y a pas eu d'erreur *détectable* (il pourrait y avoir eu plusieurs erreurs qui se "compensent").

Plutôt que de demander la réémission du mot mal transmis (ce qui serait par exemple impossible en temps réel depuis un robot en orbite autour de Mars), on essaie d'ajouter suffisamment d'information pour pouvoir corriger des erreurs en supposant que leur nombre est majoré par $N$. Si les erreurs de transmissions sont indépendantes, la probabilité d'avoir au moins $N+1$ erreurs dans un message de longueur $L$ est $\sum_{k=N+1}^{L}\binom{L}{k}\epsilon^k(1-\epsilon)^{L-k}$, où $\epsilon$ est la probabilité d'une erreur de transmission, c'est aussi `1-binomial_cdf(L,epsilon,N)`. Par exemple, pour un message de $10^3$ caractères, chacun ayant une probabilité d'erreur de transmission de $10^{-3}$, si on prend $N=3$, alors la probabilité d'avoir au moins 4 erreurs est de 0.019 (arrondi par excès) :

```
P(N,eps,L):=sum(comb(L,k)*eps^k*(1-eps)^(L-k),k,N+1,L):;
P(3,1e-3,10^3)
```

ou directement `1-binomial_cdf(1000,1e-3,3)`.

**Exemple** : On ne peut pas corriger d'erreur avec le bit de parité.

### 16.5.5 Distances

La **distance de Hamming** de 2 mots est le nombre de symboles qui diffèrent. (il s'agit bien d'une distance au sens mathématique, elle vérifie l'inégalité triangulaire).

Exercice : écrire une procédure de calcul de la distance de Hamming de 2 mots. En Xcas, la fonction s'appelle `hamdist`.

La distance d'un code est la distance de Hamming minimale de 2 mots différents du code. Pour un code linéaire, la distance est aussi le nombre minimal de coefficients non nuls d'un vecteur non nul de l'image. Pour un code polynomial, la

distance du code est le nombre minimal de coefficients non nuls d'un multiple de $g$ de degré inférieur à $n$.

Exercice : quelle est la distance du code linéaire que vous avez créé plus haut ?

**Majoration de la distance du code :**

La distance minimale d'un code linéaire est inférieure ou égale à $n-k+1$ : en effet on écrit en ligne les coordonnées des images de la base canonique (ce qui revient à transposer la matrice) et on réduit par le pivot de Gauss, comme l'application linéaire est injective, le rang de la matrice est $k$, donc la réduction de Gauss crée $k-1$ zéros dans chaque ligne, donc le nombre de coefficients non nuls de ces $k$ lignes (qui sont toujours des mots de code) est au plus de $n-k+1$.

Exercice : si votre code linéaire n'est pas de distance 3, modifiez les 3 dernières lignes pour réaliser un code de distance 3. On ne peut pas obtenir une distance $n-k+1=4$ avec $n=7$ et $k=4$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, essayez ! Essayez sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

N.B. : Pour les codes non polynomiaux, par exemple convolutifs, la distance n'est pas forcément le paramètre le mieux adapté à la correction d'erreurs.

### 16.5.6 Correction au mot le plus proche

Une stratégie de correction basée sur la distance consiste à trouver le mot de code le plus proche d'un mot donné. Si la distance d'un code est supérieure ou égale à $2t+1$, et s'il existe un mot de code de distance inférieure à $t$ au mot donné, alors ce mot de code est unique. On corrige alors le mot transmis en le remplaçant par le mot de code le plus proche.

Exercice : écrivez un programme permettant de corriger une erreur dans un mot dans votre code linéaire.

On dit qu'un code $t$-correcteur est **parfait** si la réunion des boules de centre un mot de code et de rayon $t$ (pour la distance de Hamming) est disjointe et recouvre l'ensemble des mots ($K^n$).

Exercice : votre code linéaire sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (celui de distance 3) est-il un code 1-correcteur parfait ?

### 16.5.7 Codes de Hamming

Soit un code de longueur $n$, de dimension $k$, le nombre d'informations supplémentaires est noté $m=n-k$. Un code de Hamming permet une correction, donc la distance du code $\delta$ est (au moins) 3. Si le code est parfait sur $K=F_d$, on a

$$(1+n(d-1))d^k = d^n \Rightarrow n = \frac{d^m-1}{d-1}$$

Par exemple si $d=2$ et $m=4$ alors $n=15$. Il n'y a qu'une matrice de controle possible de taille $(15,4)$ telle que $Hx$ donne la position de l'erreur (en base 2), elle est obtenue en écrivant les entiers de 1 à 15 en base 2

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on déplace les colonnes de la matrice identité (colonnes 1, 2, 4, 8) en fin pour écrire $H = (-C, I_4)$, le code correspondant est $\binom{I_{11}}{C}$, il permet de corriger une erreur, on calcule $Hx$ et si le résultat est non nul, on change le bit d'indice $Hx$ en tenant compte du déplacement des colonnes 1, 2, 4 et 8. En fait, il est plus simple de ne pas faire ce déplacement de colonnes.

Code systématique :

1. On repère les indices de bit en commençant à 1
2. On écrit les indices de bit en base 2
3. Les bits dont les indices sont des puissance de 2 sont des bits de parité
4. Les autres bits sont des bits de donnée
5. Les bits de parité sont calculés pour avoir parité paire selon les bits d'indice respectifs 1 mod 2 pour le bit de parité p1, selon les bits d'indice divisé par 2 valant 1 mod 2 pour le bit de parité p2, etc.
6. Pour corriger une erreur, on corrige le bit dont la position écrite en base 2 a des 1 là où la parité est fausse.

| Indice | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p1 | x | | x | | x | | x | | x | | x | | x | | x |
| p2 | | x | x | | | x | x | | | x | x | | | x | x |
| p4 | | | | x | x | x | x | | | | | x | x | x | x |
| p8 | | | | | | | | x | x | x | x | x | x | x | x |
| | p1 | p2 | d1 | p4 | d2 | d3 | d4 | p8 | d5 | d6 | d7 | d8 | d9 | d10 | d11 |

Autre exemple : le minitel utilisait $d = 2, m = 7, n = 2^m - 1$.

## 16.6 Les codes de Reed-Solomon

Il s'agit de codes polynomiaux qui réalisent la distance maximale possible $n - k + 1$. De plus la recherche du mot de code le plus proche peut se faire par un algorithme de Bézout avec arrêt prématuré.

### 16.6.1 Théorie

On se donne un générateur $a$ de $F_q^*$ et le polynôme $g(x) = (x - a)...(x - a^{2t})$ (donc $n - k = 2t$). Typiquement $q = 2^m$ avec $m = 8$, $a$ est une racine d'un polynôme irréductible de degré $m$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$ qui ne divise pas $x^l - 1$ pour $l$ diviseur strict de $2^m - 1$ (pour en construire, cf. le chapitre corps finis **??**).

**Distance du code**

Si la longueur $n$ d'un mot vérifie $n \leq 2^m - 1$, alors la distance entre 2 mots du code est au moins de $2t + 1$. En effet, si un polynome $P$ de degré $< n$ est un multiple de $g$ ayant moins de $2t + 1$ coefficients non nuls,

$$P(x) = \sum_{k=1}^{2t} p_{i_k} x^{i_k}, \quad i_k < n$$

en écrivant $P(a) = ... = P(a^{2t}) = 0$, on obtient un déterminant de Van der Monde, on prouve qu'il est non nul en utilisant la condition $i_k < n$ et le fait que la première puissance de $a$ telle que $a^x = 1$ est $x = 2^m - 1$.

**Correction des erreurs**

Soit $c(x)$ le polynome envoyé, $d(x)$ le polynôme recu, on suppose qu'il y a moins de $t$ erreurs

$$d(x) - c(x) = e(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k x^{i_k}, \quad \nu \leq t$$

On calcule le polynome syndrome :

$$s(x) = \sum_{i=0}^{2t-1} d(a^{i+1})x^i = \sum_{i=0}^{2t-1} e(a^{i+1})x^i$$

on a donc :

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i=0}^{2t-1} \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k (a^{i+1})^{i_k} x^i \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \sum_{i=0}^{2t-1} (a^{i+1})^{i_k} x^i \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a^{i_k} \frac{(a^{i_k}x)^{2t} - 1}{a^{i_k}x - 1} \end{aligned}$$

On pose $l(x)$ le produit des dénominateurs (que l'on appelle polynôme localisateur, car ses racines permettent de trouver la position des symboles à corriger), on a alors

$$l(x)s(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a^{i_k} ((a^{i_k}x)^{2t} - 1) \prod_{j \neq k, j \in [1,\nu]} (a^{i_j}x - 1) \tag{16.1}$$

Modulo $x^{2t}$, $l(x)s(x)$ est donc un polynôme $w$ de degré inférieur ou égal à $\nu - 1$, donc strictement inférieur à $t$. Pour le calculer, on applique l'algorithme de Bézout à $s(x)$ et $x^{2t}$ (dans $F_q$), en s'arrêtant au premier reste $w(x)$ dont le degré est strictement inférieur à $t$ (au lieu d'aller jusqu'au calcul du PGCD de $s(x)$ et $x^{2t}$). Les relations sur les degrés (cf. approximants de Padé et la preuve ci-dessous) donnent alors en coefficient de $s(x)$ le polynôme $l(x)$ de degré inférieur ou égal à $t$. On en calcule les racines (en testant tous les éléments du corps avec Horner), donc la place des symboles erronés.

Pour calculer les valeurs $\alpha_k$, on reprend la définition de $w$, c'est le terme de droite de l'équation (**??**) modulo $x^{2t}$, donc :

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a^{i_k} (-1) \prod_{j \neq k, j \in [1,\nu]} (a^{i_j}x - 1)$$

Donc :

$$w(a^{-i_k}) = -\alpha_k a^{i_k} \prod_{j \neq k, j \in [1,\nu]} (a^{i_j}a^{-i_k} - 1)$$

Comme :

$$l(x) = (a^{i_k}x - 1) \prod_{j \neq k, j \in [1,\nu]} (a^{i_j}x - 1)$$

on a :

$$l'(a^{-i_k}) = a^{i_k} \prod_{j\neq k, j\in[1,\nu]} (a^{i_j}a^{-i_k} - 1)$$

Finalement :

$$\alpha_k = -\frac{w(a^{-i_k})}{l'(a^{-i_k})}$$

### 16.6.2 Preuve du calcul de $l$

On avait $s(x)$ avec $\deg(s) <= 2t-1$, il s'agissait de voir comment la solution $u, v, r$ calculee par Bezout

$$u(x)x^{2t} + v(x)s(x) = r(x) \tag{16.2}$$

avec arrêt prématuré au 1er reste $r(x)$ de degré $<= t-1$ correspondait à l'équation

$$l(x)s(x) = w(x) mod x^{2t}$$

avec $\deg(l) <= t$ et $\deg(w) <= t-1$

On a vu que $\deg(v) <= t$. On commence par factoriser la puissance de $x$ de degré maximal $p$ dans $v(x)$, et on simplifie (**??**) par $x^p$. Quitte à changer $v$ et $r$, on se ramene donc à :

$$u(x)x^{2t-p} + v(x)s(x) = r(x)$$

avec $v(x)$ premier avec $x$, $\deg(v) <= t-p$ et $\deg(r) <= t-1-p$. On simplifie ensuite par le pgcd de $v(x)$ et de $r(x)$ (qui divise $u(x)$ car premier avec $x$ puisqu'on a déjà traité les puissances de $x$). On a donc, quitte à changer de notation $u, v, r$ tels que

$$u(x)x^{2t-p} + v(x)s(x) = r(x)$$

avec $v$ et $r$ premiers entre eux, $v$ premier avec $x$, $\deg(v) <= t-p$ et $\deg(r) <= t-1-p$ (N.B. : $p = 0$ en general)

On observe que $l(x)$ est premier avec $x$ (0 n'est pas racine de $l$). On raisonne modulo $x^{2t-p}$, $l$ et $v$ sont inversibles modulo $x^{2t-p}$, donc

$$s(x) = w(x) * inv(l) \pmod{x^{2t-p}}, \quad s(x) = r(x) * inv(v) \pmod{x^{2t-p}}$$

donc

$$w(x)*inv(l) = r(x)*inv(v) \pmod{x^{2t-p}} \quad \Rightarrow \quad w(x)*v(x) = r(x)*l(x) \pmod{x^{2t-p}}$$

donc $w(x) * v(x) = r(x) * l(x)$ à cause des majorations de degres

D'autre part par construction $w(x)$ est premier avec $l(x)$ (car chacun des facteurs de $l(x)$ divise tous les éléments de la somme définissant $w(x)$ sauf un), donc $l(x)$ divise $v(x)$, et comme $v(x)$ est premier avec $r(x)$, on en déduit que $v(x) = Cl(x)$ où $C$ est une constante non nulle, puis $r(x) = Cw(x)$.

Bezout donne donc (après simplifications du couple $v(x), r(x)$ par son pgcd) le polynome localisateur à une constante près (donc les racines et les positions des erreurs), et on peut calculer les valeurs des erreurs avec $v$ et $r$ car la constante $C$ se simplifie.

### 16.6.3 Avec Xcas

Ouvrir la session `Aide->Exemples->crypto->reed_s`

# Chapitre 17

# Factorisation des entiers et primalité.

Les principaux algorithmes utilisés dans Xcas sont les suivants :

— la division : pour les nombres premiers plus petits que 10000, stockés dans une table. Cela permet de factoriser les entiers plus petits que $10^{10}$ et de détecter les premiers, on teste si $k$ divise $N$ pour $k$ dans la table tel que $k^2 \leq N$. Cela permet la factorisation partielle des entiers plus grands. Le temps d'exécution est proportionnel au nombre de premiers dans la table plus petits que $\sqrt{N}$, multiplié par un facteur $\ln(N)$ pour la factorisation partielle.

— Le **crible** d'Eratosthène permet de trouver la liste des premiers plus petits qu'une valeur donnée $n$. On écrit tous les entiers dans une table, on barre les multiples de 2, puis les multiples du premier entier non barré (qui est premier), puis etc. et on s'arrête lorsque le premier entier non barré au carré est strictement plus grand que $n$. On montre facilement que la complexité de `crible(n)` est celle du nombre de cases que l'on barre dans la boucle `for (j:=p*p;j<=n;j+=p)` elle est majorée par

$$\frac{n}{2}\frac{n}{3} + \frac{n}{5} + ... + \frac{n}{p_n}$$

où $p_n$ est le dernier nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, que l'on peut facilement majorer par $O(n\ln(n))$ puisque la somme des inverses des premiers est inférieure à la somme des inverses jusque $\sqrt{n}$. Une analyse plus fine donne une majoration en $O(n\ln(\ln(n)))$, en pratique l'obstacle principal au crible reste la taille mémoire nécessaire au calcul qui empêche de dépasser des valeurs de $n$ de l'ordre du milliard.

— le test de pseudo-primalité de **Miller-Rabin** (voir le manuel de programmation de Xcas) : effectué pour 20 bases $a$, il donne en cas de réussite la primalité pour les entiers plus petits que $10^{14}$, au-delà le nombre est très probablement premier (moins de $1/4^{20}$ malchance d'avoir un non premier au sens où le nombre de bases $a < p$ qui passent le test alors que le nombre $p$ n'est pas premier est plus petit que $p/4$). Si on veut certifier qu'un nombre est premier, on peut utiliser le test de Pocklington (voir la section dédiée) ou le test APRCL via PARI.

— la méthode $\rho$ de Pollard qui permet de trouver les"petits" facteurs d'un entier $N$ (plus petits que $10^{10}$ environ). Cette méthode est détaillée plus bas. La commande `ifactor` de PARI permet de détecter des "petits" facteurs de plus grande taille par la méthode des courbes elliptiques (ECM, cf. Cohen par exemple). Pollard-$\rho$ et ECM sont des méthodes de factorisation de type I, dont le temps d'exécution est fonction de la taille du plus petit facteur de l'entier à factoriser (supposé non premier).

— le crible quadratique qui permet de factoriser en un temps raisonnable les entiers jusqu'à $10^{70}$ environ. Une esquisse de cette méthode est présentée plus bas. Cette méthode est dite de type II, son temps d'exécution est fonction de la taille de l'entier.

```
crible(n):={
  local tab,prem,p;
  tab:=seq(j,j,0,n);
  prem:=[];
  tab[0]=<0; tab[1]=<0;
  p:=2;
  while (p*p<=n) {
    for (j:=p*p;j<=n;j+=p){
      tab[j]=<0;
    }
    p:=p+1;
    //afficher(tab);
    while ((p*p<=n) and (tab[p]==0)) {
      p:=p+1;
    }
  }
  for (j:=2;j<=n;j++) {
    if (tab[j]!=0) {
      prem:=append(prem,j);
    }
  }
  return(prem);
}:;

   crible(100)
```

$[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97]$

## 17.1 Le test de primalité de Pocklington.

**Théorème 33** *Soit $N > 1$ entier. S'il existe deux entiers $a$ et $q$ tels que*

— *$q$ est un facteur premier de $N - 1$ plus grand que $\sqrt{N} - 1$,*

— *$a^{N-1} = 1 \pmod N$*

— *$a^{(N-1)/q} - 1$ est premier avec $N$*

*alors $N$ est premier.*

Preuve : Si $N$ n'est pas premier, alors il a un facteur premier $p \leq \sqrt{N}$. Donc $q$ et $p-1$ sont premiers entre eux (car $q$ est premier et $q > p-1$). Soit $u$ l'inverse de $q$ modulo $p-1$. Alors $1 = a^{N-1} \pmod p$ car $p$ divise $N$. Donc

$$1 = a^{u(N-1)} \pmod p = (a^{uq})^{(N-1)/q} \pmod p = a^{(N-1)/q} \pmod p$$

d'après le petit théorème de Fermat. Ceci contredit le fait que $a^{(N-1)/q} - 1$ soit premier avec $N$.

Le couple $(a, q)$ est alors un **certificat de primalité** pour $N$. Le problème c'est que trouver $a, q$ peut être très difficile voire impossible. Mais il existe une généralisation de ce théorème qui est plus facile à réaliser

**Théorème 34** *Supposons que l'on sache factoriser $N-1 = AB$ comme produit de deux entiers premiers entre eux avec $A > \sqrt{N}$ dont la factorisation en produit de facteurs premiers est connue. Si pour tout facteur $p$ de $A$ il existe un entier $a_p$ tel que $a_p^{N-1} = 1 \pmod N$ et $a_p^{(N-1)/p} - 1$ et $N$ sont premiers entre eux, alors $N$ est premier.*

Preuve : soit $v$ un facteur premier de $N$. Soit $p$ premier divisant $A$ et $p^e$ la plus grande puissance de $p$ divisant $A$. On va montrer que $v = 1 \pmod{p^e}$. Par le lemme chinois on en déduira $v = 1 \pmod A$ puis $v > \sqrt{N}$ ce qui est impossible pour au moins un facteur premier de $N$.
Montrons donc que $v = 1 \pmod{p^e}$. Soit $b = a_p^{(N-1)/p^e} \pmod v$. Alors $b^{p^e} = 1 \pmod v$ puisque $v$ divise $N$ et $b^{p^{e-1}} = a_p^{(N-1)/p} \pmod v \neq 1 \pmod v$ puisque $a_p^{(N-1)/p} - 1$ et $N$ sont premiers entre eux. Donc l'ordre de $b$ modulo $v$ est $p^e$, et $p^e$ divise $v-1$ CQFD.

Ce test nécessite de savoir factoriser $N-1$, au moins partiellement. Pour des $N$ grands, cela peut nécessiter de certifier que les facteurs obtenus sont eux-même premiers, ce qui peut nécessiter une sorte d'appel récursif du test. C'est l'étape difficile, la recherche des $a_p$ n'est pas un blocage en pratique.

## 17.2 La méthode $\rho$ de Pollard

**Théorème des anniversaires** : la probabilité que $n$ éléments pris au hasard parmi $N$ soient distincts 2 à 2 pour $n = a\sqrt{(N)})$ et $N \to \infty$ est équivalente à $e^{-a^2/2}$, et peut donc être rendue arbitrairement petite.

En effet, cette probabilité vaut

$$P = 1(1 - \frac{1}{N})(1 - \frac{2}{N})...(1 - \frac{n-1}{N})$$

donc

$$-\ln(P) = \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1 - \frac{k}{N})$$

on reconnait une méthode de rectangles pour approcher $\int -\ln(1-t)$, fonction croissante positive sur $\mathbb{R}^+$ d'où l'encadrement

$$\int_0^{n-1} -\ln(1 - \frac{t}{N})\, dt \leq -\ln(P) \leq \int_1^n -\ln(1 - \frac{t}{N})\, dt$$

On intègre par parties, en posant $-1 = (N-t)'$

$$\int -\ln(1-\frac{t}{N})\,dt = (N-t)\ln(1-\frac{t}{N}) + \int dt = (N-t)\ln(1-\frac{t}{N}) + t$$

Si $t/N = o(1)$ la primitive vaut :

$$(N-t)(-\frac{t}{N} - \frac{t^2}{2N^2} + O(\frac{t^3}{N^3}) + t = -\frac{t^2}{2N} + O(\frac{t^3}{N^2})$$

Donc pour $n = a\sqrt{N}$, on a :

$$\frac{a^2}{2} + O(\sqrt{N}^{-1}) \leq -\ln(P) \leq \frac{a^2}{2} + O(\sqrt{N}^{-1})$$

d'où le résultat annoncé.

**Application** : si $n$ est composé, on prend des entiers modulo $n$ générés par une suite récurrente $x_{k+1} = f(x_k) \pmod n$, on espère qu'ils ont de bonne propriétés de répartition, et on regarde s'ils sont distincts modulo $p$ où $p$ est le plus petit facteur de $n$. Il suffira d'en générer $O(\sqrt{p})$ pour avoir une bonne proba d'en trouver deux égaux modulo $p$. Comme on ne connait pas $p$, le test d'égalité modulo $p$ se fait en calculant le pgcd de $n$ et de la différence des 2 entiers modulo $n$, qui doit être non trivial. La fonction $f$ peut par exemple être $x \to x^2+1$ (ou $x^2-1$ ou $x^2+3$)[1]. On ne teste pas toutes les différences de paires d'entiers générés, car ce serait trop long, mais les $x_{2k} - x_k$ pour $k = 1, 2, ...$ ce qui suffit car la suite $x_k$ est ultimement périodique (le dessin d'une suite ultimement périodique est un $\rho$ d'où la méthode tire son nom). Le calcul nécessite donc $O(\sqrt{p} * \ln(n)^2)$ opérations (ce qui est toujours mieux que la division triviale car $p \leq \sqrt{n}$).

## 17.3 Le crible quadratique

On cherche des relations $x^2 = y^2 \pmod N$, en espérant trouver un facteur de $N$ en calculant pgcd$(x-y, N)$. Problème trop difficile, à la place on va essayer de factoriser sur une base de "petits" nombre premiers des $x_i^2 - N$ pour $x$ proche de $\sqrt{N}$ (nombre friable). La taille de la base dépend de la taille de $N$. La recherche de $x^2$ se fait par produit de $x_i$ tel qu'il n'apparaisse que des carrés de la base des petits nombres premiers, ce qui s'obtient en résolvant un gros système linéaire à coefficient dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour trouver les $x_i$ on utilise un crible : sachant que si on a une solution de $x^2 - N = 0 \pmod p$, alors $x+p$, $x+2p$, etc. le seront aussi, on a facilement les $x$ tels que $x^2 - N$ est divisible par $p$ à partir des 2 racines carrées de $N$ modulo $p$ si elles existent (sinon on ne met pas ces racines dans la base de petits premiers !). Le crible consiste à incrémenter de $\log(p)$ tous les éléments d'un tableau dont l'indice correspond à un $x$ tel que $x^2 - N$ est divisible par $p$. Lorsqu'on a parcouru tous les premiers de la base de nombres premiers, on regarde dans le tableau les valeurs assez grandes vont correspondre à des possibilités d'entiers friables, on factorise alors les $x_i^2 - N$ correspondants pour avoir des relations. Dès qu'on a $k$+une marge de sécurité (par exemple 20 ou 50) relations où $k$ est le

1. Il n'existe à ma connaissance pas de résultat sur pourquoi ces choix de $f$ donnent des entiers bien répartis par rapport au hasard

nombre de premiers de la base on est sur qu'on trouvera une vingtaine ou une cinquantaine de relations $x^2 = y^2 \pmod N$. Comme chaque relation a une chance sur 2 de donner un facteur de $N$, on pourra factoriser $N$, sauf malchance vraiment exceptionnelle !

### 17.3.1 Recherche de racine carrée modulo p

Pour trouver les solutions $x$ de $x^2 - N$ divisible par $p$, il faut calculer les racines carrées de $N$ modulo $p$. On procède comme suit :

- si $p = 2$, alors $\sqrt{N} = N$
- si $p + 1 = 0 \pmod 4$, si $N$ est un carré alors $N^{(p-1)/2} = 1 \pmod p$ donc $\pm N^{(p+1)/4} \pmod p$ est la racine cherchée (calcul effectué par l'algorithme de la puissance rapide).
- sinon on cherche le pgcd de $x^2 - N$ avec powmod$(x + r, (p-1)/2, p, x^2 - N)$ où $r$ est aléatoire, il y a une chance sur 2 que le pgcd soit de degré 1.
  Si $p$ est assez petit (disons $p < \sqrt{2^{31}}$), il est plus rapide de tester les carrés mod $p$ de $k = 1, 2, 3, ..., (p-1)/2$. Comme $(k+1)^2 = k^2 + 2 * k + 1 \pmod p$, cela se résume à faire un shift (*2) une addition, un test si $\geq p$ et dans ce cas une soustraction, puis un test d'égalité avec $N$, le tout avec des entiers courts (32 bits) ce qui est très rapide.

# Chapitre 18

# Factorisation des polynômes.

On présente ici quelques algorithmes utilisés pour factoriser un polynôme à coefficients entiers, pour la recherche de racines approchées d'un polynôme, cf. la section **??**. Pour un polynôme en une variable, cele se fait en plusieurs étapes : on commence par se ramener à un polynôme $P$ dont tous les facteurs sont de multiplicité un, ensuite on factorise $P$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (par la méthode de Berlekamp ou Cantor-Zassenhauss), puis on remonte à $\mathbb{Z}/p^kZ$ pour $k$ suffisamment grand (en fonction de la borne de Landau sur les facteurs de $P$), et on recombine enfin les facteurs modulaires pour trouver les facteurs de $P$. Lorsque $P$ à plusieurs variables, on utilise une méthode analogue à celle permettant de trouver le pgcd de polynômes à plusieurs variables.

**Rappel**
Le pgcd des coefficients d'un polynôme est appelé contenu de ce polynôme. Un polynôme est dit primitif si son contenu est égal à 1.

## 18.1 Les facteurs multiples

Étant donné un polynôme $P$ à coefficients entiers, on cherche à écrire :

$$P = \Pi_{k=1}^{n} P_k^k$$

où les $P_k$ n'ont pas de facteurs multiples et sont premiers entre eux deux à deux. Comme on est en caractéristique 0, cela revient à dire que $\text{pgcd}(P_k, P_k') = 1$ et $\text{pgcd}(P_k, P_j) = 1$. Bien entendu on va utiliser la dérivée de $P$ dans l'algorithme de recherche des $P_k$ :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} kP_k' P_k^{k-1} \Pi_{j \neq k} P_j^j$$

Soit $G$ le pgcd de $P$ et de $P'$. On a :

$$G = \Pi_{k=1}^{n} P_k^{k-1},$$

en effet $G$ divise $P$ et $P'$ :

$$W_1 = \frac{P}{G} = \Pi_{k=1}^{n} P_k, \quad Z_1 = \frac{P'}{G} = \sum_{k=1}^{n} kP_k' \Pi_{j \neq k} P_j$$

il s'agit de vérifier que $W_1$ et $Z_1$ sont premiers entre eux. Soit $F$ un facteur irréductible du pgcd de $W_1$ et $Z_1$, alors $F$ divise l'un des $P_k$, appelons $P_l$ ce facteur. Comme $F$ divise $\Pi_{j\neq k}P_j$ si $k \neq l$, on en déduit que $F$ divise le dernier terme de la somme de $Z_1$, c'est-à-dire que $F$ divise $lP_l'\Pi_{j\neq l}P_j$ donc $F$ divise $P_l'$ puisque les $P_k$ sont premiers entre eux. Donc $P_l$ et $P_l'$ ont un facteur en commun, ce qui est contraire aux hypothèses.

On pose alors :

$$Y_1 = Z_1 - W_1' = \sum_{k>1}(k-1)P_k'\Pi_{j\neq k}P_j$$

On définit alors par récurrence des suites de polynômes $W_n$, $Y_n$ et $G_m$ par :

— $G_m = \text{pgcd}(W_m, Y_m)$

— $W_{m+1} = W_m/G_m$ et $Y_{m+1} = Y_m/G_m - W_{m+1}'$

On va montrer que $P_m = G_m$. Commençons au rang $n = 1$, on voit que $P_1$ divise $Y_1$ (puisqu'il est commun à tous les $\Pi_{j\neq k}P_j$ car $k > 1$) et divise $W_1$. Et c'est le seul facteur commun, car tout autre facteur irréductible serait un diviseur d'un $P_l$ pour $l > 1$, donc diviserait $(l-1)P_l'\Pi_{j\neq l, j>1}P_j$, donc diviserait $P_l'$. Le raisonnement en un rang quelconque est identique, les polynômes sont donnés par :

$$G_m = P_m,\ W_m = \Pi_{k>=m}P_k,\ Y_m = \sum_{k>m}(k-m)P_k'\Pi_{j\geq m, j\neq k}P_j$$

Lorsqu'on programme cet algorithme, le test d'arrêt est $G_m = 1$.

**Square-free factorisation (Algorithme de Yun)**

Argument : un polynôme primitif $P$ à coefficients entiers (ou dans $\mathbb{Z}[i]$ ou dans un corps de caractéristique nulle).

Valeur renvoyée : une liste de polynômes $P_m$ telle que $P = \Pi_{k=1}^n P_k^k$.

1. Initialiser la liste résultat à liste vide.
2. Initialiser $W$ à $P$ et $Y$ à $P'$. Calculer le pgcd $G$ de $W$ et $Y$ et simplifier $W$ et $Y$ par leur pgcd puis poser $Y = Y - W'$.
3. Boucle tant que $Y \neq 0$.
4. Calculer le pgcd $G$ de $W$ et $Y$. Ajouter $G$ à la liste résultat.
5. Simplifier $W$ et $Y$ par $G$, puis poser $Y = Y - W'$ et passer à l'itération suivante.

Remarque : lorsqu'on veut factoriser un polynôme à coefficients modulaires, il faut aussi se ramener à un polynôme sans facteurs multiples mais on ne peut pas utiliser cet algorithme tel quel car la caractéristique du corps n'est pas nulle.

**Exemple** :

Factorisation sans facteurs multiples de $P(X) = (X^3-1)(X+2)^2(X^2+3)^3$. En mode interactif avec un logiciel de calcul formel, effectuons l'étape d'initialisation :

```
W:=normal((x^3-1)*(x+2)^2*(x^2+3)^3);
Y:=diff(W,x);
G:=gcd(W,Y);
         x^5+2*x^4+6*x^3+12*x^2+9*x+18
```

```
W:=normal(W/G);
        x^6+2*x^5+3*x^4+5*x^3+-2*x^2+-3*x-6
Y:=normal(Y/G);
Y:=normal(Y-diff(W,x));
        5*x^5+8*x^4+3*x^3+-5*x^2+-8*x-3
```

On vérifie bien que $W = (x+2) * (x^3-1) * (x^2+3)$ est le produit des facteurs $P_i$. On entame maintenant la boucle :

```
G:=gcd(W,Y);
        x^3-1    -> P1
Y:=normal(Y/G);
W:=normal(W/G);
Y:=normal(Y-diff(W,x));
        2*x^2+4*x
G:=gcd(W,Y);
        x+2      -> P2
Y:=normal(Y/G);
W:=normal(W/G);
Y:=normal(Y-diff(W,x));
        0
G:=gcd(W,Y);
        x^2+3    ->  P3
```

puis $W = 1$ et $Y = 0$ et le prochain $G$ vaut 1, on a bien trouvé tous les facteurs $P_i$.

## 18.2 Factorisation en une variable

On suppose maintenant qu'on veut factoriser un polynôme $P$ sans facteur multiple (et primitif). En général on commence par simplifier $P$ par ses facteurs linéaires (détectés avec l'algorithme présenté dans le premier article de cette série). On commence par chercher un nombre premier $p$ tel que $P$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ conserve le même degré et reste sans facteur multiple (donc pgcd$(P, P')$=1 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$), ce qui est toujours possible (il suffit de prendre $p$ plus grand que le plus grand entier apparaissant dans l'algorithme du sous-résultant pour calculer le pgcd de $P$ et $P'$ dans $\mathbb{Z}$).

**Convention**
Tous les polynômes ayant leurs coefficients dans un corps fini sont supposés avoir comme coefficient dominant 1 lorsque le choix existe (par exemple les facteurs d'un polynôme modulo $p$).

### 18.2.1 Factorisation dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$

On suppose qu'on a un polynôme $P$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sans facteur multiple. Il s'agit de factoriser $P$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. Il existe essentiellement deux stratégies, l'une commence par factoriser par groupes de facteurs de même degré puis casse les facteurs et l'autre plus directe à base d'algèbre linéaire modulaire (méthode de Berlekamp). Dans les deux cas, on utilise le fait que si $F$ est un polynôme, alors les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ modulo $F$ forment un anneau

$A$ qui est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de dimension le degré de $F$ (si $F$ est irréductible, alors $A$ est un corps). On s'intéresse alors aux propriétés de l'application $\varphi : x \in A \mapsto x^p$. On observe d'abord que cette application est une application *linéaire*. Cela découle du petit théorème de Fermat pour $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ et de la formule de Newton et de la primalité de $p$ pour $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

**Calcul de $\varphi$**

Pour mettre en oeuvre ces algorithmes, on commence par déterminer la matrice de l'endomorphisme $\varphi : x \mapsto x^p$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X] \pmod{P(X)}$ muni de sa base canonique $\{1, X, ..., X^{\deg(P)-1}\}$.

### 18.2.2 Distinct degree factorization

Cette méthode consiste à détecter les groupes de facteurs ayant un degré donné (distinct degree factorization). Si nécessaire, on utilise ensuite un autre algorithme pour casser ces groupes. On utilise ici les propriétés des itérées de l'application linéaire $\varphi$ sur des espaces vectoriels de corps de base $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On va déterminer le produit $P_k$ de tous les facteurs de $P$ de degré $k$ en calculant le pgcd de $P$ et de $X^{(p^k)} - X$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

Pour $k = 1$, $X^p - X$ est le produit des $X - k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par le petit théorème de Fermat ($k^p = k \pmod p$), donc le pgcd de $P$ et de $X^{(p^1)} - X$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ est le produit des facteurs de $P$ de degré 1.

Pour $k > 1$, le raisonnement se généralise de la manière suivante : on considère un facteur irréductible $F(X)$ de $P$ de degré $k$ et le corps $K = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[Y] \pmod{F(Y)}$. Le corps $K$ est un corps fini, c'est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de dimension $k$, donc $K$ possède $p^k$ éléments et $K^*$ est un groupe multiplicatif à $p^k - 1$ éléments, donc tout élément de $K^*$ vérifie l'équation $x^{p^k-1} = 1$ donc tout élément de $K$ vérifie $x^{(p^k)} = x$. En particulier pour $x = Y \pmod{F(Y)}$ on trouve que $Y^{(p^k)} = Y \pmod{F(Y)}$ donc $F(X)$ divise $X^{(p^k)} - X$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si on se donne un facteur irréductible $F$ qui divise $X^{p^k} - X$, soit $K$ le corps correspondant à $F$, alors le noyau de l'application linéaire

$$x \in K \mapsto x^{p^k} - x \in K$$

est $K$ tout entier, car $Y = Y^{p^k} \pmod F$ entraine $(Y^2)^{(p^k)} = Y^{2p^k} = (Y^{p^k})^2 = Y^2 \pmod F$ et de même pour les autres puissances de $Y$ qui, avec $Y^0 = 1$ également dans le noyau, forment une base de l'espace vectoriel $K$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Donc le nombre d'éléments de $K$ est inférieur ou égal au degré du polynôme $X^{p^k} - X$ (puisque $X^{(p^k)} - X$ est divisible par $X - x$ pour tout $x \in K$), donc le degré de $F$ est inférieur ou égal à $k$. (En fait $f$, le degré de $F$, doit diviser $k$, en effet si $q$ et $r$ sont le quotient et le reste de la division de $k$ par $f$, $X = X^{p^k} \pmod F = X^{p^{qf+r}} \pmod F = X^{p^r} \pmod F$ le polynôme $x^{p^r} - x$ admet alors $p^f$ racines dans le corps ce qui n'est possible que si $r = 0$ car sinon son degré $p^r$ serait trop petit $p^r < p^f$).

Donc $P_k$ est égal au pgcd de $P/\Pi_{j<k}P_j$ avec $X^{p^k} - X$.

**Algorithme distinct degree factorization**

Argument : un polynôme $P$ à coefficients entiers sans facteur multiple et primitif.
Valeur renvoyée : la liste $L$ des produits des facteurs irréductibles et du degré correspondant de $P$ (ordonné par ordre croissant de degré).

On commence par initialiser $L$ à vide et un polynôme auxiliaire $Q$ à $X$ (il contiendra les valeurs de $X^{p^k} - X \pmod P$), on fait une boucle indéfinie sur $k$ commençant à 1 et incrémenté de 1 à chaque itération

- Si $k$ est strictement plus grand que le degré de $P$ divisé par 2, on rajoute le couple ($P$,degre($P$)) à $L$ et on renvoie $L$
- On remplace $Q$ par $Q^p \pmod P$ en utilisant le calcul de $\varphi$ modulo $P$
- On calcule le pgcd $G$ de $Q - X$ et de $P$.
- Si $G$ vaut 1, on passe à l'itération suivante
- On rajoute le couple ($G$,$k$) à la liste $L$ et on remplace $P$ par le quotient de $P$ par $G$.

**Exemple** :
Factorisation en degré distincts de $(X^3 + X + 1)(X^4 - X + 1)$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. On regarde d'abord si $P$ reste sans facteur multiple après réduction modulo 5.

```
P:=normal((x^3+x+1)*(x^4-x+1) mod 5);
gcd(P,diff(P,x));
    1 mod 5  -> ok P est sans facteur multiple
P1:=gcd(P,(x^5-x)mod 5);
    (1 mod 5)*x -2 mod 5  -> P1
P:=normal(P/P1);
P2:=gcd(P,(x^(5^2)-x)mod 5);
    1 mod 5  -> pas de facteur de degre 2
P3:=gcd(P,(x^(5^3)-x)mod 5);
    (x^6+2*x^5+x^2+x+2) mod 5
```

Donc $P$ admet 3 facteurs dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ : un de degré 1 ($x - 2$) et deux de degré 3 (dont le produit est $x^6 + 2x^5 + x^2 + x + 2$).

Le même calcul dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ donne

```
P:=normal((x^3+x+1)*(x^4-x+1) mod 7);
gcd(P,diff(P,x));
    1 mod 7  -> ok P est sans facteur multiple
P1:=gcd(P,(x^7-x)mod 7);
    1 mod 7
P2:=gcd(P,(x^(7^2)-x)mod 7);
    1 mod 7
P3:=gcd(P,(x^(7^3)-x)mod 7);
    (x^3+x+1) mod 7
```

donc $P$ possède un facteur de degré 3 modulo 7, donc le facteur restant de degré 4 est forcément irréductible.

On remarque sur cet exemple que 7 est plus intéressant que 5, car la factorisation modulo 7 donne moins de facteurs (à recombiner pour trouver la factorisation dans $\mathbb{Z}$) et la factorisation est complète modulo 7 alors que modulo 5 il faut casser le facteur de degré 6 en deux facteurs de degré 3. La plupart des algorithmes de factorisation effectuent la factorisation en degré distinct modulo plusieurs entiers (ce qui peut de plus être parallélisé) et choisissent le meilleur.

### 18.2.3 La méthode de Cantor-Zassenhaus

Cet algorithme sert à casser des groupes de facteurs de même degré, c'est une méthode probabiliste. On suppose donc qu'on a un produit $P$ d'au moins deux facteurs irréductibles de degré $d$ à casser. Soit $D$ l'un des polynômes irréductibles de degré $d$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et soit $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[Y] \pmod{D(Y)}$, on a :

$$X^{p^d} - X = \Pi_{\alpha \in K}(X - \alpha)$$

puisque le corps $K$ possède $p^d$ éléments tous racines de l'équation $X^{p^d} = X$.

On considère un polynôme $T$ non constant, et le polynôme $T^{p^d} - T$. En remplaçant $X$ par $T$ ci-dessus, on en déduit :

$$T^{p^d} - T = \Pi_{\alpha \in K}(T - \alpha)$$

Donc pour tout élément $\beta \in K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[Y] \pmod{D(Y)}$, on a

$$(T^{p^d} - T)(\beta) = \Pi_{\alpha \in K}(T(\beta) - \alpha) = 0$$

Donc $T^{p^d} - T$ est divisible par $X^{p^d} - X$ (puisque toutes les racines du second sont racines du premier), donc est divisible par tout polynôme irréductible de degré inférieur ou égal à $d$ à coefficients dans $Z/p\mathbb{Z}$. Comme

$$T^{p^d} - T = T(T^{\frac{p^d-1}{2}} - 1)(T^{\frac{p^d-1}{2}} + 1) \tag{18.1}$$

et que ces trois facteurs sont premiers entre eux, on en déduit que tout polynôme irréductible de degré inférieur ou égal à $d$ à coefficients dans $Z/p\mathbb{Z}$ divise l'un des trois facteurs ci-dessus. Pour casser $P$, l'idée consiste alors à calculer le pgcd de $P$ et $T^{\frac{p^d-1}{2}} - 1$ pour un polynôme pris au hasard. On sait que $P$ divise le produit des 3 termes de (**??**), et on espère que les facteurs irréductibles de $P$ ne diviseront pas tous le même terme.

On va montrer que si $T$ est un polynôme de degré $\leq 2d-1$ choisi au hasard, la probabilité que deux facteurs irréductibles de $P$ ne divisent pas $T^{p^d} - T$ est proche de 0.5. Soient donc $A$ et $B$ deux facteurs irréductibles de $P$ de degré $d$. D'après l'identité de Bézout, tout polynôme $T$ de degré $\leq 2d-1$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$T = AU + BV \tag{18.2}$$

avec degre($U \leq d-1$) et degre($V \leq d-1$) et réciproquement une combinaison linéaire de cette forme est un polynôme de degré $\leq 2d-1$. Choisir $T$ au hasard revient donc à choisir un couple $(U, V)$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ au hasard et de manière indépendante. D'autre part, $A$ et $B$ étant de degré $d$, on sait que dans $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[Y] \pmod{D(Y)}$ ces polynômes admettent $d$ racines. Soit donc $\alpha$ [respectivement $\beta$] une racine de $A$ [resp. $B$] dans $K$. Alors $A$ divise $T^{\frac{p^d-1}{2}} - 1$ si et seulement si $T(\alpha)^{\frac{p^d-1}{2}} = 1$ (et de même pour $B$ et $\beta$) car $T^{\frac{p^d-1}{2}} - 1$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (et non dans $K$). En appliquant (**??**), $A$ divise $T^{\frac{p^d-1}{2}} - 1$ si et seulement si :

$$B(\alpha)^{\frac{p^d-1}{2}} V(\alpha)^{\frac{p^d-1}{2}} = 1$$

Le premier terme de cette égalité est une constante égale à 1 ou -1, le second a une probabilité proche de 0.5 (égale à $\frac{p^d-1}{2p^d}$) de valoir 1 ou -1 car, comme $A$ est irréductible, $V(\alpha)$ décrit $K$ lorsque $V$ décrit les polynômes de degré $\leq d-1$. De même, $B$ a une probabilité proche de 0.5 de diviser $T^{\frac{p^d-1}{2}}-1$, et ces 2 probabilités sont indépendantes puisque $U$ et $V$ le sont, donc la probabilité que soit $A$ soit $B$ divise divise $T^{\frac{p^d-1}{2}}-1$ est proche de 0.5.

**Algorithme de Cantor-Zassenhaus**
Argument : Un polynôme $P$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de degré $k$ dont tous les facteurs irréductibles sont de degré $d$.
Valeur renvoyée : la liste des facteurs irréductibles de $P$.

- Si $k=d$ renvoyer une liste contenant $P$.
- Déterminer un polynôme $T$ aléatoire de degré inférieur ou égal à $2d-1$ et de coefficient dominant 1. Calculer le pgcd $D$ de $P$ et de $T^{(p^d-1)/2}-1$. Si le degré de $T$ est égal à 0 ou à $k$ recommencer cette étape.
- Appeler récursivement cet algorithme avec $T$ et $P/T$ et renvoyer la liste réunion des deux listes renvoyées.

**Exemple** :
Cassons le polynôme de degré 6 obtenu dans l'exemple précédent (modulo 5). Donc $P := (x^6+2*x^5+x^2+x+2) \pmod 5$ et $d=3, 2d-1=5, (p^d-1)/2=62$. On choisit au hasard un polynôme de degré inférieur ou égal à 5, par exemple $T=x^4-x^3+x+1$, puis on calcule $T^{62}$ modulo $P$ ce qui donne $(x^5+x^3+x^2+1) \pmod 5$ puis le pgcd de $T^{62}-1$ et de $P$ qui vaut $x^3+x+1 \pmod 5$, on a donc cassé $P$ en deux. En prenant $T := x^4-x^3+x+2$, on trouve $T^{62}=1 \pmod P$, donc ce $T$ n'aurait pas permis de casser $P$.

### 18.2.4 La méthode de Berlekamp

Cette méthode permet de factoriser un polynôme sans facteurs multiples, elle peut aussi servir à casser des groupes de facteurs de même degré. Ici on travaille dans l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ modulo le polynôme $P$ et on s'intéresse au noyau de $\varphi - Id$ (où $\varphi : x \mapsto x^p$). On suppose que $P=\Pi_{j=1}^n F_j$ où les $F_j$ sont irréductibles et premiers entre eux. On va montrer que le noyau de $\varphi - Id$ est composé des polynômes $Q$ tels que $Q \pmod{F_j}$ est constant (dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) pour tout $j$.

Si $Q \pmod{F_j} = s_j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors $Q^p \pmod{F_j} = s_j^p = s_j$, donc par le théorème des restes chinois, $Q = Q^p \pmod P$.

Réciproquement, si $Q^p - Q = 0 \pmod P$, en utilisant la factorisation :

$$X^p - X = \Pi_{j\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(X-j)$$

on en tire $P$ divise $Q^p-Q=\Pi_{j\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(Q(X)-j)$, donc $F_j$ divise l'un des facteurs et $Q(X) \pmod{F_j} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Le noyau de $\varphi - Id$ est donc un espace vectoriel de dimension $n$, le nombre de facteurs irréductibles de $P$ et possède donc $p^n$ éléments (en effet pour tout $n$ uplet de $s_j$, on peut construire un polynôme $Q$ du noyau par le théorème des restes chinois en posant $Q \pmod{F_j} = s_j$).

L'intérêt du noyau de $\varphi - Id$ est qu'on peut le calculer sans connaitre les $F_j$. Une fois ce calcul fait, voyons comment on peut remonter aux $F_j$. On connait

déjà la dimension du noyau donc le nombre de facteurs irréductibles. De plus, on remarque que le polynome constant 1 est un élément du noyau qu'on appellera $T_1$, on note alors $T_2, ..., T_n$ les autres polynômes unitaires d'une base du noyau. Ensuite, on calcule le pgcd de $P$ avec $T_2 - jT_1$ pour $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On sait que $T_2 = s_{2,k} \pmod{F_k}$, donc pgcd$(P, T_2 - jT_1)$ est égal au produit des facteurs $F_k$ tels que $s_{2,k} = jT_1$. L'un au moins des pgcd calculés est non trivial car sinon $T_2 = T_1 \pmod{F_j}$ pour tout $j$ donc $T_2 = T_1$. Si on a de la chance tous les $s_{2,j}$ seront distincts et les pgcd non triviaux de $P$ avec $T_2 - jT_1$ donneront les $F_k$. Sinon il faudra continuer avec $T_3 - jT_1$ etc.

**Exemple** :
Revenons sur la factorisation de $P := (x^6+2x^5+x^2+x+2) \pmod 5$. Commençons par calculer la matrice de $\varphi$ dans la base $\{1, x, x^2, ..., x^5\}$. On a évidemment $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(x) = x^5$, puis $\varphi(x^2) = x^{10} = x^5 + x^4 - 2x^3 + x \pmod P$, puis en multipliant par $x^5$ et en divisant par $P$, $\varphi(x^3) = -x^4 + 2x^3$, de la même manière on obtient $\varphi(x^4) = -x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2$ et $\varphi(x^5) = x^3 + x^2 - x$. La matrice de $\varphi$ est donc :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite le noyau de $\varphi - Id$ (comme matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$), on obtient une base du noyau en prenant par exemple les vecteurs $(-1, 0, 0, 0, 0, 0)$ et $(0, 0, -1, -1, 0, -1)$. Donc le polynôme $P$ possède 2 facteurs dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$. Pour déterminer les facteurs, on calcule le pgcd de $P$ avec le polynôme $T_2 - s$ où $T_2 = -x^5 - x^3 - x^2$ correspond au 2ème vecteur de la base du noyau. On obtient pour $s = 0$ un pcgd non trivial $(x^3+x+1)$, ce qui permet de calculer les 2 facteurs. Si on avait essayé d'autres valeurs de $s$, pour $s = 1$ on obtient comme pgcd 1, pour $s = 2$ on trouve le 2ème facteur $x^3 + 2x^2 - x + 2$.

### 18.2.5 Remontée (Hensel)

Il s'agit de passer d'une factorisation de $P$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ à une factorisation de $P$ dans $\mathbb{Z}/p^k Z[X]$, la méthode est analogue à celle de l'algorithme EZGCD de calcul de pgcd de polynômes.

On suppose donc que

$$P = \Pi_{j=1}^n P_j \pmod p$$

où les $P_j$ sont premiers entre eux deux à deux dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il s'agit de trouver des polynômes $P_{j,k} = P_j \pmod p$ tels que

$$P = \Pi_{j=1}^n P_{j,k} \pmod{p^k}$$

Commençons par le cas $k = 2$. On pose

$$P_{j,2} = P_j + pQ_j = P_j \pmod p$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P &= \Pi_{j=1}^{n} P_{j,2} \pmod{p^2} = \Pi_{j=1}^{n}(P_j + pQ_j) \pmod{p^2} \\ &= \Pi_{j=1}^{n} P_j + p\sum_{j=1}^{n} Q_j \Pi_{k\neq j} P_k \pmod{p^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j \Pi_{k\neq j} P_k = \frac{P - \Pi_{j=1}^{n} P_j}{p} \pmod{p}$$

On est ramené à résoudre une identité de Bézout généralisée. On montrera dans l'appendice le :

**Théorème 35** *(Identité de Bézout généralisée) Soit $P_1$, ..., $P_n$ ($n \geq 2$) des polynômes premiers entre eux deux à deux modulo $p$. Alors pour tout polynôme $Q$, il existe des polynômes $Q_1$, ..., $Q_n$ tels que :*

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j \Pi_{k\neq j} P_k = Q \pmod{p}$$

On a donc réussi à remonter l'égalité $P = \Pi P_j \pmod{p}$ à $P = \Pi P_{j,2} \pmod{p^2}$. Le passage de $P = \Pi P_{j,l} \pmod{p^l}$ à $P = \Pi P_{j,l+1} \pmod{p^{l+1}}$ est identique, on a :

$$P_{j,l+1} = P_{j,l} + p^l Q_j$$

où les $Q_j$ sont les solutions de l'identité de Bézout généralisée avec :

$$Q = \frac{P - \Pi_{j=1}^{n} P_{j,l}}{p^l}$$

Lorsqu'on programme cet algorithme (cf. l'appendice), on calcule une fois pour toutes les solutions de l'identité de Bézout pour $Q = 1$, et on multiplie par $Q$.

**Algorithme de remontée de Hensel linéaire**

Arguments : Un polynôme $P$ à coefficients entiers, la liste $L = \{P_j\}$ de ses facteurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$

Valeur renvoyée : la liste des facteurs de $P$ dans $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}[X]$

On calcule la borne de Landau-Mignotte [1] pour les facteurs de $P$, on multiplie par le coefficient dominant de $P$ et on calcule $l$ tel que $p^l$ est strictement plus grand que deux fois cette quantité. On calcule aussi les polynômes $Q_j$ de l'identité de Bézout généralisée pour $Q = 1$

Puis on fait une boucle pour $k$ variant de 2 à $l$ :

- On détermine $P - \Pi_j P_j \pmod{p^k}$, on divise par $p^{k-1}$ et on place le résultat dans $Q$
- On multiplie les polynômes $Q_j$ de l'identité de Bézout généralisée (correspondants au polynôme 1) par $Q$ et on détermine le reste de la division euclidienne de $QQ_j$ par $P_j$, on multiplie par $p^{k-1}$ et on ajoute le résultat à $P_j$.

1. Rappelons qu'il s'agit d'une majoration sur la valeur absolue des coefficients des facteurs de $P$

Il existe une version quadratique de cette méthode. On passe alors de $P = \Pi P_{j,l} \pmod{p^l}$ à $P = \Pi P_{j,2l} \pmod{p^{2l}}$. Pour cela, il faut trouver les polynômes $Q_j$ solutions de l'équation :

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j \Pi_{k \neq j} P_{k,l} = Q \pmod{p^l}$$

Pour $l = 1$, c'est l'identité de Bézout généralisée, mais ce n'est plus le cas pour $l > 1$. En fait, on résout cette égalité en remontant l'identité de Bézout quadratiquement, plus précisément pour trouver les $S_j$ solutions de

$$\sum_{j=1}^{n} S_j \Pi_{k \neq j} P_{k,2l} = Q \pmod{p^{2l}}$$

on pose $S_j = Q_j + p^l R_j$, il s'agit donc de trouver les $R_j$ solutions de

$$\sum_{j=1}^{n} (Q_j + p^l R_j) \Pi_{k \neq j} P_{k,2l} = Q \pmod{p^{2l}}$$

soit :

$$\sum_{j=1}^{n} R_j \Pi_{k \neq j} P_{k,l} = \frac{Q - \sum_{j=1}^{n} Q_j \Pi_{k \neq j} P_{k,l}}{p^l} \pmod{p^l}$$

on en déduit les $R_j$.

**Algorithme de remontée de Hensel quadratique**

Arguments et valeur renvoyée identiques à l'algorithme de remontée de Hensel linéaire ci-dessus.

On commence comme dans le cas linéaire par calculer les coefficients de l'identité de Bézout généralisée pour $Q = 1$ et la valeur de $l$ telle que $p^{2^l}$ soit supérieur à deux fois la borne de Landau des facteurs de $P$ fois le coefficient dominant de $P$.

On fait une boucle sur $k$ variant de 1 à $l$ :

- On calcule $P - \Pi_j P_j \pmod{p^{2^k}}$, on divise par $p^{2^{k-1}}$ et on place le résultat dans $Q$
- On multiplie par $Q$ les polynômes $Q_j$ de l'identité de Bézout généralisée (avec comme second membre le polynôme 1), on calcule le reste euclidien du résultat par $P_j$ (modulo $p^{2^{k-1}}$), on multiplie par $p^{2^{k-1}}$ et on ajoute à $P_j$ (avec les notations précédentes, on passe ainsi des $P_{j,2^{k-1}}$ aux $P_{j,2^k}$)
- Si $k = l$ on renvoie la liste des $P_j$
- On calcule $1 - \sum_j Q_j \Pi_{k \neq j} P_k \pmod{p^{2^k}}$, on divise par $p^{2^{k-1}}$ et on place le résultat dans $Q$
- On multiplie par $Q$ les polynômes $Q_j$ de l'identité de Bézout, généralisée et on calcule le reste euclidien du résultat par $P_j$ (modulo $p^{2^{k-1}}$), on multiplie par $p^{2^{k-1}}$ et on ajoute à $Q_j$ (ce qui ajuste les polynômes $Q_j$ qui vérifient maintenant l'identité de Bézout modulo $p^{2^k}$)

**Remarque**

Pendant l'étape de remontée de Hensel, une optimisation classique consiste à tester la divisibilité dans $\mathbb{Z}$ du polynôme $P$ par le facteur lifté $P_j$ ([2]) lorsqu'il n'a

2. Plus exactement, on multiplie $P_j$ par le coefficient dominant de $P$ modulo $p^l$

pas subi de modification pendant 2 étapes successives (autrement dit lorsque $P_j \pmod{p^l} = P_j \pmod{p^{l+1}}$ (ou $\pmod{p^{2l}}$ pour le lift quadratique). Si la division est exacte, on obtient un facteur irréductible de $P$ dans $\mathbb{Z}$. On recalcule alors la borne de Landau de $P/P_j$ pour diminuer le nombre d'itérations à effectuer dans cette étape.

**Exemple** :
Reprenons le polynôme $P(X) = (X^3 + X + 1)(X^4 - X + 1)$ et supposons qu'on ait choisi de le factoriser modulo 5 puis de remonter. On a 3 facteurs $a = x - 2$, $b = x^3 + x + 1$ et $c = x^3 + 2x^2 - x + 2$. Si on développe $P$, on trouve 6 coefficients non nuls de valeur absolue 1, on peut calculer la borne de Landau-Mignotte correspondante sur les coefficients d'un facteur entier : $2^5(\sqrt{(}6) + 1)$ soit un peu plus de 110, il suffit donc d'effectuer 3 étapes de remontée linéaire ($5^4 = 625 > 111/2$). On commence par trouver 3 polynômes $A$, $B$, $C$ tels que

$$\begin{aligned} A(x^3 + x + 1)(x^3 + 2x^2 - x + 2) + B(x - 2)(x^3 + 2x^2 - x + 2) + \\ +C(x - 2)(x^3 + x + 1) \quad = \quad 1 \pmod 5 \end{aligned}$$

On commence par résoudre $D(x^3 + 2x^2 - x + 2) + C(x - 2)(x^3 + x + 1) = 1 \pmod 5$, on trouve $C = 2x^2 - 2$ et $D = -2x^3 - 2x^2 + 2x + 1$. Puis on calcule $A$ et $B$ en résolvant $E(x^3 + x + 1) + F(x - 2) = 1$ qui donne $E = 1$ et $F = -x^2 - 2x$ qu'on multiplie par $D$, donc $A = D$ et $B = 2x^5 + x^4 + 2x^3 - 2x$. Ce qui donne l'identité de Bézout généralisée.

Passons aux calculs de remontée. On a $abc = x^7 - 4x^5 + 5x^4 + -9x^3 - x^2 - 4$ et $P = x^7 + x^5 + x^3 - x^2 + 1$, donc $Q = (P - abc)/5 = x^5 - x^4 + 2x^3 + 1$. On pose alors

$$\begin{aligned} a_1 &= a + 5\,(QA \pmod a) \pmod{25}, \\ b_1 &= b + 5\,(QB \pmod b) \pmod{25}, \\ c_1 &= c + 5\,(QC \pmod c) \pmod{25} \end{aligned}$$

donc :

$$a_1 = a + 5 \times (-2), \quad b_1 = b + 5 \times 0, \quad c_1 = c + 5 \times (2x^2 - x)$$

En principe, on continue encore 2 itérations de la même manière. La 2ème itération donne :

$$Q = (P - a_1 b_1 c_1)/25 = 6x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 25\,(QA \pmod a) \pmod{125}, \\ b_2 &= b_1 + 25\,(QB \pmod b) \pmod{125}, \\ c_2 &= c_1 + 25\,(QC \pmod c) \pmod{125} \end{aligned}$$

donc :

$a_2 = a_1 + 25(-1) = x - 37$, $b_2 = b_1 = b$, $c_2 = c_1 + 25(x^2 + 1) = x^3 + 37x^2 - 6x + 27$

On peut aussi observer que $b_1 = b$, ceci laisse à penser que $b$ est un facteur de $P$ dans $\mathbb{Z}$ ce qu'on vérifie en effectuant la division euclidienne de $P$ par $b = x^3 + x + 1$. Comme elle tombe juste, on est ramené à factoriser $x^4 - x + 1$ et donc à remonter la factorisation de $ac$. La borne de Landau diminue à $8(\sqrt{3} + 1)$ puisque le degré est 4 et la norme euclidienne du polynôme est $\sqrt{3}$. Il suffit alors de remonter dans $\mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{Z}/625\mathbb{Z}$ (on gagne ainsi une itération).

### 18.2.6 Combinaison de facteurs

Lorsqu'on a les facteurs de $P$ dans $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}[X]$ avec $p^k$ plus grand que le produit du coefficient dominant de $P$ multiplié par la borne de Landau-Mignotte sur les coefficients de $P$, on commence par tester la divisibilité dans $\mathbb{Z}[X]$ de $P$ par chaque facteur trouvé multiplié par le coefficient dominant de $P$. Si la division est exacte, on a un facteur irréductible, mais si elle n'est pas exacte il peut se produire qu'un facteur irréductible de $P$ dans $\mathbb{Z}[X]$ soit un produit de deux, voir plusieurs, facteurs modulaires. Il faut donc tester la divisibilité de $P$ dans $\mathbb{Z}[X]$ par toutes les combinaisons possibles de produits de facteurs modulaires (toujours multiplié par le coefficient dominant de $P$). Cette étape peut être exponentiellement longue si le nombre de facteurs modulaires est grand et si par exemple $P$ est irréductible, bien que les cas soient très rares.

**Algorithme de recombinaison**

Arguments : un polynôme à coefficients entiers, primitif et sans facteur multiple $P$ de coefficient dominant $p_n$, la liste $L$ des facteurs de $P$ dans $\mathbb{Z}/p^lZ[X]$ pour $l$ assez grand et $p^l$

Valeur de retour : la liste $F$ des facteurs de $P$ dans $\mathbb{Z}$.

Initialiser $F$ à vide, initialiser le nombre de facteurs à combine $c$ à 1, entamer une boucle infinie :

— Si $c$ est strictement supérieur au cardinal de $L$ divisé par 2, ajouter le quotient de $P$ par le produit des facteurs de $F$ à $F$ et retourner $F$

— Initialiser un vecteur $v = (v_1, ..., v_c)$ à $c$ composantes à la valeur $(1, ..., c)$

— Boucle indéfinie intérieure :

1. Faire le produit des facteurs de $F$ d'indice $v$, multiplier par $p_n$ dans $\mathbb{Z}/p^lZ$, écrire le facteur en représentation symétrique, le rendre primitif et tester si c'est un facteur de $P$ dans $\mathbb{Z}$.
2. Si on a trouvé un facteur, le rajouter à la liste $F$ et supprimer les indices de $v$ de la liste $L$, terminer cette boucle intérieure.
3. Sinon, incrémenter $v$ de la manière suivante :
   On fait une boucle sur un index $m$ initialisé à la taille de $v$, diminuant de 1 à chaque itération : on ajoute 1 à l'élement de $v$ d'indice $m$, si l'élément obtenu est inférieur ou égal au cardinal de $L + m - n$, on arrête cette boucle, sinon on passe à l'itération suivante. Si $m = 0$ à la fin de la boucle, $v$ ne peut pas être incrémenté.
4. Si $v$ ne peut être incrémenté, on incrémente $c$ et on termine la boucle intérieure.
5. Sinon on fait une boucle à nouveau sur $m$ en partant de la valeur actuelle incrémentée de 1, et tant que $m \leq n$ on pose $v_m = v_{m-1} + 1$. Puis on passe à l'itération suivante de la boucle intérieure.

Il existe différentes méthodes qui améliorent la complexité de cette étape :

— La recherche des degré possibles de facteurs fondée sur la factorisation en degrés distincts pour différents nombres premiers permet d'éviter des tests de division si une combinaison de facteurs est d'un degré exclu par la factorisation pour d'autres nombres premiers.

— Le test de divisibilité du coefficient dominant ou du coefficient constant permet aussi d'éviter des divisions complètes de polynômes.

Mais ces astuces n'évitent pas l'énumération de toutes les combinaisons possibles de facteurs et donc la complexité exponentielle. Lorsque les combinaisons d'un petit nombre de facteurs (par exemple 3) échouent, les systèmes récents utilisent l'algorithme **knapsack** de Van Hoeij basé sur l'algorithme LLL (recherche de base d'un réseau ayant des vecteurs de petite norme) qui permet d'eliminer complètement cette complexité exponentielle.

**Exemple** :
Toujours le même exemple, il nous restait deux facteurs dans $\mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$, le facteur $x^3+x+1$ ayant été détecté comme un facteur de $P = x^7+x^5+x^3-x^2+1$ dans $\mathbb{Z}$. On teste chacun des facteurs $a_2 = x-37$ et $c_2 = x^3+37x^2-6*x+27$ séparément, sans succès. On les multiplie alors modulo 125, ce qui donne $x^4-x+1$ en représentation symétrique qui est bien un facteur de $P$ (donc un facteur irréductible).

## 18.3 Factorisation à plusieurs variables

Comme pour le PGCD en plusieurs variables, on se ramène d'abord en une variable, en général on évalue toutes les variables sauf celle correspondant au degré partiel le plus faible. On factorise ensuite en une variable puis on remonte. A chaque étape de remontée, il peut être à nouveau nécessaire de combiner plusieurs facteurs. Différentes stratégies existent, comme pour le PGCD : factorisarion heuristique (avec reconstruction $z$-adique), remontée variable par variable ou toutes les variables en même temps comme dans EZGCD. On va présenter ici plus en détails l'algorithme de factorisation heuristique.

Soit $P$ un polynôme en $X_1, ..., X_n$ à coefficients entiers avec $n > 1$, on choisit une des variables par exemple $X_n$, qu'on notera $X$ dans la suite. On considère $P$ comme un polynôme en $X_1, ..., X_{n-1}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$. On suppose que $P$ est primitif (quitte à extraire son contenu qui est dans $\mathbb{Z}[X]$). On calcule ensuite $P(z)$ pour un entier $z$ tel que[3] $|z| \geq 2|P|+2$. On factorise $P(z)$ dans $\mathbb{Z}[X_1, ..., X_{n-1}]$ :

$$P(z)(X_1, ..., X_{n-1}) = c(z)\Pi_{j=1}^{k} p_j(X_1, ..., X_{n-1}) \tag{18.3}$$

où $c$ est le contenu du polynôme $P(z)$ (comme polynôme en $n-1$ variables à coefficients entiers). Il s'agit de reconstruire les facteurs de $P$ à partir des $p_j$ et de $c$. Deux problèmes se posent alors, celui de la recombinaison possible de plusieurs facteurs $p_j$ pour obtenir un facteur irréductible de $P$, et l'existence d'un facteur entier du contenu $c$ à combiner avec un ou plusieurs $p_j$ pour obtenir ce facteur irréductible. Plus précisément, si $P_k$ est un facteur irréductible de $P$, on a :

$$P_k(z) = d(z)\Pi_{\text{certains } j} p_j, \quad \text{où } d(z) \text{ divise } c(z) \tag{18.4}$$

On a le :

**Théorème 36** *Soit $P(X_1, ..., X_{n-1}, X)$ un polynôme à coefficients entiers ayant au moins 2 variables. On suppose que $P$ est primitif vu comme polynôme en les variables $X_1, ..., X_{n-1}$ à coefficients dans $Z[X]$. Il existe une majoration $C$ du contenu $|c(z)|$ de $P$ évalué en $X = z$ (plus précisément on peut trouver un entier*

3. Ici $|P|$ désigne le plus grand coefficient de $P$ en valeur absolue

*$C$ tel que $c(z)$ divise $C$).*
*Il existe un nombre fini de $z$ tels que l'un des facteurs irréductibles $P_k$ de $P$ évalué en $X = z$ soit réductible (c'est-à-dire tels que (**??**) admette plusieurs facteurs $p_j$ distincts)*

**Preuve**
Pour déterminer $C$, on remarque que les facteurs du contenu de $P(z)$ sont des facteurs communs des coefficients de $P$ évalués en $z$ vu comme polynôme en $X_1, ..., X_{n-1}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$. Donc $c(z)$ divise le générateur de l'idéal engendré par ces coefficients (ce générateur est un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ qui est constant car on a supposé $P$ primitif), on peut aussi dire que deux au moins des coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$ de $P$ sont premiers entre eux, alors $c(z)$ divise le coefficient de l'identité de Bézout de ces 2 coefficients vu comme polynômes en $X$.

Considérons maintenant un facteur irréductible $P_k$ de $P$ de degré $d$ par rapport à $X$. Pour $X_1, ..., X_{n-1}$ fixés, on factorise $P_k$ sur $\mathbb{C}$ :

$$P_k(X) = p_k \Pi_{j=1}^{d}(X - z_j)$$

On va maintenant se restreindre à un domaine des $X_1, ..., X_{n-1}$ sur lequel les $z_j$ ont une dépendance analytique par rapport à $X_1, ..., X_{n-1}$. Pour cela on veut appliquer le théorème des fonctions implicites pour déterminer $z_j$ au voisinage d'une solution donnée. On calcule donc la dérivée $P'_k$ de $P_k$ par rapport à $X$. On sait que $P$ n'a pas de facteurs multiples, donc $P_k$ et $P'_k$ sont premiers entre eux, donc d'après l'identité de Bézout, il existe un polynôme non nul $D$ dépendant de $X_1, ..., X_{n-1}$ et deux polynômes $U$ et $V$ dépendant de $X_1, ..., X_{n-1}, X$ tels que :

$$UP_k + VP'_k = D$$

Si $D(X_1, ..., X_{n-1})$ ne s'annule pas, on va pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites. On se fixe $x_1, .., x_{n-1}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ les racines $z_j$ du polynôme $P(x_1, .., x_{n-1}, X)$ pour une solution $z_j$ telle que $P(x_1, .., x_{n-1}, z_j) = 0$, comme $D$ est non nul, on a $P'(x_1, ..., x_{n-1}, z_j) \neq 0$, donc on peut écrire au voisinage de $(x_1, .., x_{n-1})$

$$z_j = z_j(X_1, ..., X_{n-1}), \quad P(X_1, ..., X_{n-1}, z_j) = 0$$

avec des fonctions $z_j$ analytiques. Si $D$ est constant, $D$ ne s'annule pas, sinon quitte à permuter les variables, on peut supposer que le degré de $D$ par rapport à $X_1$ est non nul. On peut alors se restreindre à une zone $X_1 >> X_2 >> .. >> X_{n-1} >> 1$ où $D$ sera non nul ce qui permet de suivre analytiquement les $z_j$.

Supposons maintenant qu'il existe un nombre infini de $z$ tels $P_k(z)$ soit réductible. Alors il existe un ensemble infini $Z$ de ces valeurs de $z$ pour lesquels l'un des facteurs à coefficients entiers $f_j$ de $P_k(z)$ correspond à un même sous-ensemble $R$ des racines $z_j$ de $P_k$ et à un même contenu $c$ (puisqu'il y a un nombre fini de combinaisons possibles des racines en facteur et un nombre fini de diviseurs possibles du contenu de $P_k$). Pour $z \in Z$, on a :

$$f_j(X_1, ..., X_n, z) = c\Pi_{l \in R}(z - z_j), \quad f_j \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_{n-1}]$$

Soit $L(X)$ le polynôme obtenu par interpolation de Lagrange en cardinal$(R) + 1$ points $z$ de $Z$, égal à $f_j$ en $X = z$. Pour des raisons de degré, on a :

$$L = c\Pi_{l \in R}(X - z_j)$$

donc $L$ est un facteur de $P$. De plus $L$ est un polynôme en $X_1, ..., X_{n-1}, X$ à coefficients rationnels (par construction). Ceci vient en contradiction avec l'hypothèse $P_k$ irréductible, car on a construit un facteur de $P_k$ à coefficients rationnels $L$ de degré strictement inférieur.

**Corollaire**

Pour $z$ assez grand, la reconstruction $z$-adique de $c(z)p_j(z)$ est un polynôme dont la partie primitive est un facteur irréductible de $P$.

**Preuve du corollaire**

On prend $z$ assez grand pour que tous les facteurs irréductibles de $P$ évalués en $z$ aient un seul facteur polynomial (i.e. soient de la forme $d(z)p_j(z)$). Quitte à augmenter $z$, on peut supposer que $|z| > 2CL$ où $C$ est la majoration de $|c(z)|$ et $L$ est la borne de Landau sur les facteurs de $P$. Alors la reconstruction $z$-adique de $c(z)p_j(z)$ est $c(z)/d(z)P_j$, donc sa partie primitive est un facteur irréductible de $P$.

**Algorithme de factorisation heuristique à plusieurs variables**

Argument : un polynôme $P$ primitif en au moins 2 variables.
Valeur renvoyée : les facteurs irréductibles de $P$
Choisir la variable $X$ par rapport à laquelle $P$ est de plus bas degré puis factoriser le contenu de $P$ vu comme polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$. Initialiser un entier $z$ à $2|P| + 2$ (où $|P|$ est le plus grand coefficient entier de $P$ en valeur absolue) et une liste $L$ à la factorisation de du contenu de $P$.
Boucle indéfinie :

- Si $P = 1$ renvoyer la liste $L$ des facteurs de $P$.
- Tant que pgcd$(P(z), P'(z)) = 0$ incrémenter $z$ de 1.
- Factoriser $P(z) = c(z)\Pi p_j$
- Pour tous les facteurs $p_j$, déterminer le polynôme $P_j$ tel que $c(z)p_j = P_j(z)$ par remontée $z$-adique (avec les coefficients de $P_j$ écrit en représentation symétrique, de valeur absolue plus petite que $|z|/2$). Tester si la partie primitive de $P_j$ divise $P$. Si oui, rajouter un facteur irréductible à la liste $L$, et diviser $P$ par ce facteur.
- Augmenter $z$, par exemple remplacer $z$ par la partie entière de $\sqrt{2}z$.

## 18.4 Preuve de l'identité de Bézout généralisée

Elle se fait par récurrence. Pour $n = 2$, c'est l'identité de Bézout usuelle. Pour passer du rang $n-1$ au rang $n$, on isole $P_n$ dans l'identité à résoudre :

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} Q_j(\Pi_{1\leq k\leq n-1, k\neq j} P_k)\right) P_n + Q_n \Pi_{k\leq n-1} P_k = Q \pmod p$$

Comme $P_n$ est premier avec $\Pi_{k\leq n-1}P_k$, en appliquant Bézout, on trouve deux polynômes $Q_n$ et $R_n$ tels que :

$$R_n P_n + Q_n \Pi_{k\leq n-1} P_k = Q \pmod p \tag{18.5}$$

Il reste à résoudre

$$\sum_{j=1}^{n-1} Q_j \Pi_{1\leq k\leq n-1, k\neq j} P_k = R_n \pmod p$$

ce que l'on peut faire par hypothèse de récurrence.

## 18.5 Algorithme de Bézout généralisé

Arguments : une liste $P_1, ..., P_n$ de polynômes premiers entre eux 2 à 2 et un polynôme $Q$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
Valeur renvoyée : la liste de polynômes $Q_1, ..., Q_n$ tels que

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j \Pi_{k \neq j} P_k = Q \pmod{p}$$

On peut commencer par calculer le produit de tous les $P_k$ puis faire une boucle sur $j$ pour calculer les produits des $P_k$ pour $k \neq j$ en divisant le produit complet par $P_j$ (on fait ainsi $n-1$ multiplications et $n$ divisions au lieu de $n(n-1)$ multiplications). Boucle indéfinie sur $n$ décrémenté de 1 par itération :

- Si $n = 2$, on rajoute à la liste résultat les polynômes $Q_1$ et $Q_2$ de l'algorithme de Bézout usuel et on renvoie la liste
- Sinon, on calcule les polynômes $R_n$ et $Q_n$ vérifiant (**??**), on rajoute $Q_n$ en début de liste, on remplace $Q$ par $R_n$.

Remarquons que lorsque nous utiliserons cet algorithme, $Q$ sera la différence entre deux polynômes de même degré (le degré de $P$) et de même coefficient dominant 1, on peut donc remplacer les $Q_i$ par le reste euclidien de $Q_i$ par $P_i$ sans changer l'égalité.

## 18.6 Factorisation rationnelle et sur une extension

Pour factoriser des polynômes ayant des coefficients dans des extensions algébriques, il existe un algorithme assez simple, l'algorithme de Trager, qui n'est pas forcément le plus performant (la recherche est encore active dans ce domaine), cf. le livre de Henri Cohen pp. 142-144. Cet algorithme est utilisé lorsqu'on met l'extension algébrique en deuxième argument de `factor` dans Xcas. Pour trouver l'extension algébrique qui permet de factoriser, on peut dans les cas simples essayer `solve`. Si le polynôme $P$ à factoriser est irréductible sur $\mathbb{Q}$, on peut essayer `factor(P,rootof(P))`. Mais en général cela ne permettra d'extraire qu'un seul facteur de degré 1. Pour obtenir une décomposition complète si $P$ est de petit degré, on peut essayer de construire une extension en formant une expression non symétrique à partir des racines approchées, puis en appliquant toutes les permutations de racines à cette expression et en construisant le polynôme ayant ces racines, si on a suffisamment de précision sur les racines, on peut arrondir le polynôme obtenu, le factoriser sur $\mathbb{Q}$, et prendre un des facteurs irréductibles de degré suffisant comme argument de `rootof`.

Par exemple soit à factoriser $P = x^4 + 3x + 1$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On entre la fonction suivante :

```
f(P):={
  local k,l,p,r,j;
  l:=proot(P);
  if (dim(l)!=4) return "erreur";
```

```
  k:=max(abs(l));
  k:=floor(24*log10(1+4*k))+4; // 4 chiffres de precision en plus
  l:=proot(P,k);
  p:=[0,1,2,3];
  r:=[];
  for j from 0 to 23 do
    k:=l[p[0]]-l[p[1]]+2*l[p[2]];
    r:=append(r,k);
    p:=nextperm(p);
  od;
  retourne r;
}:;
```

puis `q:=pcoef(f(x^4+3x+1))`, on voit que les coefficients sont presque entiers, on fait donc `factor(x^4+3x+1,rootof(round(q)))` qui décompose $x^4+3x+1$ en 4 facteurs de degré 1. Le polynôme obtenu est de degré 24 (cas générique), si $P$ est de degré $n$, on s'attend à un degré $n!$, au-delà de $n=5$, cette méthode est trop couteuse ! Attention aussi, même pour $n=4$, il peut être nécessaire de calculer les racines en multi-précision, par exemple ci-dessus les éléments de `r` sont majorés par $4R$ où $R$ est un majorant du module des racines de $P$, donc les coefficients de `q` sont majorés par exemple par $(1+4R)^{24} \approx 2e20$ donc on prend 24 chiffres.

Autre méthode utilisant la représentation rationnelle univariée (section **??**) : on écrit le système vérifié par les relations racines-coefficients, ici
`P:=x^4+3x+1;eq:=lcoeff(P)*pcoef([a,b,c,d])-symb2poly(P)`
on vérifie qu'on obtient les 24 permutations de racines par
`cfsolve(eq,[a,b,c,d])`
Le polynôme permettant de factoriser complètement $P$ se lit dans
`G:=gbasis(eq,[a,b,c,d],rur);`
on obtient la factorisation complète par :
`factor(x^4+3x+1,rootof(G[2]))`
On peut aussi la déduire de l'expressions des racines
`Q:=product(x-rootof(G[k],G[2])/rootof(G[3],G[2]),`
`  k,4,size(G)-1);normal(Q)`
Pour un polynome quelconque, on peut utiliser le script suivant

```
extension(p):={
local l,s,g;
 l:=seq(expr("x"+j),j,1,degree(p));
 s:=lcoeff(p)*pcoeff(l)-symb2poly(p);
 g:=gbasis(s,l,rur);
 return g[2];
}
```

mais les calculs deviennent très vite monstrueux !

Pour les polynômes à plusieurs variables, Giac commence par donner la valeur 0 à toutes les variables sauf celle correspondant à la variable de degré partiel minimum. Si le polynôme obtenu est square-free, alors Giac reconstruit par remontée

de Hensel les facteurs, en augmentant au fur et à mesure le degré des facteurs par rapport aux autres variables. En cas d'échec, l'algorithme de Trager est utilisé, ce qui est en général beaucoup plus lent (à commencer par le calcul de la "norme" du polynôme à factoriser par un résultant).

## 18.7 Factorisation absolue

On peut aussi se demander pour un polynôme à coefficients rationnels (square-free) quelle extension permet la factorisation la plus complète. Par exemple $x^2+y^2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[x,y]$ mais pas sur $\mathbb{Q}[i][x,y]$ ou $x^4+y^4$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[x,y]$ mais pas sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}][x,y]$. Ceci amène à la notion de *factorisation absolue* d'un polynôme. Une méthode simple (mais pas forcément très efficace) pour déterminer une telle extension algébrique consiste à évaluer toutes les variables sauf une "au hasard" jusqu'à obtenir un polynôme irréductible $M$. On factorise alors sur le corps correspondant à $M$. Mais cela peut être très long, par exemple pour

$$P(x,y) = y^{10} - 2x^2y^4 + 4x^6y^2 - 2x^{10}$$

on a $P(x,1)$ irréductible, on obtient donc la factorisation absolue par les commande

```
p(x,y):=y^10-2x^2*y^4+4x^6*y^2-2x^10;
p1:=p(1,y); factor(p1); (vérification)
factor(p(x,y),rootof(p1));
```

mais c'est beaucoup plus long que de faire `factor(p1,sqrt(2))`.

Pour un polynôme à 2 variables (on peut toujours s'y ramener) de degrés partiels $m,n$ en $x,y$, on remarque que le degré $q \geq 2$ de l'extension nécessaire est égal au nombre de facteurs (chaque facteur étant conjugué d'un facteur donné par échange des racines), qui sont donc tous de même bi-degré $m/q, n/q$, en particulier $q$ divise le PGCD de $m$ et $n$ qui doit être non trivial. Ainsi par exemple pour

$$P(X,Y) = Y^4 + 2Y^2 * X + 14Y^2 - 7 * X^2 + 6X + 47$$

$m = 2$ donc $q$ ne peut être égal qu'à 2, en faisant $Y = 0$ on obtient que la seule extension possible est $\sqrt{2}$.

Voir aussi la session `afactor.xws` du menu Exemple, poly de Xcas.

## 18.8 Compléments

Pour factoriser sur des corps finis, on peut consulter la thèse de Bernardin disponible sur le web (`http://www.bernardin.lu`).

L'algorithme récursif qui suit permet d'écrire un **polynôme symétrique** en $n$ variables (noté `s` dans le programme) en fonction des polynômes symétriques élémentaires. L'idée est de remplacer la dernière variable $x_n$ par 0, le polynôme obtenu $Q$ est symétrique en les autres variables, on appelle récursivement la procédure (avec une variable de moins), elle renvoie un polynôme $V$. On crée dans `S` les polynômes symétriques élémentaires avec la fonction `pcoeff`, on les utilise pour substituer dans $V$ par les polynômes symétriques élémentaires sauf le dernier, ce qui donne $V_s$ symétrisé de $V$ par rapport aux $n$ variables, puis on retranche $V_s$ de

$P$. Par construction on doit obtenir un polynôme divisible par le produit des $x_i$> : en effet $P - Q$ est divisible par $x_n$ donc $P - V_s$ aussi donc par symétrie il est divisible par le produit des $x_i$. C'est le polynôme $q$ ci-dessous, auquel on applique récursivement l'algorithme (le degré a été dimuné de $n$).

```
restart;
sym(P,X):={ // P polynome symetrique, X liste des variables
  local k,s,xs,Q,V,W,S,q,r;
  s:=size(X);
  si s<=1 alors return P; fsi;
  xs:=X[s-1];
  si !contains(lname(P),xs) alors return P; fsi; // polynome constant
  Q:=normal(subst(P,xs=0)); // Q est symetrique en X[0..s-2]
  V:=sym(Q,X[0..s-2]); // appel recursif
  S:=pcoeff(X[0..s-1]); // polynomes symetriques en les X
  pour k de 0 jusque size(S)-1 faire S[k]:=(-1)^k*S[k]; fpour;
  q,r:=quorem((P-subst(V,X[0..s-2],S[1..s-1])),S[s],xs); // reste nul
  si r!=0 alors throw("non symetrique"); fsi;
  W:=sym(q,X);
  retourne V+W*xs;
}:;
```

Par exemple

```
p:=sym(x^3+y^3+z^3,[x,y,z])
```

$$x^3 - 3xy + 3z$$

exprime $x^3 + y^3 + z^3$ en fonction de $x + y + z, xy + xz + yz, xyz$, on vérifie

```
normal(subst(p,[x,y,z],[x+y+z,x*y+x*z+y*z,x*y*z]))
```

$$x^3 + y^3 + z^3$$

## 18.9 Exercices (factorisation des polynômes)

1. Soit le polynôme $P(x) = x^5+x^4-5x^3-5x^2+6x+6$. On veut déterminer des intervalles d'isolation des racines réelles positives de $P$.
   (a) Implémenter la règle de Descartes sur $]0, +\infty[$ (nombre de racines $\leq$ au nombre de changements de signe des coefficients).
   (b) Pour faire de même sur $]0, 1[$, on fait d'abord le changement de variables $x \to 1/x$ ($\tilde{P}(x) = x^5 P(1/x)$) qui permet de se ramener à des racines dans $]1, +\infty[$ puis $x \to x + 1$ ($\tilde{P}(x) = P(x + 1)$) sur $]0, +\infty[$.
   (c) Déterminer une majoration $M$ des racines de $P$ en module.
   (d) Déterminer le polynôme $Q$ tel que $Q(x) = P(Mx)$. Les racines positives de $P$ correspondent à des racines de $Q$ dans $]0, 1[$ pour lesquelles on peut appliquer la règle de Descartes adaptée.
   (e) S'il y a 2 changements de signe ou plus de $Q$ sur $]0, 1[$, rechercher les racines de $Q$ dans $]0, 1/2[$ en se ramenant aux racines de $R$ dans $]0, 1[$ avec $R(x) = Q(x/2)$ puis les racines de $Q$ dans $]1/2, 1[$ en posant $S(x) = Q((x + 1)/2)$.
   (f) Discuter la complexité des changements de variables qui apparaissent dans cette méthode, en particulier en utilisant une représentation des polynômes par une liste de coefficients.
2. Déterminer le nombre de racines de $-x^7 + x^4 + 12x - 5$ comprises entre 0 et 6 (en utilisant les suites de Sturm, on donnera les détails des calculs). Déterminer le nombre de racines réelles de ce polynôme en utilisant une majoration du module des racines.
3. Écrire un programme calculant la suite de Sturm d'un polynôme supposé squarefree (on peut tester avec `sqrfree`), en utilisant l'algorithme d'Euclide, on renverra $P$, $P'$ et la liste des quotients. Écrire un programme calculant le nombre de changements de signe de la suite de Sturm en un réel (indication : utiliser l'algorithme de Horner pour évaluer, et `remove` pour éliminer les 0 d'une liste)
4. Prendre un polynôme de degré 100 à coefficients aléatoires (`randpoly`), le factoriser numériquement (`proot`) puis donner pour les premières racines approchées renvoyées des intervalles ou disques où on peut certifier qu'il existe une racine.
5. Soit $P(x) = x^5 + 3x + 1$. Déterminer des valeurs approchées des racines complexes de $P$. En déduire des boules dans le plan complexe contenant exactement une racine de $P$ et de rayon plus petit que `1e-12`. En utilisant la méthode de Newton avec du calcul exact, déterminer des valeurs approchées certifiées à `1e-40` près des racines complexes de $P$.
6. Localiser les parties réelles et imaginaires des racines complexes de $P(z) = z^5+3z+1$ en utilisant les suites de Sturm et le résultant de la partie réelle et imaginaire de $P(x + iy)$. Comparer cette méthode avec celle de l'exercice précédent (en particulier que se passe-t-il pour un polynôme de degré $n$).
7. Calculer avec un logiciel les valeurs numériques des racines complexes de $P(x) = x^5 + x + 1$. Trouver les combinaisons de racines dont la somme

est entière (aux arrondis près). En déduire la factorisation en facteurs irréductibles sur $\mathbb{Z}$ de $P$.

8. Factorisation numérique sur $\mathbb{C}$. Écrire un programme qui calcule une racine d'un polynôme à coefficients complexes en utilisant une méthode itérative de type méthode de Newton (avec éventuellement un préfacteur lorsqu'on débute la recherche). Les polynômes seront représentés par la liste de leurs coefficients et l'évaluation faite par la méthode de Horner. Trouver ensuite toutes les racines du polynôme en éliminant la racine trouvée (toujours avec Horner). Trouver les combinaisons de racines correspondant à un facteur à coefficients entiers.

9. Soit $p$ un entier premier et $P$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On a la relation

$$\gcd(X^{p^k} - X, P) = \prod_{f|P, \deg(f)|k} f, \quad f \text{ irréductible}$$

En utilisant cette relation, déterminer les degrés des facteurs de

$$(x^3 + x + 1)(x^4 + x + 1)$$

modulo 5 et 7 (sans utiliser la commande factor). Peut-on en déduire que $x^3 + x + 1$ et $x^4 + x + 1$ sont irréductibles sur $\mathbb{Z}$ ?

10. Utiliser les options "verbose" de votre logiciel de calcul formel pour factoriser $x^{202} + x^{101} + 1$ et vérifiez que vous avez compris la méthode utilisée.

11. Trouver les facteurs de degré 1 s'ils existent de $3x^5 + 25x^4 + 67x^3 + 77x^2 + 55x + 13$ en remontant ses racines dans $\mathbb{Z}/pZ[X]$ pour $p$ premier bien choisi.

12. Factoriser le polynôme $x^5 + x + 1$ par la méthode de Berlekamp.

13. Montrer que $2x + x^2y + x^3 + 2x^4 + y^3 + x^5$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ sans utiliser l'instruction factor à 2 variables (on pourra factoriser pour quelques valeurs de $x$ ou de $y$)

14. Que se passe-t-il lorsqu'on exécute l'algorithme de Yun dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ?

15. Recherche des facteurs de degré 2 d'un polynôme à coefficients réels sans racines réelles en utilisant la méthode de Bairstow décrite ci-dessous.
On cherche un facteur $F = x^2 + sx + p$ de $P$, on calcule le quotient et le reste de la division $P = FQ + R$ par une méthode de type Horner, il s'agit de rendre $R$ (vu comme un vecteur à 2 composantes) nul. On calcule donc $\partial_{s,p}R$ (en cherchant le quotient et le reste de $xQ$ et $Q$ par $F$, pourquoi ?) et on pose :

$$(s,p)_{n+1} = (s,p)_n - \lambda(\partial_{s,p}R)^{-1}R(s,p)_n$$

où $\lambda$ est un préfacteur compris entre 0 et 1 et ajusté à 1 lorsqu'on est proche du facteur.

# Chapitre 19

# Intégration formelle.

## 19.1 Introduction

Que peut-on espérer d'un système de calcul formel lorsqu'il s'agit de calculer une primitive ? Tout d'abord, on peut espérer qu'il sache résoudre ce que l'on donne en exercice à nos étudiants ! Ceci suppose donc de connaitre quelques méthodes classiques, par exemple : intégration de polynômes ( !), polynômes multipliés par exponentielle ou/et fonctions trigonométriques, de polynômes trigonométriques par linéarisation, de fractions rationnelles, de fractions trigonométriques, de fractions de racines carrées de polynômes du second ordre, de fonctions s'y ramenant par une ou plusieurs intégrations par parties ou par changement de fonction (par exemple reconnaissance de formes $F(u)u'$ ) ou par changement de variables, etc.

Mais au-delà de ces méthodes (qui ont l'avantage de la rapidité mais tiennent parfois plus de la recette de cuisine que de l'algorithme...), on peut se demander si la primitive d'une fonction donnée peut ou non s'exprimer en terme des fonctions "élémentaires". Par exemple, tout le monde "sait" que la fonction $e^{x^2}$ n'admet pas de primitive "simple", encore faut-il donner un sens mathématique précis à cette affirmation. Ceci nécessite de donner une définition rigoureuse du terme fonction élémentaire. On peut alors appliquer un algorithme développé par Risch (pour les extensions dites transcendantes, obtenue par ajout des fonctions exponentielle et logarithme) qui permet de répondre à la question : il s'agit vu de très loin d'une extension de l'algorithme d'intégration des fractions rationnelles.

Cet article se décompose en deux parties principales :

— la section **??** présente les définitions de fonctions élémentaires, de tour de variables, et donne deux théorèmes, le théorème de structure de Risch qui permet d'écrire une fonction contenant des exponentielles et des logarithmes comme une fonction élémentaire par rapport à une tour de variable, et le théorème de Liouville qui donne la forme que peut prendre une primitive d'une fonction élémentaire lorsqu'elle est aussi élémentaire.

— la section **??** décrit l'algorithme d'intégration de Risch permettant de décider si une fonction élémentaire donnée possède ou non une primitive élémentaire et de la calculer dans le premier cas. Nous ne présentons ici l'algorithme de Risch que pour les extensions transcendantes pures (ln et exp).

Le lecteur intéressé par le cas des extensions algébriques pourra consulter la thèse

de Trager. Pour les extensions plus générales (incluant en particulier les fonctions tangente, arctangente), la référence est le livre de Bronstein donnée en section **??**.

## 19.2 Fonctions élémentaires

### 19.2.1 Extensions transcendantes, tour de variables

On se donne une expression $f(x)$ dépendant de la variable $x$ que l'on souhaite intégrer par rapport à $x$. L'algorithme de Risch s'applique à cette expression si on peut l'écrire comme une fraction rationnelle à plusieurs variables algébriquement indépendantes

$$x, f_1(x), f_2(x, f_1(x)), ..., f_n(x, f_1(x), f_2(x, f_1(x)), ..., f_{n-1}(x, f_1(x), ..., f_{n-2}(x)))$$

où les $f_i$ sont soit l'exponentielle soit le logarithme d'une fraction rationnelle (le corps de base appelé aussi corps de constantes ici est soit $\mathbb{C}$, soit une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ ou une extension algébrique d'un corps de fractions rationnelles s'il y a des paramètres). On appelle tour de variables la suite des $x, f_1, ..., f_n$ (chaque étage est donc une exponentielle d'une fraction rationnelle ou le logarithme d'une fraction rationnelle dépendant des étages précédents) et on dira que $f$ est une fonction élémentaire par rapport à cette tour de variables.

L'intérêt de l'écriture d'une expression sous forme de tour est qu'elle est stable par dérivation : si on dérive par rapport à $x$ une fonction élémentaire dépendant d'une tour de variables, on obtient encore une fonction élémentaire dépendant de la même tour de variables. Autrement dit, l'ensemble des fonctions élémentaires pour une tour fixée est un corps différentiel.

**Exemples :**

— $e^{x^2}$ est bien dans ce cas, pour $n = 1$, $f_1$ est l'exponentielle de $x^2$ qui est algébriquement indépendant de $x$. Les fonctions $(2x^2 - 1)e^{x^2}$ ou $x/(e^{x^2} - 1)$ sont aussi élémentaires par rapport à la tour de variables $\{x, e^{x^2}\}$.

— $x \ln(x) \exp(x)$ est élémentaire par rapport à la tour $\{x, \ln(x), \exp(x)\}$, mais aussi par rapport à la tour $\{x, \exp(x), \ln(x)\}$.

— $xe^{x \ln(x)}$ est élémentaire, en prenant $n = 2$, $f_1 = \ln(x)$ et $f_2 = e^{xf_1}$.

— $x^n = e^{n \ln(x)}$, où $n$ est un paramètre, convient avec comme tour $\{x, \ln(x), e^{n \ln(x)}$

— $e^{\ln(x)}$ ne convient pas car il n'est pas algébriquement indépendant de $x, \ln(x)$ mais on peut le réécrire sous une forme acceptable puisque $e^{\ln(x)} = x$.

— $e^{\ln(x)/2}$ ne convient pas non plus car son carré est égal à $x$. Une réécriture ne suffit pas, cet exemple est bien sûr une extension algébrique et non transcendante.

Dans la suite, on va s'intéresser aux tours de variables dans lesquelles on a effectué des simplifications évidentes. On élimine les $\ln \circ \exp$ de la manière suivante : si $f_k = \ln(g_k)$, on regarde si $g_k$ vu comme fraction en $f_1, ..., f_{k-1}$ possède un facteur $f_j^m$ (avec $m \in \mathbb{Z}$) lorsque $f_j = \exp(g_j)$ est une exponentielle. Si c'est le cas, on a $f_k = mg_j + \ln(g_k/g_j^m)$. On change alors de tour en remplaçant $f_k$ par $\tilde{f_k} = \ln(g_k/g_j^m) = f_k - mg_j$. On élimine aussi les $\exp \circ \ln$, si $f_k = \exp(g_k)$, pour $j < k$ si $f_j$ est un logarithme, on regarde si $c_j = \partial_{f_j} g_k|_{f_j=0}$ est un entier, si c'est le cas on remplace $f_k$ par $\tilde{f_k} = f_k/g_k^{c_j}$.

**Exemples :**

$$\begin{aligned} \ln(\frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}}) &\rightarrow -x^2 + \ln(e^{x^2}+1) \\ e^{3\ln(x)+\ln(x)^2+5} &\rightarrow x^3 e^{\ln(x)^2+5} \end{aligned}$$

### 19.2.2 Théorème de structure de Risch

On voit donc qu'il est nécessaire de disposer d'un algorithme pour décider si des exponentielles et logarithmes sont algébriquement indépendants. Cet algorithme est basé sur un théorème de structure dû à Risch :

**Théorème 37** *Soit $f = \ln(g(x))$ le logarithme d'une fonction élémentaire $g$ par rapport à une tour de variables $T$, alors soit $f$ est algébriquement indépendant des variables de $T$, soit $f$ est élémentaire et plus précisément combinaison linéaire rationnelle des logarithmes et des arguments des exponentielles de la tour $T$.*

*Soit $f = \exp(g)$ l'exponentielle d'une fonction élémentaire $g$ par rapport à une tour de variables $T$, alors soit $f$ est algébriquement indépendante des variables de $T$, soit il existe $n$ tel que $f^n$ soit élémentaire par rapport à $T$ (on peut alors appliquer le cas précédent à $ng = \ln(f^n)$)*

**Démonstration** :
Commençons par le cas de l'exponentielle. On considère le polynôme minimal de $f = \exp(g)$ :

$$a_n f^n + ... + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0, a_0 \neq 0$$

où les $a_i$ sont des fractions rationnelles en $T$. On dérive et on applique $f' = g'f$ :

$$(a'_n + n a_n g')f^n + ... + (a'_k + k a_k g')f^k + ... = 0$$

c'est un multiple du polynôme minimal donc il existe une fraction rationnelle $C$ (par rapport à la tour de variables) telle que :

$$\forall k, \quad (a'_k + k a_k g') = C a_k$$

Comme $a_n \neq 0$, cela entraine $a'_n/a_n + ng' = C$. Le coefficient constant $a_0$ est aussi non nul, donc $a'_0/a_0 = C$ et

$$ng' = a'_0/a_0 - a'_n/a_n \Rightarrow ng = \ln(\frac{a_0}{a_n}) + k$$

où $k$ est constant, donc $f^n = \exp(ng) = e^k a_0/a_n$ est élémentaire.

Passons au cas du logarithme, supposons que $f = \ln(g)$ dépende algébriquement de la tour $T$, on va commencer par montrer que $f$ est élémentaire. On écrit :

$$a_n f^n + ... + a_0 = 0$$

où les $a_i$ sont des fractions rationnelles en $T$. On dérive en appliquant $f' = g'/g$ :

$$a'_n f^n + (n a_n f' + a'_{n-1})f^{n-1} ... + a_1 f' + a'_0$$

Comme $f'$ est une fraction rationnelle en $T$, le polynôme $a'_nX^n + (na_nf' + a'_{n-1})X^{n-1} + ... + a_1f' + a'_0$ qui annule $f$ doit être un multiple du polynôme minimal de $f$, il existe donc une fraction rationnelle $C$ par rapport à $T$ telle que :

$$a'_n = Ca_n \quad (na_nf' + a'_{n-1}) = Ca_{n-1} \quad ...$$

On en déduit $f'$ :

$$f' = \frac{\frac{a'_n}{a_n}a_{n-1} - a'_{n-1}}{na_n} = \left(\frac{-a_{n-1}}{na_n}\right)'$$

donc il existe une constante $c$ telle que :

$$f = \frac{-a_{n-1}}{na_n} + c$$

donc $f$ est élémentaire par rapport à la même tour $T$ que $g$.

Montrons maintenant qu'un logarithme $f = \ln(g)$ qui est élémentaire par rapport à une tour de variable $T$ est combinaison linéaire à coefficients rationnelles des logarithmes et des arguments des exponentielles de $T$ [1]. Soit $X$ la dernière variable de la tour $T$. On factorise maintenant le numérateur et le dénominateur de $g$ en $\prod_j P_j^j$ où les $P_j$ sont sans facteurs multiples et premiers entre eux 2 à 2 (par rapport à $X$), il existe $C$ indépendant de $X$ tel que :

$$g = C\prod_{j\in\mathbb{Z}} P_j^j \Rightarrow \ln(g) = \ln(C) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} j\ln(P_j) \tag{19.1}$$

Alors $f' = \ln(C)' + \sum_j jP'_j/P_j$ donc $\prod P_jf'$ est un polynôme en $X$. Soit $N/D$ la fraction irréductible représentant $f$, on a :

$$f' = \frac{N'D - ND'}{D^2}$$

on vient donc de montrer que :

$$\left(\prod_j P_j\right)\frac{N'D - ND'}{D^2} \text{ est un polynôme en } X \tag{19.2}$$

Soit $P$ un facteur irréductible de $D$ de multiplicité $k$ tel que $D = P^kQ$ (donc $P$ premier avec $Q$, mais $P$ est aussi premier avec $N$ car $f = N/D$ est irréductible). Alors en simplifiant numérateur et dénominateur par $P^{k-1}$, on a :

$$\left(\prod_j P_j\right)\frac{N'PQ - N(kP'Q + PQ')}{P^{k+1}Q^2} \text{ est un polynôme en } X. \tag{19.3}$$

On en déduit, après simplification d'au plus un facteur $P$ au dénominateur avec l'un des $P_j$, que $P^k$ divise $N'PQ - N(kP'Q + PQ')$ donc $P$ divise $P'$. Ceci n'est possible que si $P = 1$ (et donc le dénominateur de $f$ est égal à 1) ou si la variable $X$ est une exponentielle et $P = X$.

1. cette preuve peut être sautée en première lecture

Montrons que ce deuxième cas est en fait exclus : en effet si $P = X = \exp(Y)$ est une exponentielle, on a alors $D = X^k$ et $Q = 1$. Comme $P' = Y'X$, (**??**) devient :

$$\left(\prod_j P_j\right) \frac{X(N' - kNY')}{X^{k+1}} \text{ est un polynôme en } X$$

Comme $X$ ne divise pas $N$, $N$ possède donc un coefficient constant $a_0$ non nul. Le coefficient constant de $N' - kNY'$ est $a_0' - ka_0Y'$. Si ce terme était nul alors $a_0' = ka_0Y'$ donc $a_0 = c\exp(kY) = cX^k$ or $a_0$ ne dépend pas de $X$ donc $c = 0$ donc $a_0 = 0$, absurde. Donc $X$ ne divise pas $N' - kNY'$. Comme $X^{k+1}$ divise $\prod P_j X(N' - kNY')$, on en déduit que $X^k$ divise un des $P_j$. Donc $k = 1$ et $P_j = XQ_j$. Revenons maintenant à (**??**), on a :

$$f = \ln(g) = \ln(C) + j\ln(XQ_j) + \sum_{l\neq j} l\ln(P_l)$$

on dérive :

$$f' = \ln(C)' + jY' + j\frac{Q_j'}{Q_j} + \sum_{l\neq j} l\frac{P_l'}{P_l}$$

on voit qu'il n'est plus nécessaire de multiplier $f'$ par $P_j$ pour avoir un polynôme, multiplier par $Q_j$ suffit, plus précisément

$$\left(\prod_{l\neq j} P_l\right) Q_j \frac{N'D - ND'}{D^2} \text{ est un polynôme en } X.$$

donc $X^{k+1}$ divise $\left(\prod_{l\neq j} P_l\right) Q_j X(N' - kNY')$ ce qui est impossible.

Donc $D = 1$ dans tous les cas et on a $f = N$. Donc

$$f' = N' = \ln(C)' + \sum_j jP_j'/P_j \text{ est un polynôme par rapport à } X$$

On en déduit que les $P_j$ ne dépendent pas de $X$ sauf si $X$ est une exponentielle et $P_j = X$. Dans les deux cas $N'$ ne dépend pas de $X$ donc le polynôme $N$ est de degré 0 ou 1 en $X$ (si $X$ est une exponentielle, $N$ est forcément de degré 0)

- Si $X = \exp(Y)$ est une exponentielle (avec $Y$ élémentaire ne dépendant pas de $X$), alors $f = N$ est indépendant de $X$. On retire $jY$ à $f$ et on divise $g$ par $X^j$ (en posant $j = 0$ si aucun des $P_j$ n'est égal à $X$), qui devient indépendant de $X$, on conserve ainsi l'égalité $f = \ln(g)$ mais avec une variable de moins dans la tour de variables par rapport à laquelle $f$ et $g$ sont élémentaires.
- Si $X$ n'est pas une exponentielle, $N = cX + d$ avec $c$ dans le corps de constantes, et $d$ indépendant de $X$. Si $X = x$, on a $g = \exp(cx + d)$ qui n'est rationnel que si $c = 0$. On a alors $d$ donc $f$ et $g$ constants. Si $X = \ln(Y)$ est un logarithme (avec $Y$ élémentaire ne dépendant pas de $X$), alors $\forall j, P_j = 1$ donc $g$ est élémentaire indépendante de $X$. On a alors :

$$f = N = c\ln(Y) + d = \ln(g)$$

avec $c$ dans le corps des constantes, $d$ et $g$ élémentaires indépendants de $X$. On cherche maintenant la fonction élémentaire $d$. Cette fonction n'est pas le logarithme d'une fonction élémentaire en général car $c$ n'est pas forcément entier, mais $d'$ a les mêmes propriétés que la dérivée du logarithme d'une fonction élémentaire. On peut donc reprendre le même raisonnement mais avec une variable de moins dans la tour de variables. Si la tour qu'on a choisie est normalisée, alors $Y$ ne contient au numérateur et au dénominateur aucune puissance d'une exponentielle d'une variable de la tour donc le polynôme $P_j$ du cas précédent ne peut provenir de $Y$ ce qui entraine que $j$ est bien entier dans le cas précédent (bien que $c$ ne le soit pas forcément).

Après avoir fait une récurrence sur le nombre de variables de la tour, on a donc $f$ qui s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients entiers des arguments $g_k$ des variables exponentielles $f_k = \exp(g_k)$ de la tour et à coefficients a priori quelconque des variables logarithmes $f_l = \ln(g_l)$ de la tour :

$$f = \sum_k j_k g_k + \sum_l x_l \ln(g_l) = \ln(g)$$

Comme $g$ est élémentaire, $h = g/\prod_k \exp(g_k)^{j_k}$ est élémentaire de logarithme $\sum_l x_l \ln(g_l)$. Montrons que si les arguments des $\ln$ sont des polynômes sans facteurs multiples, alors les $x_l$ sont entiers. Rappelons que les $\ln(g_l)$ sont algébriquement indépendants, on peut donc construire des polynômes irréductibles $I_l$ par rapport aux variables de la tour tels que $I_l$ divise une fois $g_l$ mais ne divise pas les $g_k$ précédents. Soit $h = \prod_{j\in\mathbb{Z}} P_j^j$ la factorisation sans facteurs multiples de $h$. On dérive alors $\ln(h)$ ce qui donne :

$$\sum_l x_l g_l'/g_l = \sum_j j P_j'/P_j$$

où $\prod_j P_j^j$ est la décomposition sans facteurs multiples de $h$. Comme $I_l$ divise un et un seul des $P_j$ on en déduit que $x_l$ est égal au $j$ correspondant et est donc entier. (Remarque : si on n'impose pas aux arguments des logarithmes d'être des polynômes sans facteurs carrés, on obtiendrait ici des coefficients rationnels).

**En pratique** :

On peut effecter l'algorithme de la manière suivante :

- on cherche les variables généralisées de l'expression qui dépendent de $x$.
- On ajoute les variables généralisées en commençant par la moins longue
- Si c'est un logarithme, on extrait les puissances des exponentielles précédentes dont il dépend. On cherche des relations entre fonctions $\ln$ en les réécrivant comme combinaison linéaire de $\ln$ indépendants. Pour avoir des $\ln$ indépendants, on se ramène d'abord à des polynômes sans facteurs multiples en utilisant la relation $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ et en écrivant la factorisation sans facteurs multiples de chaque polynôme argument, puis on extrait le PGCD 2 à 2 des arguments de logarithmes jusqu'à obtenir des arguments de $\ln$ premiers entre eux.
- Si c'est une exponentielle, on teste si son argument est combinaison linéaire à coefficients rationnels :
  - des arguments des exponentielles précédentes,
  - des $\ln$ des logarithmes précédents,

— de $\ln(x)$ et de $i * \pi$.
Pour cela on substitue les $\ln$ par des indéterminées, et on dérive une fois par rapport à cette indéterminée, le résultat doit être un rationnel, pour les variables exponentielles, il faut réduire au même dénominateur et résoudre le système linéaire obtenu en identifiant les coefficients du numérateur. Si l'exponentielle est indépendante des précédentes, on extrait de l'exponentielle à rajouter la partie linéaire de la dépendance en les $\ln$ précédents si le coefficient correspondant est entier. Par exemple, on réécrit :

$$xe^{2\ln(x)+\ln(x)^2} = x^3 e^{\ln(x)^2}$$

**Remarque**
On n'est pas obligé de se limiter aux seules fonctions logarithmes et exponentielles, l'essentiel est de pouvoir tester l'indépendance algébrique des expressions créées. Pour éviter d'avoir à introduire des exponentielles et logarithmes complexes dans une expression réelle, on peut autoriser par exemple des extensions en tangente ou en arctangente.

### 19.2.3 Théorème de Liouville

On a vu que la dérivée d'une fonction élémentaire dépendant d'une tour de variables est une fonction élémentaire dépendant de la même tour de variables. Réciproquement, supposons qu'une fonction élémentaire admette une primitive qui soit élémentaire, c'est-à-dire qu'elle doit être une fraction rationelle par rapport à une tour de variables mais pas forcément identique à celle de départ. Alors, si une telle écriture existe, à des termes logarithmiques près, elle ne peut dépendre que de la même tour de variables, plus précisément on a le théorème de Liouville :

**Théorème 38** *Soit $f$ une fonction élémentaire par rapport à une tour de variables $T$ et un corps de constantes $K$ admettant une primitive élémentaire $F$. Alors il existe un nombre fini de constantes $c_1, ..., c_n$ et de fonctions élémentaires $v_1, ..., v_n$ par rapport à $T$ avec comme corps de constantes une extension algébrique $K'$ de $K$ tel que $F - \sum_k c_k \ln(v_k)$ soit élémentaire par rapport à $T$ et $K$.*

**Preuve :** [2]
Soit $f$ élémentaire de tour $T_1$ (corps $K$) et $F$ sa primitive supposée élémentaire de tour $T_2$ et de corps $K'$ une extension algébrique de $K$. On commence par rajouter après les élements de $T_1$ les élements nécessaires de $T_2$ pour obtenir une tour $T$ par rapport à laquelle $f$ et $F$ sont élémentaires (plus précisément $F$ sera élémentaire quitte à autoriser des puissances fractionnaires des variables exponentielles de $T_1$). Le théorème de structure de Risch permet de faire cela, en effet on regarde pour chaque élément de $T_2$ s'il est algébriquement indépendant des éléments de $T_1$ ou non. S'il l'est, on le rajoute à la tour $T$, s'il ne l'est pas alors dans le cas d'un logarithme il est élémentaire et dans le cas d'une exponentielle, une de ses puissances est élémentaire. Donc $F$ est bien une fraction rationnelle par rapport aux éléments logarithmiques de $T_1$, aux racines $n$-ième des éléments exponentiels de $T_1$ et à des éléments de $T_2$ dans cet ordre (le corps des constantes étant $K'$).

**Première étape :**
Commençons par les éléments restant de $T_2$. Soit $X_k$ l'élément au sommet de la

2. Peut être omise en première lecture

tour $T$. La dérivée $f$ de $F$ par rapport à $X_k$ ne dépend pas de $X_k$. Donc soit $F$ ne dépend pas de $X_k$ et on passe à la variable suivante, soit $X_k = \ln(v_k)$ est un logarithme et $F = c_k \ln(v_k) + d_k$ avec $c_k \in K'$ et $v_k$ et $d_k$ indépendants de $X_k$. S'il n'y a pas d'autres éléments restants de $T_2$, on passe à la 2ème étape. Sinon soit $X_{k-1}$ la variable suivante (juste en-dessous de $X_k$ dans la tour). En dérivant, on a :

$$F' = c_k \frac{v_k'}{v_k} + d_k' = f$$

Supposons que $v_k$ dépende de $X_{k-1}$, on fait alors un raisonnement analogue à celui de la preuve du théorème de structure de Risch, en décomposant $v_k$ en produit/quotient de facteurs sans multiplicités $v_k = \prod P_j^j$ et en écrivant $d_k = N/D$ on a :

$$\left( \prod_j P_j \right) \frac{N'D - ND'}{D^2}$$

est un polynôme en $X_{k-1}$. On en déduit comme précédemment que $D = 1$, $N' = d_k'$ est indépendant de $X_{k-1}$. Comme on a supposé que $v_k$ dépend de $X_{k-1}$, $X_{k-1} = \exp(Y_{k-1})$ est alors une exponentielle, $N = d_k$ ne dépend pas de $X_{k-1}$ et l'un des $P_j = X_{k-1}$ (sinon tous les $P_j$ seraient constants en $X_{k-1}$ donc $v_k$ aussi). On élimine alors la variable $X_{k-1}$ en écrivant $\ln(v_k) = jY_{k-1} + \ln(w_k)$, avec $Y_{k-1}$ et $w_k$ élémentaires et indépendants de $X_{k-1}$.

Si $v_k$ est indépendant de $X_{k-1}$, alors $d_k'$ aussi donc soit $d_k$ est indépendant de $X_{k-1}$ et on passe à la variable suivante, soit $X_{k-1}$ est un logarithme et $d_k = c_{k-1} \ln(v_{k-1}) + d_{k-1}$. En continuant pour toutes les variables restantes de $T_2$, on obtient

$$F = \sum_k c_k \ln v_k + d$$

avec $d$ et $v_k$ élémentaires pour $T_1$ (avec exponentielles modifiées en en prenant une racine $n$-ième) et $K'$.

**Deuxième étape** Il s'agit de montrer que pour les exponentielles, il n'est en fait pas nécessaire de prendre de racines $n$-ième. La compréhension de cette étape demande un peu de familiarité avec l'algorithme de Risch (cf. infra). On va faire la preuve pour la variable au sommet de la tour $T_1$ si c'est une exponentielle. On verra dans le déroulement de l'algorithme de Risch que pour les autres variables, il y a appel récursif de l'algorithme d'intégration, donc traiter la variable au sommet suffira. Soit donc $\exp(Y)$ la variable au sommet de la tour $T_1$, on note $X = \exp(Y/n)$ la racine $n$-ième de cette variable qui est utilisée pour exprimer $F = \sum c_k \ln v_k + N/D$ comme une fraction rationnelle en $X$ alors que $f = F'$ est une fraction rationnelle en $X^n$. On a donc :

$$\sum c_k \frac{v_k'}{v_k} + \frac{N'}{D} = f = \text{fraction rationnelle en } (X^n)$$

Notons que le fait que $X$ soit une exponentielle est essentiel, car par exemple l'intégrale d'une fraction rationnelle dépendant de $x^n$ comme $x^3$ ou $1/(x^3 - 1)$ ne s'exprime pas en fonction de $x^3$. On traite d'abord la partie polynomiale généralisée de $f$ en $X^n$ :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j (X^n)^j$$

Son intégrale est un polynôme généralisé, éventuellement dépendant de $X$, soit $\sum_{j\in\mathbb{Z}} A_j X^j$. On dérive, et on obtient pour $k$ non multiple de $n$, $A_k Y/n + A'_k = 0$ dont $A_k = 0$ est solution. La partie polynôme généralisé ne dépend donc que de $X^n$. On effectue aussi les intégrations par parties pour réduire le dénominateur de $f$ à un polynôme sans facteurs multiples (réduction de Hermite), ce qui se fait en introduisant des fractions rationnelles en $X^n$ uniquement. Reste la partie logarithmique. On utilise le critère du résultant, les coefficients des logarithmes sont les racines $c_k$ du polynôme en $t$

$$\mathrm{Res}_X(D, N - tD')$$

où ces racines doivent être indépendantes de $x$ (puisque $F$ existe) et les $v_k$ correspondants sont égaux à

$$\gcd(D, N - c_k D')$$

Or comme $X$ est une exponentielle, $D'$ est un polynôme en $X^n$, de même que $D$ et $N$, donc $v_k$ est un polynôme en $X^n$.

**Troisième étape** Il reste enfin à montrer que seuls les $c_k$ et $v_k$ nécessitent une extension algébrique de $K$. Ceci est encore une conséquence de l'algorithme de Risch, la construction de la partie polynomiale (éventuellement généralisée) et de la partie fractionnaire ne font en effet intervenir que des coefficients dans le corps $K$.

## 19.3 L'algorithme de Risch

On suppose dans la suite qu'on s'est ramené à une fraction rationnelle par rapport à une tour de variables (où on a effectué les simplifications évidentes $\ln \circ \exp$, ainsi que $\exp \circ \ln$, dans le premier cas en extrayant les facteurs évidents en les variables précédentes exponentielles, dans le deuxième cas en extrayant la partie linéaire à coefficient entier en les variables logarithmes précédentes). On note $X$ la variable au sommet de la tour et $N_0/D_0$ l'écriture de la fonction élémentaire comme fraction irréductible avec $N_0$ et $D_0$ polynômes en $X$.

**Exemples**

$$\int (2x^2+1)e^{x^2} \quad X = e^{x^2} \quad N_0 = (2x^2+1)X, D_0 = 1$$

$$\int \frac{x\ln(x)}{x+\ln(x)} \quad X = \ln(x) \quad N_0 = xX, D_0 = x + X$$

La première étape va consister à se ramener à un dénominateur sans facteurs multiples. Elle est analogue au cas des fractions rationnelles de $x$ et est basée sur l'identité de Bézout entre $P$ et $P'$ vu comme polynômes en la variable du haut de la tour. Il apparait toutefois une difficulté pour les extensions exponentielles, à savoir que $X = e^f$ et $X' = f'X$ ne sont pas premiers entre eux comme polynômes en $X$, on devra traiter le pôle 0 d'une fraction rationnelle en une exponentielle $X$ comme on traite l'intégration d'un polynôme en $x$. Si $P$ est sans facteurs multiples et premier avec $X$, alors $P(X)$ et $P(X)' = f'XP'(X)$ vu comme polynômes en $X$ n'ont pas de facteurs en commun.

On commence donc, si $X$ est une exponentielle et $D_0$ un multiple de $X$, par appliquer Bézout pour décomposer la fraction $N_0/D_0$ en :

$$\frac{N_0}{D_0} = \frac{N_1}{D_1} + \frac{P}{X^k}, \quad \gcd(X, D_1) = 1, D_0 = X^k D_1$$

On isole aussi la partie polynômiale en effectuant la division euclidienne de $N_0$ par $D_0$ (ou de $N_1$ par $D_1$ si $X$ est une exponentielle), on obtient alors une écriture sous la forme :

$$\frac{N}{D} + \sum_j a_j X^j$$

où la somme sur $j$ est finie et porte sur des entiers positifs ou nul si $X$ n'est pas une exponentielle, ou sur des entiers relatifs si $X$ est une exponentielle.

On effectue la même écriture sur la partie fractionnaire de $F$, et en identifiant les parties polynomiales et éventuellement la partie polaire en 0 si $X$ est une exponentielle, on peut séparer l'intégration en 2 parties : intégration de la partie polynomiale (généralisée) et intégration de la partie fractionnaire propre.

**Exemples**

— $(2x^2+1)e^{x^2} = 0 + (2x^2+1)X$ est un polynôme,

— $$\frac{x\ln(x)}{x+\ln(x)} = \frac{xX}{x+X} = -\frac{x^2}{x+X} + x$$

la partie polynomiale est $x$ (de degré 0 en $X$), la partie fractionnaire est $-x^2/(x+X)$

— $$\frac{x(e^{2x}+1)}{e^x(e^x+1)^2} = \frac{x(X^2+1)}{X(X+1)^2} = -\frac{2x}{(X+1)^2} + xX^{-1}$$

la partie polynôme généralisé est $xX^{-1}$

### 19.3.1 Intégration d'une fraction propre

### 19.3.2 Réduction sans facteurs multiples

On factorise $D$ en $\prod_i P_i^i$ avec $P_i$ sans facteurs multiples (et les $P_i$ premiers entre eux 2 à 2) et on décompose en éléments simples relativement à cette factorisation (en appliquant Bézout) :

$$\frac{N}{D} = \sum_{i>0} \frac{N_i}{P_i^i}$$

Pour chaque polynome $P_i$, on applique Bézout à $P_i$ et $P_i'$ :

$$N_i = A_i P_i + B_i P_i' \Rightarrow \frac{N_i}{P_i^i} = \frac{A_i}{P_i^{i-1}} + \frac{B_i P_i'}{P_i^i}$$

on intègre par parties le second terme

$$\int \frac{N_i}{P_i^i} = \int \frac{A_i}{P_i^{i-1}} - \frac{B_i}{(i-1)P_i^{i-1}} + \int \frac{B_i'}{(i-1)P_i^{i-1}}$$

on rassemble les deux intégrales ayant $P_i^{i-1}$ au dénominateur et on recommence jusqu'à avoir une puissance 1 au dénominateur. Il reste alors à intégrer une somme de fractions du type $N/D$ avec $D$ et $D'$ premiers entre eux.

**Exemple**

On reprend le dernier exemple de la section précédente pour éliminer la puissance 2 au dénominateur : $N_2 = 2x$ et $P_2 = (X+1)$ avec $X = e^x$. On a $P_2' = X$, donc $A_2 = 2x$ et $B_2 = -2x$ :

$$\int \frac{2x}{(X+1)^2} = \int \frac{2x}{P_2} + \int \frac{-2xP_2'}{P_2^2} = \int \frac{2x}{P_2} + \frac{2x}{P_2} - \frac{2}{P_2}$$

il reste donc à intégrer $(2x-2)/(e^x+1)$.

### 19.3.3 La partie logarithmique

Comme on l'a vu lors de la preuve du théorème de structure de Risch, si on dérive une fraction en $X$, le dénominateur de la dérivée ne peut se décomposer qu'en produit de facteurs de multiplicité supérieure ou égale à 2. Il en résulte que la fraction à intégrer résiduelle (encore notée $f = N/D$) après l'étape de réduction ci-dessus ne peut provenir que de la dérivation de $F = \sum_k c_k \ln(v_k)$ :

$$f = \frac{N}{D} = F' = (\sum_k c_k \ln(v_k))' = \sum_k c_k \frac{v_k'}{v_k}$$

En identifiant les décompositions en éléments simples de $F'$ et $f$, on montre également que les $v_k$ divisent $D$, plus précisément on peut imposer aux $v_k$ d'être premiers entre eux 2 à 2 et dans ce cas $D = \prod v_k$. Donc :

$$\sum_k c_k \frac{v_k'}{v_k} = \frac{N}{\prod_k v_k} = \frac{N}{D}$$

et :

$$N = \sum_k c_k v_k' \prod_{j \neq k} v_j$$

Soit $t$ un paramètre, formons le polynôme $N - tD'$ :

$$N - tD' = \sum_k \left( (c_k - t) v_k' \prod_{j \neq k} v_j \right)$$

donc le pgcd en $X$ des polynômes $N - tD'$ et $D$ est :

- si $t$ n'est égal à aucun des $c_k$, $N - tD'$ est premier avec $v_k$ pour tout $k$ car $v_k$ divise $\sum_{l \neq k} (c_l - t) v_l' \prod_{j \neq l} v_j$ et $v_k' \prod_{j \neq k} v_j$ est premier avec $v_k$. Donc le pgcd est 1.
- si $t$ est égal à l'un des $c_k$, alors le pgcd est le produit des $v_k$ tels que $c_k = t$ (notons que dans ce cas on peut rassembler ces $v_k$ à l'intérieur d'un même logarithme)

Considérons le polynôme $R$ de la variable $t$ égal au résultant par rapport à $X$ des polynômes $D$ et $N - tD'$ (rappelons qu'il s'agit du déterminant du système linéaire $AD + B(N - tD') = 1$ où les inconnues sont les coefficients des polynômes $A$ et

$B$, ce déterminant est nul si et seulement si le système n'a pas de solution donc si et seulement si $D$ et $N - tD'$ ne sont pas premiers entre eux), alors ce polynôme en $t$ s'annule si et seulement si $t = c_k$. On cherche les racines $c_k$ en $t$ de ce polynôme, elles doivent être indépendantes de $x$ si $F$ est élémentaire, et dans ce cas la primitive $F$ de $f = N/D$ vaut

$$F = \sum_{c_k \text{ racine de } R} c_k \ln(\gcd(N - c_k D', D))$$

**Exemples**

—

$$\frac{2x-2}{e^x+1}, \quad D = X+1, D' = e^x = X, \quad N - tD' = 2x - 2 - tX$$

On calcule $R = -2 * x - t + 2$, l'unique racine est $t = 2 - 2x$ qui n'est pas constante donc cette fonction n'admet pas de primitive élémentaire.

—

$$\frac{(2x^2 - x - 2)X - 1}{X^2 + (x+1)X + x}, \quad X = \exp(x^2 + x)$$

On a $D' = 2(2x+1)X^2 + (1 + (2x+1)(x+1))X + 1$

$$R = -(2x-1)(x+1)(2x+1)(x-1)^2(t+1)(t-1)$$

les racines en $t$ sont constantes et égales à 1 et -1, donc $c_1 = 1$ et $v_1 = \gcd(N - D', D) = X + 1$ et $c_2 = -1$, $v_2 = \gcd(N + D', D) = x + X$ donc :

$$\int \frac{(2x^2 - x - 2)X - 1}{X^2 + (x+1)X + x} = \ln(X+1) - \ln(x+X)$$

**Remarque importante**

Pour les extensions exponentielles ou logarithmiques, la dérivée de la partie logarithmique calculée comme ci-dessus contiendra en général une partie entière constante par rapport à $X$, il faut donc retirer cette partie entière à la partie polynomiale.

### 19.3.4 La partie polynomiale (généralisée)

On doit résoudre :

$$(\sum_j A_j X^j)' = \sum_j a_j X^j$$

avec une somme sur $j \in \mathbb{Z}$ si $X$ est une exponentielle et $j \in \mathbb{N}$ sinon.

Si $X = x$, $j \geq 0$ et la résolution est immédiate : on prend $A_0 = 0$ et $A_{j+1} = a_j/(j+1)$.

### 19.3.5 Extension logarithmique

Si $X = \ln(Y)$ est un logarithme, $j \geq 0$ et on doit résoudre :

$$\sum_{j \geq 0} (A_j' + (j+1)A_{j+1}\frac{Y'}{Y})X^j = \sum_j a_j X^j$$

Soit $k$ la plus grande puissance non nulle de $f$ ($a_j = 0$ si $j > k$ et $a_k \neq 0$). Pour $j > k$, on a :

$$A'_j + (j+1)A_{j+1}\frac{Y'}{Y} = 0$$

On résout pour des valeurs de $j$ décroissante, pour $j$ suffisamment grand, on a $A_{j+1} = 0$ car la somme sur $j$ est finie, donc $A_j$ est constant. Si $A_j \neq 0$, alors au rang $j-1$, on a $A'_{j-1} = -jA_jY'/Y$ qui n'admet pas de solutions car $A_{j-1}$ ne peut pas dépendre de $X = \ln(Y)$. On en déduit que pour $j > k+1$, on a $A_j = 0$ et $A_{k+1}$ est constant. En fait la valeur constante de $A_{k+1}$ sera déterminée par une condition de compatibilité en résolvant l'équation au rang du dessous. On continue la résolution de

$$A'_j + (j+1)A_{j+1}\ln(Y)' = a_j$$

par valeur décroissante de $j$, à chaque rang on va déterminer $A_j$ à une constante près en résolvant un problème d'intégration (par appel récursif de l'algorithme de Risch, mais si $j \neq 0$ sans autoriser l'ajout de nouveaux logarithmes sauf $\ln(Y)$) et la valeur de la constante de $A_{j+1}$ (on fait varier $A_{j+1}$ de la constante nécessaire pour absorber le terme en $\ln(Y)$ qui apparait lors de l'appel récursif de Risch). Au rang 0, on est ramené à un problème d'intégration avec une variable de moins (la constante indéterminée dans $A_1$ peut par exemple être choisie comme le coefficient constant de $\ln(Y)$ s'il en apparait un en intégrant).

**Exemple**
$X = \ln(x^2+1)$ et on cherche l'intégrale de $X^2$. On a donc $A_3$ est constant,

$$A'_2 + 3A_3\ln(x^2+1)' = 1$$

La primitive de 1 est élémentaire et ne fait pas intervenir de $\ln$ donc $A_3 = 0$ et $A_2 = x + C_2$. Au rang 1, on a :

$$A'_1 + 3x\frac{2x}{x^2+1} + C_2\ln(x^2+1)' = 0$$

On calcule la primitive de $6x^2/(x^2+1)$ qui doit être une fraction rationnelle à un $C\ln(x^2+1)$ près, on voit que ce n'est pas le cas donc $X^2$ n'admet pas de primitive élémentaire. Remarque : si on avait voulu intégrer $X$ au lieu de $X^2$, la même méthode montre que la primitive existe, car au rang 0 il n'y a plus de contraintes sur les $\ln$ qu'on peut rajouter.

### 19.3.6 Extension exponentielle

Si $X = \exp(Y)$ est une exponentielle, on doit résoudre :

$$\sum_j (A'_j + jY'A_j)X^j = \sum_j a_jX^j$$

Ceci va se faire degré par degré :

$$A'_j + jY'A_j = a_j \tag{19.4}$$

**Exemple**
Pour calculer $\int a(x)\exp(x^2)$, on a $j = 1$, et on doit résoudre l'équation différentielle :

$$A'_1 + 2xA_1 = a(x)$$

Pour $j = 0$, il suffit de faire un appel récursif à l'algorithme de Risch, mais pour $j \neq 0$, la situation se complique ! Notons $Z$ la variable située juste en-dessous de $X$ dans la tour de variables (dans l'exemple ci-dessus $Z = x$), il s'agit de résoudre :

$$y' + fy = g \tag{19.5}$$

avec $f$, $g$ élémentaires par rapport à une tour dont le variable au sommet est $Z$, on cherche $y$ élémentaire par rapport à cette tour (ici $f = jY'$ est une dérivée mais dans certains cas nous devrons résoudre par appel récursif des équations du type ci-dessus où $f$ ne sera pas une dérivée).

**Élimination des dénominateurs**

Soit $P$ un facteur irréductible du dénominateur de $y$, notons $\alpha < 0$ la valuation de $y$ par rapport à $P$, $\beta$ celle de $f$, $\gamma$ celle de $g$. Si $P$ n'est pas une exponentielle, la valuation de $y'$ est $\alpha - 1$, celle de $fy$ est $\alpha + \beta$. Si $\beta \neq -1$, il n'y a pas de simplification possible dans le membre de gauche donc $\alpha + \min(\beta, -1) = \gamma$. Autrement dit, si $\beta \geq 0$ alors $\alpha = \gamma + 1$ et si $\beta < -1$ alors $\alpha = \gamma - \beta$. On observe que $\gamma < 0$ donc $P$ est un facteur du dénominateur $g_d$ de $g$. De plus, on va montrer que la valuation $\alpha$ de $P$ dans $y$ est l'opposé de celle de $P$ dans :

$$D = \frac{\gcd(g_d, \partial_Z g_d)}{\gcd(c, \partial_Z c)}, \quad c = \gcd(f_d, g_d) \tag{19.6}$$

En effet, si $\beta \geq 0$, $P$ ne divise pas $f_d$ donc ne divise pas $c$, donc la valuation de $P$ dans $D$ est $-\gamma - 1$. Si $\beta < -1$, alors $\alpha = \gamma - \beta < 0$ entraine $-\gamma > -\beta$ donc la valuation de $P$ dans $c$ est $-\beta$ et la valuation de $P$ dans $D$ est $-\gamma - 1 - (-\beta - 1)$.

Si $\beta = -1$, s'il n'y a pas de simplifications dans le membre de gauche pour les termes de plus petite puissance en $P$, alors $\alpha = \gamma + 1$. S'il y a simplification, on décompose en éléments simples (avec Bézout) puis on ordonne par puissances croissantes de $P$ :

$$y = N_1 P^\alpha + ..., f = N_2 P^{-1} + ...,$$

avec $N_1, N_2$ de degré plus petit que $P$, puis on remplace dans (**??**). On cherche les termes de valuation $\alpha - 1$ en $P$ qui doivent se simplifier :

$$\alpha N_1 P' P^{\alpha-1} + N_2 P^{-1} N_1 P^\alpha = 0$$

donc :

$$N_2 = -\alpha P'$$

ce qui détermine $\alpha$.

**Récapitulons**

Si $f$ est une dérivée, alors $\beta = -1$ est exclus et on peut appliquer (**??**) pour déterminer $D$. Si $f$ n'est pas une dérivée, on calcule les facteurs de degré 1 de $f_d$ :

$$f_1 = \frac{f_d}{\gcd(f_d, \partial_Z f_d)}$$

on décompose $f$ par Bézout en isolant la partie $N/f_1$ les $\alpha$ possibles sont alors les racines entières (en $t$) du résultant en $Z$ de $N - tf_1'$ et $f_1$, ils correspondent aux facteurs $\gcd(N - \alpha f_1', f_1)$ que l'on retire de $f_d$ pour appliquer (**??**).

**Exemple**

Reprenons $y' + 2xy = a(x)$. Si $a(x) = 1$ (résolution de $\int \exp(x^2)$), ou plus

généralement si $a(x)$ est un polynôme, alors $D = 1$. Si $a(x) = 1/x^2$, on trouve $D = x$ et on pose $y = xz$, donc $x^2(xz'+z)+2x^4z = 1$ soit $x^3z'+(2x^4+1)z = 1$.

Reste le cas où $Z$ est une exponentielle et $P = \exp(z)$. On reprend le même raisonnement, $y'$ a pour valuation $-\alpha < 0$, $fy$ a pour valuation $-\beta - \alpha$, donc si $\beta > 0$, $\alpha = \gamma$ et si $\beta < 0$, $\alpha = \gamma - \beta$. Si $\beta = 0$, s'il n'y a pas de simplifications du terme de plus bas degré, on est ramené au cas précédent. Si $\beta = 0$ et s'il y a simplification des termes de plus bas degré en $Z$, notons $f_0$ le coefficient constant de $f$ par rapport à $Z$ et $y_\alpha$ le coefficient de $Z^\alpha$ dans $y$, on a

$$y'_\alpha + (\alpha z' + f_0)y_\alpha = 0$$

donc :

$$y_\alpha = \exp(-\alpha z - \int f_0)$$

Comme $y_\alpha$ est élémentaire et indépendant de $Z$ on en déduit par le théorème de structure de Risch que $-\alpha z - \int f_0$ est combinaison linéaire à coefficients rationnels des logarithmes et des arguments des exponentielles de la tour, de plus le coefficient de $z$ doit être nul pour que $y_\alpha$ soit indépendant de $Z$, ce qui impose la valeur de $\alpha$ (après avoir résolu récursivement le problème d'intégration pour $f_0$)

**Majoration du degré du numérateur de** $y$

En multipliant $y$ par $DZ^{-\alpha}$, puis en réduisant au même dénominateur, on se ramène alors à une équation différentielle à coefficients polynomiaux par rapport à la variable $Z$ dont l'inconnue est un polynôme $N$ :

$$RN' + SN = T \tag{19.7}$$

On va chercher une majoration sur le degré possible de $N$ puis utiliser l'identité de Bézout pour simplifier cette équation.

On écrit maintenant $N = \sum_{k=0}^{n} N_k Z^k$ et on remplace, il y a à nouveau trois cas selon le type de $Z$.

**Si** $Z = x$ **: cas exponentielle rationnelle**

Donc $Z' = 1$, le degré de $RN'$ est $r + n - 1$ (si $N$ est non constant c'est-à-dire si $T$ n'est pas un multiple de $S$), le degré de $SN$ est $s + n$. Si $r - 1 \neq s$, on en déduit que :

$$n = t - \max(r - 1, s)$$

Si $r - 1 = s$, on peut avoir une simplification du terme de plus haut degré $s + n$ (sinon on est dans le cas précédent) si $nR_r = S_s$ d'où on déduit le degré $n$ de $N$.

Par exemple, pour $y' + 2xy = T$ ou pour $x^3z' + (2x^4+1)z = 1$ on a $r = s-1$ donc $n + s = t$, donc pas de solution dans le deuxième cas, dans le premier cas il ne peut y avoir de solutions que si $t \geq s$, en particulier il n'y a pas de solution pour $t = 1$, on a donc démontré que $\int \exp(x^2)$ n'admet pas de primitive élémentaire.

**Si** $Z = \exp(z)$ **: cas exponentielle d'exponentielle**

Ici les $N_k$ peuvent ne pas être constants, on a :

$$N' = \sum_{k=0}^{n} (N'_k + kN_k z')Z^k$$

Comme on l'a déjà observé, $N'_n + nN_n z' \neq 0$, donc le degré de $N'$ est égal au degré de $N$. On a donc trois cas :

— si $r \neq s$, alors $n = t - \max(r, s)$
— si $r = s$ et les termes de plus haut degré du membre de gauche ne se simplifient pas, alors, $n = t - r = t - s$.
— si $r = s$ et s'il y a simplification, alors :

$$R_r(N'_n + nN_nz') + S_sN_n = 0$$

donc :

$$N'_n + (\frac{S_s}{R_r} + nz')N_n = 0$$

et :

$$N_n = C\exp(-nz - \int \frac{S_s}{R_r})$$

On appelle alors l'algorithme de Risch avec une variable de moins ($S_s$ et $R_r$ ne dépendent plus de $Z$) pour calculer $I = \int S_s/R_r$. Il s'agit alors de trouver $n$ tel que l'exponentielle précédente soit élémentaire et indépendante de la variable $Z$. Le théorème de structure de Risch implique que $-nz - \int S_s/R_r$ est combinaison linéaire à coefficients rationnels des logarithmes et des arguments des exponentielles de autres variables de la tour (jusqu'à $z$ non compris). Ceci permet de déterminer $n$ de manière unique (c'est le coefficient rationnel de $\int S_s/R_r$ en $z$).

**Si $Z = \ln(z)$ : exponentielle de logarithme**

Ici aussi, les $N_k$ peuvent ne pas être constants, on a :

$$N' = \sum_{k=0}^{n}(N'_kZ^k + kN_k\frac{z'}{z}Z^{k-1})$$

Si $N_n$ n'est pas constant, le terme de plus haut degré de $RN'$ est $N'_nR_rZ^{n+r}$, si $N_n$ est constant, le terme de plus haut degré de $RN'$ est $R_r(nN_nz'/z+N'_{n-1})Z^{r-1}$ qui est non nul (sinon $z'/z = CN'_{n-1}$ et $z = \exp(CN_{n-1})$ serait une exponentielle). Le terme de plus haut degré de $SN$ est $N_nS_sZ^{n+s}$.

— Si $r < s$ ou si $r = s$ sans simplifications, alors $n = t - s$.
— Si $r > s + 1$ ou si $r = s + 1$ sans simplifications, alors $\deg(N') = t - r$ donc $n = t - r$ ou $n = t - r + 1$.
— Si $r = s + 1$, et s'il y a simplifications, alors $N_n$ est constant et :

$$R_r(nN_nz'/z + N'_{n-1}) + S_sN_n = 0$$

alors $N_{n-1} = C(-\int N_nS_s/R_r - nN_n\ln(z))$ doit être élémentaire et indépendante de $Z$ donc $\int S_s/R_r$ est élémentaire, on détermine $n$ en éliminant le coefficient de $Z = \ln(z)$ provenant de $\int S_s/R_r$.
— Si $r = s$, et s'il y a simplification des termes de plus haut degré du membre de gauche, alors $N'_nR_r + N_nS_s = 0$ donc $N_n = \exp(-\int S_s/R_r)$ est élémentaire et indépendante de $Z$. On peut donc changer d'inconnue $N = N_nM$ sans changer le fait que $M$ est un polynôme de même degré que $N$. On se ramène alors à une équation du même type

$$RM' + (S - R\frac{S_s}{R_r})M = \frac{T}{N_n}$$

mais avec $s$ diminué de 1 au moins.

**Réduction (algorithme SPDE de Rothstein)**
On observe d'abord que si $R$ et $S$ ont un facteur en commun, alors ce facteur divise $T$ car $N'$ et $N$ sont des polynômes en $Z$. On peut donc quitte à simplifier par $\gcd(R,S)$ se ramener au cas où $R$ et $S$ sont premiers entre eux, il existe donc deux polynômes $U$ et $V$ tels que :

$$RU + SV = T, \quad \deg(V) < \deg(R) \tag{19.8}$$

En soustrayant (**??**) de (**??**), on montre que $R$ divise $N-V$. Soit $H = (N-V)/R$. Alors $N = RH + V$ donc

$$R(RH' + R'H + V') + SRH + SV = T = RU + SV$$

donc après simplification par $SV$ et division par $R$, $H$ vérifie l'équation :

$$RH' + (S + R')H = U - V'$$

C'est une équation du même type mais avec $\deg(H)$=$\deg(N)$-$\deg(R)$ ou $H = 0$ (si $N = V$). Donc si $\deg(R) > 0$, au bout d'un nombre fini d'étapes on doit tomber sur un second membre nul ou des simplifications de $R$ avec $S + R'$ telles que $R$ simplifié soit constant en $Z$.

**Résolution**
Si $R$ est constant par rapport à $Z$, on simplifie par $R$ et on doit résoudre

$$N' + SN = T$$

Si $S = 0$, c'est un problème d'intégration. Supposons donc que $S \neq 0$. Si $S$ est non constant par rapport à $Z$ ou si $Z = x$, le degré de $N'$ est strictement inférieur au degré de $SN$, on peut donc facilement résoudre. Reste le cas où $S = b$ est constant non nul par rapport à $Z$ et $Z$ est une exponentielle ou un logarithme.

**Si** $Z = \exp(z)$
On a alors doit alors résoudre

$$N_k' + kN_k z' + bN_k = T_k$$

c'est une équation différentielle de Risch mais avec une variable de moins.

**Si** $Z = \ln(z)$
On doit alors résoudre

$$N_k' + (k+1)N_{k+1}\frac{z'}{z} + bN_k = T_k$$

c'est aussi une équation différentielle de Risch avec une variable de moins.

**Exemple**
Voyons comment on intègre $x^n$ avec $n$ un paramètre par l'algorithme de Risch (cela illustre les possibilités couvertes par l'algorithme mais aussi l'efficacité des méthodes traditionnelles d'intégration lorsqu'elles s'appliquent). On écrit d'abord $x^n = e^{n\ln(x)}$, donc la tour de variables est $\{x, Z = \ln(x), X = e^{n\ln(x)}\}$, il s'agit donc d'intégrer $X$ qui est un polynôme généralisé. On cherche donc $A_1$ solution de l'équation différentielle de Risch

$$A_1' + n/xA_1 = 1$$

Par rapport à $Z = \ln(x)$ la fonction $f = n/x$ est un polynôme, donc on applique le dernier cas ci-dessus, $A_1$ est aussi indépendant de $\ln(x)$ et on se ramène à résoudre la même équation mais avec comme variable principale $x$ et non $Z$. Cette fois, il y a un dénominateur $x$ en $f$. Si $A_1$ possède un dénominateur, il faut qu'il y ait annulation du terme de plus bas degré en $x$ car le second membre n'a pas de dénominateur, on obtient $n + \alpha = 0$ qui n'a pas de solution, donc $A_1$ est un polynôme en $x$ et l'équation se réécrit en :

$$xA_1' + nA_1 = x$$

On majore alors le degré en $x$ de $A_1$ par 1, car il ne peut pas y avoir d'annulation de terme de plus grand degré. Ensuite, on peut appliquer l'algorithme SPDE de Rothstein pour réduire le degré, ou ici conclure à la main, $x$ divise $nA_1$ donc $A_1 = Cx$ qu'on remplace et $C = 1/(n+1)$. Finalement, $A_1 = x/(n+1)$ et $\int x^n = x/(n+1)x^n$.

## 19.4 Quelques références


— M. Bronstein :
Symbolic Integration I, Transcendental functions, Springer
— M. Bronstein :
Integration tutorial,
`http://www-sop.inria.fr/cafe/Manuel.Bronstein/publications/mb_pa`
— J.H. Davenport, Y. Siret, E. Tournier :
Calcul formel : Systèmes et algorithmes de manipulations algébriques
— R. Risch :
les références des articles originaux de Risch sont dans le "Integration tutorial" de Bronstein.
— B. Trager :
PHD thesis MIT, 1984
— On peut lire en clair le code source de l'implémentation en MuPAD (sous Unix, désarchiver le fichier `lib.tar` du répertoire `/usr/local/MuPAD/share/lib` et regarder dans le sous-répertoire `lib/INTLIB`)

# Chapitre 20

# Intégration numérique

Les fractions rationnelles admettent une primitive que l'on calcule en décomposant la fraction avec Bézout comme expliqué précédemment. Mais elles font figure d'exceptions, la plupart des fonctions n'admettent pas de primitives qui s'expriment à l'aide des fonctions usuelles. Pour calculer une intégrale, on revient donc à la définition d'aire sous la courbe, aire que l'on approche, en utilisant par exemple un polynome de Lagrange.

Le principe est donc le suivant : on découpe l'intervalle d'intégration en subdivisions $[a,b] = [a,a+h] + [a+h,a+2h] + ...[a+(n-1)h, a+nh = b$, où $h = (b-a)/n$ est le pas de la subdivision, et sur chaque subdivision, on approche l'aire sous la courbe.

## 20.1 Les rectangles et les trapèzes

Sur une subdivision $[\alpha,\beta]$, on approche la fonction par un segment. Pour les rectangles, il s'agit d'une horizontale : on peut prendre $f(\alpha)$, $f(\beta)$ (rectangle à droite et gauche) ou $f((\alpha+\beta)/2)$ (point milieu), pour les trapèzes on utilise le segment reliant $[\alpha, f(\alpha)]$ à $[\beta, f(\beta)]$.

Exemple : calcul de la valeur approchée de $\int_0^1 t^3 dt$ (on en connait la valeur exacte $1/4 = 0.25$) par ces méthodes en subdivisant $[0,1]$ en 10 subdivisions (pas $h = 1/10$), donc $\alpha = j/10$ et $\beta = (j+1)/10$ pour $j$ variant de 0 à 9. Pour les rectangles à gauche, on obtient sur une subdivision $f(\alpha) = (j/10)^3$ que l'on multiplie par la longueur de la subdivision soit $h = 1/10$ :

$$\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9}(\frac{j}{10})^3 = \frac{81}{400} = 0.2025$$

Pour les rectangles à droite, on obtient

$$\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}(\frac{j}{10})^3 = \frac{121}{400} = 0.3025$$

Pour le point milieu $f((\alpha+\beta)/2) = f((j/10+(j+1)/10)/2) = f(j/10+1/20)$

$$\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9}(\frac{j}{10}+\frac{1}{20})^3 = 199/800 = 0.24875$$

Enfin pour les trapèzes, l'aire du trapèze délimité par l'axe des $x$, les verticales $y = \alpha$, $y = \beta$ et les points sur ces verticales d'ordonnées respectives $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ vaut

$$h\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

donc

$$\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9}\left((\frac{j}{10})^3 + (\frac{j+1}{10})^3\right) = \frac{101}{400} = 0.2525$$

Dans la somme des trapèzes, on voit que chaque terme apparait deux fois sauf le premier et le dernier.

Plus généralement, les formules sont donc les suivantes :

$$\text{rectangle gauche} = h\sum_{j=0}^{n-1} f(a+jh) \tag{20.1}$$

$$\text{rectangle droit} = h\sum_{j=1}^{n} f(a+jh) \tag{20.2}$$

$$\text{point milieu} = h\sum_{j=0}^{n-1} f(a+jh+\frac{h}{2}) \tag{20.3}$$

$$\text{trapezes} = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh)\right) \tag{20.4}$$

où $h = (b-a)/n$ est le pas de la subdivision, $n$ le nombre de subdivisions.

```
f(x):=ln(1+x^2); a:=0; b:=1.0; n:=100.0;
 h:=(b-a)/n;int(f(x),x,a,b)
```

$$x \mapsto \ln\left(1+x^2\right), 0, 1.0, 100.0, 0.01, 0.263943507355$$

```
h*sum(f(a+j*h),j,0,n-1); h*sum(f(a+j*h),j,1,n);
```

$$0.260486104799, 0.267417576605$$

```
h*sum(f(a+h/2+j*h),j,0,n-1);
```

$$0.263939340676$$

```
h*(f(a)/2+f(b)/2+sum(f(a+j*h),j,1,n-1));
```

$$0.263951840702$$

On observe sur l'exemple que le point milieu et les trapèzes donnent une bien meilleure précision que les rectangles. Plus généralement, la précision de l'approximation n'est pas la même selon le choix de méthode. Ainsi pour les rectangles à gauche (le résultat est le même à droite), si $f$ est continument dérivable, de dérivée majorée par une constante $M_1$ sur $[a, b]$, en faisant un développement de Taylor de $f$ en $\alpha$, on obtient

$$|\int_\alpha^\beta f(t)dt - \int_\alpha^\beta f(\alpha)dt| = |\int_\alpha^\beta f'(\theta_t)(t-\alpha)dt| \leq M_1 \int_\alpha^\beta (t-\alpha)dt = M_1 \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$$

Ainsi dans l'exemple, on a $M_1 = 3$, l'erreur est donc majorée par $0.015$ sur une subdivision, donc par $0.15$ sur les 10 subdivisions.

Pour le point milieu, on fait le développement en $(\alpha + \beta)/2$ à l'ordre 2, en supposant que $f$ est deux fois continument dérivable :

$$\begin{aligned} |\int_\alpha^\beta f(t) - \int_\alpha^\beta f(\frac{\alpha+\beta}{2})| &= |\int_\alpha^\beta f'(\frac{\alpha+\beta}{2})(t - \frac{\alpha+\beta}{2})dt \\ &\quad + \int_\alpha^\beta \frac{f''(\theta_t)}{2}(t - \frac{\alpha+\beta}{2})^2| \\ &\leq \frac{M_2}{2} 2 \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta (t - \frac{\alpha+\beta}{2})^2 dt \\ &\leq M_2 \frac{(\beta-\alpha)^3}{24} \end{aligned}$$

Dans l'exemple, on a $M_2 = 6$, donc l'erreur sur une subdivision est majorée par $0.25e-3$, donc sur 10 subdivisions par $0.25e-2 = 0.0025$.

Pour les trapèzes, la fonction $g$ dont le graphe est le segment reliant $[\alpha, f(\alpha)]$ à $[\beta, f(\beta)]$ est $f(\alpha) + (t-\alpha)/(\beta-\alpha)f(\beta)$, c'est en fait un polynome de Lagrange, si $f$ est deux fois continument dérivable, on peut donc majorer la différence entre $f$ et $g$ en utilisant (**??**), on intègre la valeur absolue ce qui donne

$$|\int_\alpha^\beta f(t)dt - \int_\alpha^\beta g(t)dt| \leq \int_\alpha^\beta |\frac{f''(\xi_x)}{2}(x-\alpha)(x-\beta)| \leq M_2 \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$$

où $M_2$ est un majorant de $|f''|$ sur $[a, b]$.

Lorsqu'on calcule l'intégrale sur $[a, b]$ par une de ces méthodes, on fait la somme sur $n = (b-a)/h$ subdivisions de longueur $\beta - \alpha = h$, on obtient donc une majoration de l'erreur commise sur l'intégrale :

— pour les rectangles à droite ou gauche $nM_1h^2/2 = M_1h(b-a)/2$
— pour le point milieu $M_2h^2(b-a)/24$
— pour les trapèzes $M_2h^2(b-a)/12$.

Lorsque $h$ tend vers 0, l'erreur tend vers 0, mais pas à la même vitesse, plus rapidement pour les trapèzes et le point milieu que pour les rectangles. Plus on approche précisément la fonction sur une subdivision, plus la puissance de $h$ va être grande, plus la convergence sera rapide lorsque $h$ sera petit, avec toutefois une contrainte fixée par la valeur de $M_k$, borne sur la dérivée $k$-ième de $f$ (plus $k$ est grand, plus $M_k$ est grand en général). Nous allons voir dans la suite comment se comporte cette puissance de $h$ en fonction de la facon dont on approche $f$.

## 20.2 Ordre d'une méthode

On appelle méthode d'intégration l'écriture d'une approximation de l'intégrale sur une subdivision sous la forme

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \approx I(f) = \sum_{j=1}^k w_j f(x_j)$$

où les $x_j$ sont dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, par exemple équirépartis sur $[\alpha, \beta]$. On utilise aussi la définition :

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \approx I(f) = (\beta - \alpha) \sum_{j=1}^k \tilde{w}_j f(x_j)$$

On prend toujours $\sum_j w_j = \beta - \alpha$ (ou $\sum_j \tilde{w}_j = 1$) pour que la méthode donne le résultat exact si la fonction est constante.

On dit qu'une méthode d'intégration est d'ordre $n$ si il y a égalité ci-dessus pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ et non égalité pour un polynôme de degré $n + 1$. Par exemple, les rectangles à droite et gauche sont d'ordre 0, le point milieu et les trapèzes sont d'ordre 1. Plus généralement, si on approche $f$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange en $n + 1$ points (donc par un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$), on obtient une méthode d'intégration d'ordre au moins $n$.

Si une méthode est d'ordre $n$ avec des $w_j \geq 0$ et si $f$ est $n+1$ fois continument dérivable, alors sur une subdivision, on a :

$$|\int_\alpha^\beta f - I(f)| \leq M_{n+1} \frac{(\beta - \alpha)^{n+2}}{(n+1)!} (\frac{1}{n+2} + 1) \tag{20.5}$$

En effet, on fait le développement de Taylor de $f$ par exemple en $\alpha$ à l'ordre $n$

$$\begin{aligned} f(t) &= T_n(f) + \frac{(t-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{[n+1]}(\theta_t), \\ T_n(f) &= f(\alpha) + (t-\alpha)f'(\alpha) + ... + \frac{(t-\alpha)^n}{n!} f^{[n]}(\alpha) \end{aligned}$$

Donc

$$|\int_\alpha^\beta f - \int_\alpha^\beta T_n(f)| \leq \int_\alpha^\beta \frac{(t-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} |f^{[n+1]}(\theta_t)| \leq \left[ M_{n+1} \frac{(t-\alpha)^{n+2}}{(n+2)!} \right]_\alpha^\beta$$

De plus,

$$\begin{aligned} |I(f) - I(T_n(f))| = |I\left( f^{[n+1]}(\theta_t) \frac{(t-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} \right)| &\leq \sum_{j=1}^k |w_j| M_{n+1} \frac{(x_j - \alpha)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq \sum_{j=1}^k |w_j| M_{n+1} \frac{(\beta - \alpha)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Donc comme la méthode est exacte pour $T_n(f)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |\int_\alpha^\beta f - I(f)| &= |\int_\alpha^\beta f - \int_\alpha^\beta T_n(f) + I(T_n(f)) - I(f)| \\ &\leq |\int_\alpha^\beta f - \int_\alpha^\beta T_n(f)| + |I(T_n(f)) - I(f)| \\ &\leq M_{n+1}\frac{(\beta-\alpha)^{n+2}}{(n+2)!} + \sum_{j=1}^k |w_j| M_{n+1}\frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Si les $w_j \geq 0$, alors $\sum_{j=1}^k |w_j| = \sum_{j=1}^k w_j = \beta - \alpha$ et on obtient finalement (**??**)

On remarque qu'on peut améliorer la valeur de la constante en faisant tous les développement de Taylor en $(\alpha+\beta)/2$ au lieu de $\alpha$, Après sommation sur les $n$ subdivisions, on obtient que :

**Théorème 39** *Pour une méthode d'ordre $n$ à coefficients positifs et une fonction $f$ $n+1$ fois continument dérivable*

$$|\int_a^b f - I(f)| \leq M_{n+1}\frac{h^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}(b-a)(\frac{1}{(n+2)}+1)$$

On observe que cette majoration a la bonne puissance de $h$ sur les exemples déja traités, mais pas forcément le meilleur coefficient possible, parce que nous avons traité le cas général d'une méthode d'ordre $n$, et utilisé une majoration pas toujours optimale du reste. Pour obtenir la meilleure valeur possible de la constante, il faut exprimer le reste de la formule de Taylor sous forme intégrale et utiliser la forme précise de la méthode :

$$f(t) = T_n(f)(t) + \int_\alpha^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{[n+1]}(x)\, dx$$

donc

$$\int_\alpha^\beta f - \int_\alpha^\beta T_n(f) = \int_\alpha^\beta \int_\alpha^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{[n+1]}(x)\, dx\, dt = \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta \frac{(t-x)_+^n}{n!} f^{[n+1]}(x)\, dx\, dt$$

où $(t-x)_+ = \max(0, t-x)$. En intervertissant les deux intégrales (Fubini), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f - \int_\alpha^\beta T_n(f) &= \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta \frac{(t-x)_+^n}{n!}\, dt f^{[n+1]}(x)\, dx \\ &= \int_\alpha^\beta \int_x^\beta \frac{(t-x)_+^n}{n!}\, dt f^{[n+1]}(x)\, dx \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{(\beta-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{[n+1]}(x)\, dx \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} I(f) - I(T_n(f)) &= I\left(\int_\alpha^\beta \frac{(x-t)_+^n}{n!} f^{[n+1]}(t)\, dt\right) \\ &= \sum_{j=1}^k w_j \int_\alpha^\beta \frac{(x_j-t)_+^n}{n!} f^{[n+1]}(t)\, dt \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_\alpha^\beta f - I(f) = \int_\alpha^\beta (\frac{(\beta-x)^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{j=1}^{k} w_j \frac{(x_j-x)_+^n}{n!}) f^{[n+1]}(x)\, dx$$

On appelle noyau de **Péano** l'expression

$$N(x) = \frac{(\beta-x)^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{j=1}^{k} w_j \frac{(x_j-x)_+^n}{n!}$$

On a alors :

$$|\int_\alpha^\beta f - I(f)| \leq \int_\alpha^\beta |N(x)||f^{[n+1]}(x)|\, dx \leq M_{n+1} \int_\alpha^\beta |N(x)|\, dx$$

## 20.3 Simpson

Il s'agit de la méthode obtenue en approchant la fonction sur la subdivision $[\alpha, \beta]$ par son polynome de Lagrange aux points $\alpha, (\alpha+\beta)/2, \beta$. On calcule l'intégrale par exemple avec un logiciel de calcul formel, avec Xcas :

```
factor(int(lagrange([a,(a+b)/2,b],[fa,fm,fb
]),x=a..b))
```

$$\frac{\mathrm{fa} + \mathrm{fb} + 4\mathrm{fm}}{6}$$

qui donne la formule sur une subdivision

$$I(f) = \frac{h}{6}(f(\alpha) + 4f(\frac{\alpha+\beta}{2}) + f(\beta))$$

et sur $[a, b]$ :

$$I(f) = \frac{h}{6}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{j=0}^{n-1} f(a+jh+\frac{h}{2}) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh)\right) \quad (20.6)$$

```
f(x):=ln(1+x^2); a:=0; b:=1.0; n:=100.0;
 h:=(b-a)/n; int(f(x),x,a,b)
```

$$x \mapsto \ln\left(1+x^2\right), 0, 1.0, 100.0, 0.01, 0.263943507355$$

```
h/6*(f(a)+f(b)+4*sum(f(a+j*h+h/2),j,0,n-1
)+2*sum(f(a+j*h),j,1,n-1))
```

$$0.263943507351$$

Si on intègre $t^3$ sur $[0,1]$ en 1 subdivision par cette méthode, on obtient

$$\frac{1}{6}(0+4\frac{1}{2^3}+1)=\frac{1}{4}$$

c'est-à-dire le résultat exact, ceci est aussi vérifié pour $f$ polynome de degré inférieur ou égal à 2 puisque l'approximation de Lagrange de $f$ est alors égale à $f$. On en déduit que la méthode de Simpson est d'ordre 3 (pas plus car la méthode de Simpson appliquée à l'intégrale de $t^4$ sur $[0,1]$ n'est pas exacte). On peut améliorer la constante générale de la section précédente pour la majoration de l'erreur en :

$$|\int_a^b f - I(f)| \leq \frac{h^4}{2880}(b-a)M_4$$

En effet sur une subdivision élémentaire $[\alpha,\beta]$, le noyau de Péano vaut :

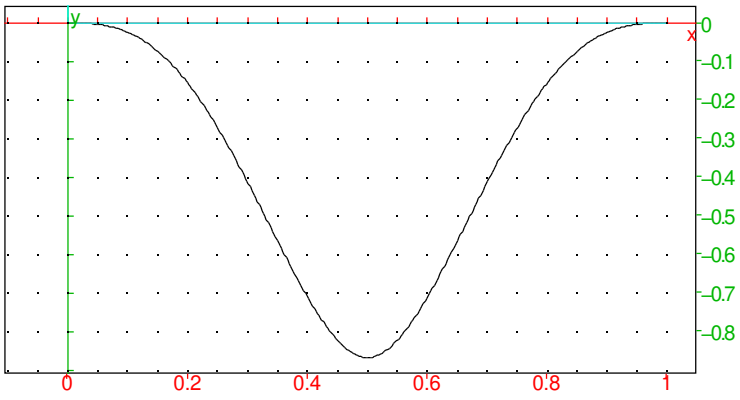
$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{(\beta-x)^4}{4!}-\frac{1}{6}\frac{(\beta-x)_+^3}{3!}-\frac{2}{3}\frac{(\frac{\alpha+\beta}{2}-x)_+^3}{3!}-\frac{1}{6}\frac{(\alpha-x)_+^3}{3!} \\ &= \frac{(\beta-x)^4}{4!}-\frac{1}{6}\frac{(\beta-x)^3}{3!}-\frac{2}{3}\frac{(\frac{\alpha+\beta}{2}-x)_+^3}{3!} \end{aligned}$$

on observe que $N(x)\leq 0$ sur $[\alpha,\beta]$

```
N(x):=(1-x)^4/4!-1/6*(1-x)^3/3!-2/3/3!*max
(0,1/2-x)^3
```

$$x\mapsto \frac{(1-x)^4}{4!}-\frac{1}{6}\cdot\frac{(1-x)^3}{3!}-\frac{\frac{2}{3}}{3!}\max\left(0,\frac{1}{2}-x\right)^3$$

```
plot(1000*N(x),x=0..1)
```




et son intégrale vaut $-1/2880(\beta-\alpha)^4$ :

```
int(N(x),x=0..1/2)+int(N(x),x=1/2..1)
```

$$-\frac{1}{2880}$$

**Remarque** : Une autre preuve de cette majoration utilise les différences divisées (**??**). La méthode de Simpson sur $[\alpha,\beta$ utilise le polynôme d'interpolation en $\alpha,(\alpha+\beta)/2,\beta$, on a donc

$$P_2(x)-f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\frac{\alpha+\beta}{2})f[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2},\beta,x]$$

on doit donc majorer l'erreur

$$E=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)(x-\frac{\alpha+\beta}{2})f[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2},\beta,x]\,dx$$

D'autre part, en appliquant **??** avec $n+1$ et $n+2$ points, on a pour tout $x_{n+1}$

$$f[x_0,..,x_n,x]=f[x_0,..,x_n,x_{n+1}]+(x-x_{n+1})f[x_0,..,x_n,x_{n+1},x]$$

donc ici :

$$f[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta, x] = f[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta, t] + (x-t)f[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta, t, x]$$

que l'on remplace dans $E$ :

$$E = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)(x-\frac{\alpha+\beta}{2})(f[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta, t]+(x-t)f[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta, t, x])\, dx$$

on distribue, le premier terme est d'intégrale nulle, et lorsque $t$ tend vers $(\alpha+\beta)/2$ le second tend vers :

$$E = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)(x-\frac{\alpha+\beta}{2})^2 \frac{f^{[4]}(\xi_x)}{4!}\, dx$$

On applique alors la formule de la moyenne (car $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\frac{\alpha+\beta}{2})^2$ est de signe constant) et

$$E = \frac{f^{[4]}(\xi)}{4!} \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)(x-\frac{\alpha+\beta}{2})^2\, dx = \frac{f^{[4]}(\xi)}{4!}\frac{(b-a)^5}{120}$$

La méthode de Simpson nécessite $2n+1$ évaluations de $f$ (le calcul de $f$ est un point étant presque toujours l'opération la plus couteuse en temps d'une méthode de quadrature), au lieu de $n$ pour les rectangles et le point milieu et $n+1$ pour les trapèzes. Mais on a une majoration en $h^4$ au lieu de $h^2$ donc le "rapport qualité-prix" de la méthode de Simpson est meilleur, on l'utilise donc plutot que les méthodes précédentes sauf si $f$ n'a pas la régularité suffisante (ou si $M_4$ est trop grand).

## 20.4 Newton-Cotes

On peut généraliser l'idée précédente, découper la subdivision $[\alpha, \beta]$ en $n$ parts égales et utiliser le polynôme d'interpolation en ces $n+1$ points $x_0 = \alpha, x_1, ..., x_n = \beta$. Ce sont les méthodes de Newton-Cotes, qui sont d'ordre $n$ au moins. Comme le polynôme d'interpolation dépend linéairement des ordonnées, cette méthode est bien de la forme :

$$I(f) = (\beta-\alpha)\sum_{j=0}^{n} \tilde{w}_j f(x_j)$$

De plus les $\tilde{w}_j$ sont universels (ils ne dépendent pas de la subdivision), parce qu'on peut faire le changement de variables $x = \alpha + t(\beta-\alpha)$ dans l'intégrale et le polynôme d'interpolation et donc se ramener à $[0, 1]$.

Exemple : on prend le polynôme d'interpolation en 5 points équidistribués sur une subdivision $[a, b]$ (méthode de Boole). Pour calculer les $\tilde{w}_j$, on se ramène à $[0, 1]$, puis on tape

```
int(lagrange(seq(j/4,j,0,4),[f0,f1,f2,f3,f4
]),x=0..1)
```

$$\frac{7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4}{90}$$

et on lit les coefficients de `f0` à `f4` qui sont les $\tilde{w}_0$ à $\tilde{w}_4$ : 7/90, 32/90, 12/90, 32/90, 7/90. Voir aussi la section **??** La méthode est d'ordre au moins 4 par construction, mais on vérifie qu'elle est en fait d'ordre 5 (exercice), la majoration de l'erreur d'une méthode d'ordre 5 est

$$|\int_a^b f - I(f)| \leq \frac{M_6}{2^6 6!}(1+\frac{1}{7})h^6(b-a)$$

elle peut être améliorée pour cette méthode précise en

$$|\int_a^b f - I(f)| \leq \frac{M_6}{1935360}h^6(b-a)$$

En pratique, on ne les utilise pas très souvent, car d'une part pour $n \geq 8$, les $w_j$ ne sont pas tous positifs, et d'autre part, parce que la constante $M_n$ devient trop grande. On préfère utiliser la méthode de Simpson en utilisant un pas plus petit.

Il existe aussi d'autres méthodes, par exemple les quadratures de Gauss (on choisit d'interpoler en utilisant des points non équirépartis tels que l'ordre de la méthode soit le plus grand possible, cf. infra) ou la méthode de Romberg qui est une méthode d'accélération de convergence basée sur la méthode des trapèzes (on prend la méthode des trapèzes en 1 subdivision de $[a,b]$, puis 2, puis $2^2$, ..., et on élimine les puissances de $h$ du reste $\int f - I(f)$ en utilisant un théorème d'Euler-Mac Laurin qui montre que le développement asymptotique de l'erreur en fonction de $h$ ne contient que des puissances paires de $h$). De plus, on peut être amené à faire varier le pas $h$ en fonction de la plus ou moins grande régularité de la fonction.

## 20.5 Calcul des poids $w_i$

Si la méthode d'intégration consiste à interpoler $f$ en $n$ points $x_0, ..., x_n$, alors la méthode est exacte pour tout polynôme de degré $n$. Si on prend $P_j(x) = \prod_{k\neq j}(x - x_k)$, on en déduit :

$$\int_\alpha^\beta P_j(x)\,dx = w_j P_j(x_j)$$

Par exemple en interpolant en $0, 1/2, 1$ sur $[0,1]$, on obtient

$$w_0 P_0(0) = \int_0^1 P_0(x)\,dx, \quad P_0(x) = (x-\frac{1}{2})(x-1)$$

```
P0:=(x-1)*(x-1/2); int(P0,x,0,1)/P0(x=0);
```

$$(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right), \frac{1}{6}$$

On peut aussi résoudre un système linéaire en prenant pour $f$ les polynômes de la base canonique, la matrice du système est la transposée de la matrice de Vandermonde en les $x_j$ et le second membre a pour $j$-ième composante $\int_\alpha^\beta x^j\,dx$.

```
inv(tran(vandermonde(0,1/2,1)))*[1,1/2,1/3]
```

$$\left[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right]$$

## 20.6 En résumé

Intégration sur $[a,b]$, $h$ pas d'une subdivision, $M_k$ majorant de la dérivée $k$-ième de la fonction sur $[a,b]$

| | formule | Lagrange degré | ordre | erreur |
|---|---|---|---|---|
| rectangles | (**??**), (**??**) | 0 | 0 | $M_1 h(b-a)/2$ |
| point milieu | (**??**) | 0 | 1 | $M_2 h^2(b-a)/24$ |
| trapèzes | (**??**) | 1 | 1 | $M_2 h^2(b-a)/12$ |
| Simpson | (**??**) | 2 | 3 | $M_4 h^4(b-a)/2880$ |

## 20.7 Accélération de Richardson-Romberg

**Proposition 40** *Soit $g$ une fonction de classe $C^{2k}$ sur $[a,b]$, $T_h(g)$ la valeur de la méthode des trapèzes sur $[a,b]$ de pas $h=(b-a)/N$ ($N$ entier). Alors $T_h(g)$ admet un développement en puissances paires de $h$ à l'ordre $2k$.*

Pour montrer ce résultat, il faut établir la formule d'Euler-Mac Laurin. On commence par se placer sur une subdivision de l'intervalle $[0,1]$, on intègre par parties $\int_0^1 f(t)\,dt$ en faisant apparaitre la formule des trapèzes, on intègre donc 1 en $t-\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 f(t)\,dt = [(t-\frac{1}{2})f(t)]_0^1 - \int_0^1 (t-\frac{1}{2})f'(t)\,dt = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 (t-\frac{1}{2})f'(t)\,dt$$

où encore

$$T_1(f) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 (t-\frac{1}{2})f'(t)\,dt$$

Pour poursuivre, on pose $B_1(t)=t-\frac{1}{2}$, qu'on va intégrer en $\frac{1}{2}((t-\frac{1}{2})^2+c)$, où on choisit $c$ pour que l'intégrale soit nulle, donc $c=-1/6$. On pose $B_2=(t-\frac{1}{2})^2-1/6$, on a :

$$T_1(f) = \int_0^1 f(t)\,dt + [\frac{B_2}{2}f']_0^1 - \int_0^1 \frac{B_2}{2}f''(t)\,dt$$

Plus généralement, on pose

$$B'_{p+1} = pB_p, \quad \int_0^1 B_{p+1}(t)\,dt = 0$$

ce qui définit de manière unique les $B_p$. La nullité de l'intégrale montre que $B_{p+1}(1)=B_{p+1}(0)$ ce qui simplifiera l'expression des termes tout intégrés. De plus, on montre par récurrence que les $B_p$ ont une symétrie paire ou impaire selon la parité de $p$ par rapport à $t=1/2$. Après $p$ intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} T_1(f) &= \int_0^1 f(t)\,dt + \frac{B_2(0)}{2}(f'(1)-f'(0)) + \ldots \\ &\quad + \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}(f^{[2k-1]}(1)-f^{[2k-1]}(0)) - \int_0^1 \frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{[2k]}(t)\,dt \end{aligned}$$

En faisant le même raisonnement sur $[k, k+1]$ pour $k = 1, ..., N-1$ et en sommant, on obtient la formule d'**Euler-Mac Laurin** :

$$\begin{aligned} T_1^{[0,N]}(f) &= \int_0^N f(t)\,dt + \frac{B_2(0)}{2}(f'(N) - f'(0)) + ... \\ &\quad + \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}(f^{[2k-1]}(N) - f^{[2k-1]}(0)) - \int_0^N \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{[2k]}(t)\,dt \end{aligned}$$

On pose alors $x = a + ht$ (donc $dt = dx/h$) et $f(t) = g(x)$ (donc $f'(t) = df/dt = hdg/dx$), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} T_h^{[a,b]}(g) &= \frac{1}{h}\int_0^N g(x)\,dx + \frac{B_2(0)}{2} h(g'(b) - g'(a)) + ... \\ &\quad + \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!} h^{2k-1}(g^{[2k-1]}(N) - g^{[2k-1]}(0)) - \int_0^N \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k} g^{[2k]}(x)\,\frac{1}{h}dx \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} T_h^{[a,b]}(g) &= \int_0^N g(x)\,dx + h^2 \frac{B_2(0)}{2}(g'(b) - g'(a)) + ... \\ &\quad + h^{2k} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}(g^{[2k-1]}(N) - g^{[2k-1]}(0)) - h^{2k} \int_0^N \frac{B_{2k}}{(2k)!} g^{[2k]}(x)\,dx \end{aligned}$$

L'accélération consiste à éliminer les puissances de $h^2$ en commençant par $h^2$ avec des subdivisions deux fois plus fines à chaque itération. Ainsi $T_h^1(f) = (4T_{h/2}(f) - T_h(f))/(4-1)$ n'a plus de termes en $h^2$ et tend vers l'intégrale à approcher lorsque $h$ tend vers 0. On peut d'ailleurs vérifier qu'il s'agit de la méthode de Simpson. On élimine ensuite le terme en $h^4$ en posant $T_h^2(f) = (4^2 T_{h/2}^1(f) - T_h^1(f))/(4^2-1)$ et ainsi de suite. On construit un tableau triangulaire `T` dont chaque ligne $l$ contient $T_{h/2^l}(f), T_{h/2^l}^1(f), ...$ (avec des indices qui commencent à 0). Pour calculer le terme d'indice 0 de la ligne courante on fait une méthode des trapèzes sur 2 fois plus de subdivisions que la précédente, puis pour le $j$-ième terme `T[l,j]` on effectue `(4^j*T[l-1,j-1]-T[l,j-1])/(4^j-1)` (on n'a donc besoin que de la ligne précédente pour calculer la ligne courante). On s'arrête par exemple lorsque la valeur absolue de la différence entre les derniers termes de deux lignes consécutives est inférieur à la précision souhaitée (erreur empirique).

## 20.8 Cas des fonctions périodiques.

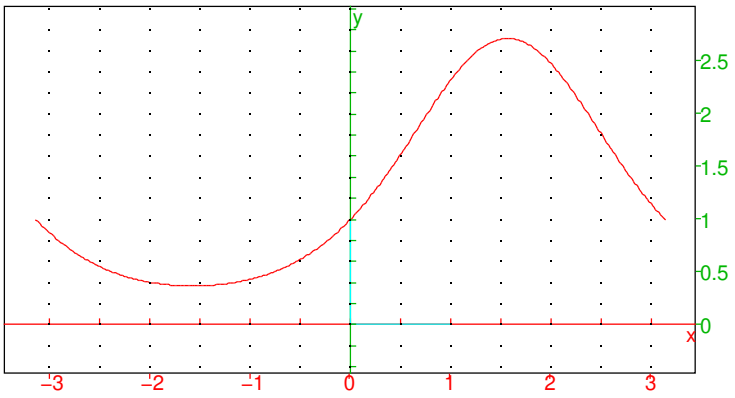
Si $f$ est une fonction périodique régulière ($C^\infty$), alors la méthode des trapèzes sur une période est d'ordre arbitrairement grand. En effet, pour une série de Fourier tronquée à l'ordre $m$, la formule des trapèzes avec $N$ subdivisions donne le résultat exact de $\int_0^T f(t)dt$ dès que $N > m$. Il suffit ensuite d'utiliser que le reste de la série de Fourier ($m > N$) a des coefficients à décroissance rapide.

La méthode des trapèzes donne donc de bons résultats pour une fonction périodique, on peut d'ailleurs aussi l'appliquer pour calculer une valeur approchée des coefficients de Fourier de la fonction. La liste des valeurs approchées obtenue est alors la transformée de Fourier discrète des valeurs de la fonction $f$ aux $N$

points de la subdivision, elle se calcule donc rapidement avec la transformée de Fourier rapide. Par exemple, pour approcher $f(x) = e^{\sin(x)}$, on peut utiliser les commandes suivantes en Xcas :

```
f(x):=exp(sin(x));
N:=16; F:=seq(f(k/N*2.*pi),k,0,N-1); G:=fft(F);
k:=4;
g:=G[0]+sum(G[j]*exp(i*j*x),j,1,k)+sum(G[N-j]*exp(-i*j*x),j,1,k);
h:=normal(re(exp2trig(g))/N);

plot(h,x=-pi..pi,color=red); //plot(f(x),x=-pi..pi
)
```




Ou directement `2*re(G[j]/N)` est une valeur approchée du $j$-ième coefficient de Fourier $a_j$ de $f$, et `-2*im(G[j]/N)` de $b_j$, par exemple :

```
1/pi*int(f(x)*cos(4x),x,0,2.*pi); 2*re(G[4]/N);
```

$$0.00547424044207, 0.00547424044313$$

```
1/pi*int(f(x)*sin(5x),x,0,2.*pi); -2*im(G[5]/N);
```

$$0.00054292631191, 0.000542926336897$$

On observe en effet une très bonne concordance.

Bien entendu, cela n'est pas très utile pour approcher $e^{\sin(x)}$ (il vaut mieux composer exponentielle et sinus), mais cela pourrait le devenir pour une fonction périodique plus compliquée ou pour une fonction périodique dont on ne connait qu'un échantillonage régulier (par exemple un fichier numérique audio).

## 20.9 Quadratures gaussiennes.

### 20.9.1 Description

On a vu que l'interpolation polynomiale était de meilleure qualité en prenant les points de Tchebyshev plutot que des points équidistants, il est donc naturel de calculer des approximations d'intégrale de cette manière ou encore d'optimiser le choix des abscisses pour avoir une méthode d'intégration d'ordre maximal.

Si on se fixe $n$ abscisses $x_1$ à $x_n$, on peut obtenir l'ordre $2n-1$. En effet, considérons le polynôme $P_n = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$, qui est de degré $n$, si la méthode est d'ordre $2n-1$ alors il sera orthogonal à tous les polynômes de degré inférieur strict à $n$ pour le produit scalaire

$$< f|g >= \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

puisque $< P_n|x^j >= \int_a^b P_n x^j$ sera combinaison linéaire des $P_n x^j$ en $x_k, k = 1..n$ (car la formule d'intégration est exacte puisque le degré du polynôme $P_n x^j$ est au plus $2n-1$). Donc $P_n$ est à une constante multiplicative près le $n$-ième polynôme orthogonal pour l'integrale sur $[a,b]$, si $[a,b] = [-1,1]$ c'est `legendre(n)`. Réciproquement, si les $x_k$ sont les racines de ce polynôme, alors la formule d'intégration est exacte, on effectue la division euclidienne du polynôme $P$ de degré au plus $2n-1$ à intégrer par $P_n$

$$P = P_n Q + R, \quad \deg(Q) \leq n-1$$

On a $\int_a^b P_n Q = 0$ par orthogonalité et la combinaison linéaire correspondante en les $x_k$ est nulle, et on a exactiture pour $R$, car de degré au plus $n-1$.

Exemple :

```
l:=proot(legendre(10));
```

$$[-0.973906528517, -0.865063366689, -0.679409568299, -0.433395394129, -0.148874338982, 0.1$$

```
f(x):=ln(1+x^2); int(f(x),x,-1.0,1.0);
```

$$x \mapsto \ln\left(1+x^2\right), 0.527887014709$$

```
p:=interp(l,f); int(p,x,-1.0,1.0)
```

$$(((((((-0.0581540739601\,(x-0.679409568299)+0.106943591296)\,(x-0.433395394129)-0.035977877397$$

### 20.9.2 Calcul des poids

On peut calculer les poids en appliquant la section **??**. On peut ainsi montrer que les poids sont positifs en appliquant la formule d'intégration au polynôme $\prod_{j\neq k}(x-x_j)$ (la formule est exacte à cause du degré du polynome). On peut d'ailleurs montrer que le poids $w_i$ en une racine du polynôme de Legendre sur $[-1,1]$ est donné par :

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)P_n'(x_i)^2} = \frac{2(1-x_i^2)}{n^2 P_{n-1}(x_i)^2} = \frac{2}{nP_{n-1}(x_i)P_n'(x_i)}$$

```
n:=10; P:=legendre(n); Q:=legendre(n-1);
 l:=proot(P);
```

$$10, \frac{46189}{256}x^{10}-\frac{109395}{256}x^8+\frac{45045}{128}x^6-\frac{15015}{128}x^4+\frac{3465}{256}x^2-\frac{63}{256}, \frac{12155}{128}x^9-\frac{6435}{32}x^7+\frac{9009}{64}x^5-\frac{1155}{32}x^3+\frac{315}{128}x, [$$

```
a:=inv(trn(vandermonde(l))):; a*seq((1+(-1
)^j)/(j+1),j,0,n-1);
```

"Done", [0.0666713443087, 0.149451349151, 0.219086362516, 0.26926671931, 0.295524224715, 0.29552422471

```
seq(2/(1-l[j]^2)/P'(x=l[j])^2,j,0,n-1)
```

[0.0666713443087, 0.149451349151, 0.219086362516, 0.26926671931, 0.295524224715, 0.295524224715, 0.269

```
seq(2*(1-l[j]^2)/n^2/Q(x=l[j])^2,j,0,n-1)
```

[0.0666713443081, 0.149451349151, 0.219086362516, 0.26926671931, 0.295524224715, 0.295524224715, 0.269

```
seq(2/n/Q(x=l[j])/P'(x=l[j]),j,0,n-1)
```

[0.0666713443084, 0.149451349151, 0.219086362516, 0.26926671931, 0.295524224715, 0.295524224715, 0.269

Preuve de la dernière formule :
On a $I(P_n/(x-x_i)) = w_i P_n'(x_i)$ la valeur de $(P_n/(x-x_i))$ en $x_i$ est par définition

de $P_n'(x_i)$ la limite $(P_n(x) - P_n(x_i))/(x - x_i)$ lorsque $x$ tend vers $x_i$ (rappelons que $P_n(x_i) = 0$). Par exactitude de la formule d'intégration

$$w_i P_n'(x_i) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n}{x - x_i} = \frac{1}{P_{n-1}(x_i)} \int_{-1}^{1} P_n \frac{P_{n-1}(x_i)}{x - x_i} = \frac{1}{P_{n-1}(x_i)} \int_{-1}^{1} P_n \frac{P_{n-1}(x)}{x - x_i}$$

la dernière égalité résulte du fait que $(P_{n-1}(x) - P_{n-1}(x_i))/(x - x_i)$ est un polynôme de degré au plus $n - 2$ donc orthogonal à $P_n$. Donc

$$w_i P_n'(x_i) == \frac{1}{P_{n-1}(x_i)} \int_{-1}^{1} P_{n-1} \frac{P_n(x)}{x - x_i}$$

Or $P_n(x)/(x - x_i)$ est un polynôme de degré $n - 1$, si on fait son quotient par $P_{n-1}$ on obtient une constante qui vaut $a_{n-1}$ en utilisant la relation de récurrence à 2 crans $P_n = (a_{n-1}x - b_{n-1})P_{n-1} - c_{n-1}P_{n-2}$. Le reste est de degré $n - 2$ donc orthogonal à $P_{n-1}$, d'où

$$w_i P_n'(x_i) == \frac{1}{P_{n-1}(x_i)} \int_{-1}^{1} P_{n-1}^2 a_{n-1}$$

On conclut en utilisant la valeur de $a_{n-1} = (2n-1)/n$ et de $\|P_{n-1}\|^2 = 2/(2(n-1)+1)$.

### 20.9.3 Erreur d'une quadrature gaussienne

On considère une quadrature gaussienne d'ordre $2n + 1$ obtenue par interpolation aux $n + 1$ racines du $n + 1$-ième polynome de Legendre sur $[-1, 1]$.

Rappelons que le polynôme d'interpolation de $f$ aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ s'écrit

$$P_n(t) = f[x_0] + f[x_0, x_1](t - x_0) + ... + f[x_0, ..., x_n](t - x_0)...(t - x_{n-1})$$

Si on ajoute $x$ on obtient un polynôme d'interpolation de degré $n + 1$

$$P_{n+1}(t) = f[x_0]+f[x_0, x_1](t-x_0)+...+f[x_0, ..., x_n, x](t-x_0)...(t-x_{n-1})(t-x_n)$$

qui coincide avec $f$ en $t = x$ donc

$$f(x) = f[x_0]+f[x_0, x_1](x-x_0)+...+f[x_0, ..., x_n, x](x-x_0)...(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

Le même calcul fait avec un point $x_{n+1}$ en plus donne

$$f(x) = f[x_0]+f[x_0, x_1](x-x_0)+...+f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}](x-x_0)...(x-x_{n-1})(x-x_n)+f[x_0, ..., x_n, x_{n+}$$

On a donc montré la formule :

$$f[x_0, ..., x_n, x] = f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}] + f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}, x](x - x_{n+1}) \quad (20.7)$$

mais en fait on va ajouter plus qu'un point, on va en ajouter $n + 1$

$$\begin{aligned} & f(x) - (f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, ..., x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1})) \\ = \quad & f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}](x - x_0)...(x - x_{n-1})(x - x_n) + ... + f[x_0, ..., x_{2n+1}](x - x_0)...(x - x_{2n}) + \end{aligned}$$

puis on intègre sur $[-1,1]$, on obtient à gauche l'erreur et à droite, seul le dernier terme est non nul, car le polynôme de Legendre proportionnel à $(x-x_0)...(x-x_{n-1})(x-x_n)$, de degré $n+1$, est orthogonal à tous les polynôme de degré $\leq n$

$$\int_{-1}^{1}(f(x)-P_n(x))\,dx=\int_{-1}^{1}f[x_0,...,x_{2n+1},x](x-x_0)...(x-x_{2n+1})\,dx$$

D'autre part, le résultat sur l'erreur d'interpolation **??** donne

$$f[x_0,...,x_n,x]=\frac{f^{[n+1]}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

en particulier $|f[x_0,...,x_n,x]|\leq M_{n+1}/(n+1)!$ D'où la majoration

$$|\int_{-1}^{1}(f(x)-P_n(x))\,dx|\leq\frac{M_{2n+2}}{(2n+2)!}\int_{-1}^{1}|(x-x_0)...(x-x_{2n+1})|\,dx$$

Il suffit ensuite de faire tendre les $x_{n+1},...,x_{2n+1}$ vers $x_0,...,x_n$ pour enlever la valeur absolue et obtenir

$$|\int_{-1}^{1}(f(x)-P_n(x))\,dx|\leq\frac{M_{2n+2}}{(2n+2)!}\int_{-1}^{1}L_{n+1}^2(x)\,dx$$

où $L_{n+1}$ est proportionnel au $n+1$-ième polynôme de Legendre de coefficient dominant 1.

Par exemple, pour $n=1$, on a 2 points d'interpolation en les racines de $L_2=x^2-1/3$ et l'erreur d'interpolation est majorée par $M_4/24\int_{-1}^{1}(x^2-1/3)\,dx=M_4/24\times 8/45=M_4/135$.

## 20.10 Méthode adaptative.

On calcule une valeur approchée de l'intégrale sur $[a,b]$ par deux quadratures gaussiennes emboitées, on estime l'erreur, si elle est supérieure à la tolérance on divise en 2. On recommence en subdivisant en 2 l'intervalle où l'erreur est maximale. On s'arrête lorsque l'erreur estimée est inférieure à la tolérance.

L'estimation de l'erreur se fait par exemple avec deux quadratures gaussiennes emboitées (c'est-à-dire que les points d'interpolation de la moins fine sont contenues dans les points d'interpolation de la plus fine, pour éviter de devoir calculer la fonction en de nouveaux points, on considére alors l'erreur sur la quadrature la moins fine comme la valeur absolue de la différence des deux valeurs). Ou avec trois quadratures emboitées, Hairer propose de prendre comme quadrature la plus fine en $h^{30}$ (15 points), intermédiaire en $h^{14}$ (avec les mêmes points sauf le point central), moins fine en $h^6$ (avec les points 1, 3, 5, 9, 11, 13), et d'estimer l'erreur par

$$\epsilon_1=|I_{30}-I_{14}|,\epsilon_2=|I_{30}-I_6|;\epsilon=\epsilon_1\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2$$

On observe en effet que $\epsilon$ est en $h^{30}$, comme l'ordre de la méthode.

## 20.11 Méthodes probabilistes.

Pour déterminer $\int_a^b f(t)\ dt$, on l'interprète comme une espérance, plus précisément comme $(b-a)E(f(X))$ où $X$ est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a,b]$, et on approche cette valeur par

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

où $x_k$ est obtenu par un générateur pseudo-aléatoire (selon la loi uniforme). Par exemple

```
f(t):=exp(-t^2); n:=1000; a:=0; b:=2.0;l:=ranv
(n,uniformd,a,b):;
```

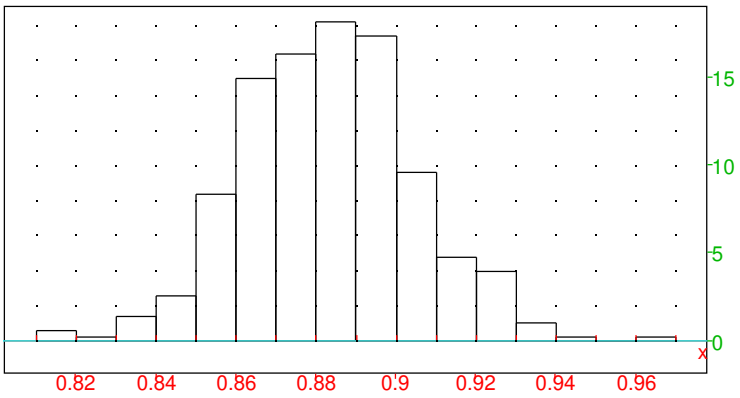
$$t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}, 1000, 0, 2.0, \text{"Done"}$$

```
(b-a)*sum(apply(f,l))/n; int(f(t),t,a,b);
```

$$0.899303633374, 0.882081390762$$

La convergence en fonction de $n$ est assez lente, on peut l'observer en faisant plusieurs estimations :

```
m:=ranm(500,n,uniformd,a,b):;I:=seq(2*sum
(apply(f,m[k]))/n,k,0,size(m)-1);
```




En effet, les tirages sont équidistribués selon la même loi, la loi des grands nombres s'applique donc : on fait $b-a$ fois une moyenne de $n$ tirages, si $n$ est grand, on converge vers une loi normale dont l'écart-type est en $(b-a)\sigma/\sqrt{n}$. La valeur de la constante $\sigma$ peut se calculer à partir de $f$

$$\sigma^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\,dt - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right)^2$$

par exemple ici

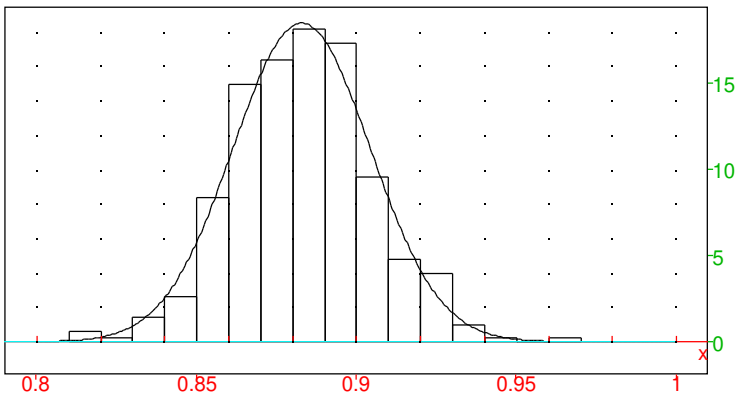
```
2*sqrt(int(f(t)^2,t,0,2.)/2-(1/2*int(f(t
),t,0,2.))^2)/sqrt(n); stddevp(I);
```

$$0.0217983295084, 0.0215045457619$$

mais on ne fait pas ce calcul en pratique (puisqu'il faudrait calculer une intégrale),

on estime l'écart-type $\sigma/\sqrt{n}$ de la loi normale par l'écart-type de l'échantillon des estimations `stddevp(I)`.

```
histogram(I,0,0.01); plot(normald(mean(I
),stddevp(I),x),x=0.8..1)
```




On peut donc obtenir rapidement une estimation de $\sigma$ en prenant l'écart-type d'une séquence de valeurs de $f$

```
f(t):=exp(-t^2); n:=1000; a:=0;  b:=2.0;l:=ranv
(n,uniformd,a,b):;
```

$$t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}, 1000, 0, 2.0, \text{"Done"}$$

```
fl:=apply(f,l):;m:=(b-a)*mean(fl);s:=(b-a
)*stddevp(fl)/sqrt(n);[m-2s,m+2s]
```

"Done", $0.909096188606, 0.0220063594927, [0.86508346962, 0.953108907591]$

Cette méthode converge donc beaucoup moins vite que les quadratures, en dimension 1. Mais elle se généralise très facilement en dimension plus grande en conservant la même vitesse de convergence alors que le travail nécessaire pour une méthode de quadrature croit comme une puissance de la dimension, et ne nécessite pas de paramétrer des domaines d'intégration compliqués (il suffit par exemple d'utiliser la méthode du rejet pour avoir un générateur uniforme dans un domaine inclus dans un cube).

# Chapitre 21

# Suites récurrentes et applications

Cette section comporte une première petite partie sur le calcul de l'expression exacte de suites récurrences (linéaires), puis une deuxième partie sur l'intérêt du calcul approché de limites de suites récurrentes (dont on ne sait en général pas déterminer l'expression générale).

## 21.1 Calcul de l'expression des suites récurrentes.

Le problème général est l'analogue discret de la recherche de solutions d'équations différentielles. On ne sait en général pas le résoudre, sauf pour certaines classes de suites, en particulier celles qui suivent une récurrence affine.

### 21.1.1 Récurrence affine

On peut toujours se ramener au cas d'une suite vectorielle dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant un récurrence à un cran :

$$v_{n+1} = Av_n + B \tag{21.1}$$

où $A$ est une matrice indépendante de $n$, et $B$ un vecteur qui peut dépendre de $n$. Par exemple pour une suite $u_n$ récurrente à deux crans

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$$

on pose $v_n = (u_n, u_{n+1})$ qui vérifie alors :

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} v_n + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

La solution générale de (**??**) est la somme de la solution de l'équation homogène $v_{n+1} = Av_n$ et d'une solution particulière, solution que l'on sait calculer lorsque $B$ est combinaison linéaire d'un produit d'exponentielle par un polynôme en $n$. L'équation homogène a pour solution $v_n = A^n v_0$, où l'expression de $A^n$ se calcule sur un corps algébriquement clos par réduction de Jordan (fonction `matpow` dans Xcas). On peut aussi utiliser un algorithme de puissance rapide pour calculer le reste de la division euclidienne de $A^n$ par un polynôme annulateur de $A$ (minimal ou caractéristique) ce qui permet de rester dans le corps des coefficients.

Le calcul d'une solution particulière dans le cas où $B = c^n P(n)$ avec $P$ un vecteur à coefficients polynomiaux de degré au plus $p$ se fait en posant $v_n =$

$c^n Q(n)$ où $Q$ est un vecteur de polynôme de degré $p$ plus la multiplicité de $c$ comme valeur propre de $A$. En effet, on doit alors résoudre :

$$v_{n+1} - Av_n = c^n(cQ(n+1) - AQ(n)) = c^n P(n)$$

soit

$$cQ(n+1) - AQ(n) = P(n) \tag{21.2}$$

Si $Q(n) = \sum_{j=0}^{q} Q_j n^j$, alors le coefficient de $n^q$ de cette équation est $(cI_d - A)Q_q = P_q$. Si $c$ n'est pas valeur propre de $A$, alors on peut calculer $Q_q$ en fonction de $P_q$ et en descendant de degré en degré on peut trouver $Q$ solution de même degré que $P$. Si $c$ est valeur propre de $A$, la résolution de cette façon est plus compliquée, il faut séparer les $Q_j$ en deux composantes, l'une sur l'espace caractéristique associé à $c$ et l'autre sur la somme des autres sous-espaces caractéristiques, ce qui peut se faire avec l'identité de Bézout, si $M$ un polynôme annulateur de $A$ est $M(x) = (x-c)^m N(x)$ où $m$ est la multiplicité de $c$ dans $M$, alors il existe $U$ et $V$ tels que $(x-c)^m U(x) + N(x)V(x) = 1$, donc

$$(A - cI)^m U(A)y + N(A)V(A)y = y$$

on a écrit $y$ comme somme de deux vecteurs, le premier dans le noyau de $N(A)$ et le second dans le noyau de $(A-cI)^m$. Pour la première composante on est ramené au cas où $c$ n'est pas valeur propre de $A$, pour la seconde composante, on jordanise puis on travaille composante par composante, pour chaque composante on aura une équation du type $c(Q(n+1) - Q(n))$ =polynôme connu, équation que l'on peut résoudre efficacement avec la base de Newton (voir section ci-dessous).

### 21.1.2 Utilisation de la base de Newton si $A = I_d$ et $c = 1$

Plutôt que d'exprimer les polynômes dans la base canonique, il est intéressant d'utiliser la base $1, n, n(n-1), n(n-1)(n-2), ..., n(n-1)...(n-p+1)$. En effet (**??**) appliqué à $Q_{k+1}n(n-1)..(n-k)$ s'écrit $Q_{k+1}((n+1) - (n-k))n(n-1)...(n-k+1) = Q_{k+1}(k+1)n(n-1)...(n-k+1)$, on obtient donc $Q_{k+1} = P_k/(k+1)$. Le calcul des coefficients $P_k$ s'effectue efficacement par l'algorithme des différences divisées à partir du polynôme $P$ et de sa valeur en 0,1,2,...,degré$(P)$.

## 21.2 Le point fixe dans $\mathbb{R}$

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $I$ (attention à bien choisir $I$ pour que l'image de $I$ par $f$ reste dans $I$). On s'intéresse à la suite

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad u_0 \in I \tag{21.3}$$

Supposons que $u_n$ converge vers une limite $l \in I$ lorsque $n \to +\infty$, alors la limite doit vérifier

$$f(l) = l$$

puisque $f$ est continue. On dit que $l$ est un point fixe de $f$. Ceci amène à l'idée d'utiliser ces suites pour résoudre numériquement l'équation $f(x) = x$. Nous allons donner un théorème permettant d'assurer que la suite (**??**) converge, et que la limite est l'unique solution de $f(l) = l$ sur $I$.

**Définition 41** *On dit que $f$ est* **contractante** *de rapport $k < 1$ sur $I$ si*

$$\forall x, y \in I, \quad |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$$

En pratique, les fonctions $f$ que l'on considèrera seront continument dérivables, donc d'après le théorème des accroissements finis

$$f(y) - f(x) = f'(\theta)(y - x), \quad \theta \in [x, y]$$

ainsi pour vérifier que $f$ est contractante, on étudie la valeur absolue de $f'$ sur $I$, il suffit de montrer que cette valeur absolue est strictement inférieure à un réel $k < 1$ pour conclure (il faut donc chercher le maximum de $|f'|$ sur $I$. Attention, il s'agit du maximum de $|f'|$ et pas du maximum de $f'$, ce qui revient à chercher le maximum de $f'$ et de $-f'$).

On a alors le

**Théorème 42** *(du* **point fixe***)*
*si $f$ est contractante de $I = [a, b]$ dans $I$ de rapport $k$ alors la suite (**??**) converge vers l'unique solution de $f(l) = l$ dans $I$. On a de plus les encadrements :*

$$|u_n - l| \leq k^n |b - a|, \quad |u_n - l| \leq \frac{|u_{n+1} - u_n|}{1 - k} \tag{21.4}$$

Démonstration : Tout d'abord si $f$ est contractante, on montre à partir de la définition de la continuité que $f$ est continue. Soit $g(x) = f(x) - x$, alors $g$ est continue, positive en $a$ et négative en $b$, il existe donc $l \in [a, b]$ tel que $g(l) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires). Soit $u_n$ une suite définie par (**??**). On a alors pour tout $n$

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l|$$

Donc par une récurrence évidente :

$$|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$$

ce qui entraine d'ailleurs que $|u_n - l| \leq k^n |a - b|$. Comme $k \in [0, 1[$, la suite géométrique $k^n$ converge vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini, donc $u_n$ tend vers $l$. Notons que $l$ est unique car si $l'$ est une autre solution alors $|l - l'| = |f(l) - f(l')| \leq k|l - l'|$ donc $(1 - k)|l - l'| \leq 0$, or $1 - k > 0$ et $|l - l'| \geq 0$ donc $|l - l'|$ doit être nul. Passons à la preuve de la majoration (**??**) qui est importante en pratique car elle donne un test d'arrêt de calcul des termes de la suite récurrente, on écrit pour $m > 0$ :

$$u_n - l = u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - u_{n+2} + ... + u_{n+m-1} - u_{n+m} + u_m - l$$

puis on majore avec l'inégalité triangulaire

$$|u_n - l| \leq \sum_{j=0}^{m-1} |u_{n+j} - u_{n+j+1}| + |u_m - l|$$

puis on applique le fait que $f$ est contractante de rapport $k$

$$|u_n - l| \leq \sum_{j=0}^{m-1} k^j |u_n - u_{n+1}| + |u_m - l|$$

soit

$$|u_n - l| \leq \frac{1-k^m}{1-k}|u_n - u_{n+1}| + |u_m - l|$$

On fait alors tendre $m$ vers l'infini d'où le résultat.

Remarque : on peut aussi (voir plus bas le point fixe en dimension $n$) montrer l'existence de la limite en montrant que $(u_n)$ est une suite de Cauchy. On peut alors faire $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ dans l'énoncé du théorème. On remarque aussi que l'existence d'un point fixe dans $[a, b]$ pour $a$ et $b$ finis ne nécessite pas la contractance de rapport $k < 1$, il suffit de préserver $[a, b]$.

Exemples : Cherchons une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par cette méthode. Il faut d'abord trouver une fonction $f$ dont $\sqrt{2}$ est un point fixe, par exemple

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

On vérifie que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2})$, puis que $f' = -1/(x+1)^2$ donc $f$ décroit. On va voir si les hypothèses du théorème du point fixe s'appliquent sur par exemple $[1, 2]$. Comme $f$ est décroissante $f([1, 2]) = [f(2), f(1)] = [4/3, 3/2]$ qui est bien inclus dans $[1, 2]$. De plus $f'$ est comprise entre $-1/(1+1)^2 = -1/4$ et $-1/(2+1)^2 = -1/9$ donc $|f'| < 1/4$, $f$ est contractante de rapport $1/4$. On peut donc itérer la suite à partir par exemple de $u_0 = 1$ et on va converger vers $\sqrt{2}$ (en s'en rapprochant à chaque cran d'un rapport inférieur à $1/4$).

Considérons l'équation en $x$

$$x - e\sin(x) = t, \quad e \in [0, 1[$$

c'est l'équation du temps utilisée en astronomie pour trouver la position d'une planète sur son orbite elliptique ($e$ étant l'excentricité de l'ellipse). Il n'y a pas de formule exacte permettant de calculer $x$ en fonction de $t$. Si on a une valeur numérique pour $t$, on peut trouver une valeur numérique approchée de $x$ par la méthode du point fixe, en réécrivant l'équation sous la forme

$$f(x) = t + e\sin(x) = x$$

On observe que $f$ envoie $\mathbb{R}$ dans $[t-e, t+e]$ donc on peut prendre $I = [t-e, t+e]$, de plus $|f'| \leq e < 1$, $f$ est contractante de rapport $e \in [0, 1[$, le théorème s'applique, il suffit de prendre une valeur initiale dans $[t-e, t+e]$ et d'itérer la suite jusqu'à obtenir la précision désirée. Par exemple si on veut une valeur approchée de $x$ à $10^{-6}$ près, il suffira que la différence entre deux termes successifs de la suite $u_n$ vérifie

$$|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-6}(1-e)$$

on aura alors bien :

$$|u_n - x| \leq \frac{|u_{n+1} - u_n|}{1-e} \leq 10^{-6}$$

Cette méthode n'est pas toujours optimale, car la vitesse de convergence vers la limite $l$ est dite "linéaire", c'est-à-dire que le temps de calcul pour avoir $n$ décimales est proportionnel à $n$ (ou encore il faut effectuer un nombre d'itérations proportionnel à $n$, chaque itération faisant gagner en précision de l'ordre du

rapport $k$ de contractance). En effet, supposons que $f'$ est continue en $l$ et que $0 < L = |f'(l)| < 1$. Il existe alors un intervalle $I = [l - \eta, l + \eta]$ tel que

$$x \in I \Rightarrow \frac{L}{2} \leq |f'(x)| \leq \frac{1+L}{2}$$

Le théorème des accroissements finis donne alors

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| = |f'(\theta)||u_n - l|, \quad \theta \in [u_n, l]$$

Si $u_0 \in I$, alors $\theta \in I$ donc $|u_1 - l| \leq |u_0 - l|$ et $u_1 \in I$, par récurrence on a pour tout $n$, $u_n \in I$

$$\frac{L}{2}|u_n - l| \leq |u_{n+1} - l| \leq \frac{1+L}{2}|u_n - l|$$

on a donc par récurrence

$$\left(\frac{L}{2}\right)^n |u_0 - l| \leq |u_n - l| \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^n |u_0 - l|$$

Donc pour avoir $|u_n - l| \leq \epsilon$ il suffit que

$$\left(\frac{1+L}{2}\right)^n |u_0 - l| \leq \epsilon \Rightarrow n \geq \frac{\ln(\frac{\epsilon}{|u_0 - l|})}{\ln(\frac{1+L}{2})}$$

et il faut que

$$\left(\frac{L}{2}\right)^n |u_0 - l| \leq \epsilon \Rightarrow n \geq \frac{\ln(\frac{\epsilon}{|u_0 - l|})}{\ln(\frac{L}{2})}$$

On peut accélerer la convergence par la méthode dite de relaxation, au lieu de résoudre $f(x) = x$, on résoud $f(x) + \alpha x = (1+\alpha)x$ soit $x = (f(x) + \alpha x)/(1+\alpha)$, on choisira alors $\alpha$ proche de $-f'(l)$.

Si $f$ est suffisamment régulière, il existe une méthode plus rapide lorsqu'on est proche de la racine ou lorsque la fonction a des propriétés de convexité, c'est la méthode de Newton (voir aussi la méthode de la sécante). Et même si Newton n'est pas applicable, une simple dichotomie peut être plus efficace si la constante de contractance est supérieure à $1/2$ (y compris prés de la solution de $f(x) = x$). Toutefois la méthode du point fixe reste intéressante si la constante de contractance est suffisamment petite (par exemple $k = 0.1$ garantit 15 décimales en 15 itérations) et présente l'avantage de se généraliser en dimension plus grande, cf. la section suivante.

## 21.3 Le point fixe dans $\mathbb{R}^n$

Le théorème précédent se généralise.

**Théorème 43** *Soit $I$ un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ (ou d'un espace métrique complet) tel que $f$ envoie $I$ dans $I$ et tel que $f$ soit contractante sur $I$*

$$\exists k < 1, \forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

*Alors pour tout $u_0 \in I$, la suite $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique solution dans $I$ de $f(l) = l$.*

La démonstration de la convergence est un peu différente de celle donnée en dimension 1, on montre que $(u_n)$ est une suite de Cauchy, car pour $n > m$

$$|u_n - u_m| \leq \sum_{j=m}^{n-1} |u_{j+1} - u_j| \leq k^m \frac{1}{1-k} |u_1 - u_0|$$

donc $(u_n)$ est convergente puisque nous sommes dans un fermé d'un espace complet. (Cela permet d'ailleurs de généraliser l'énoncé donné en dimension 1 au cas où $a$ ou $b$ est infini).

La vitesse de convergence est linéaire, la démonstration est identique à celle de la dimension 1.

Remarque :

— L'existence d'un point fixe sans hypothèse de contractance se généralise si $I$ est un convexe compact préservé par $f$ (théorème de Brouwer ou de Schauder).

— Pour vérifier les hypothèses du théorème dans $\mathbb{R}^n$, il suffit de montrer que dans $I$ la norme triple de $f'$ subordonnée à la norme choisie dans $\mathbb{R}^n$ est inférieure à $k < 1$. Pour $f$ linéaire, cela revient à calculer une norme subordonnée de matrice et donne lieu à des méthodes itératives alternatives à l'inversion de matrice, cf. la section **??**.

— l'algorithme de recherche PageRank de google utilise le point fixe, en très grande dimension : $n$ est le nombre de pages Web, $I$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont positives ou nulles et dont la somme des coordonnées vaut 1, $f$ est la somme d'un vecteur constant et du produit du vecteur $x$ par une matrice $A$ transposée d'une matrice stochastique.

## 21.4 La méthode de Newton dans $\mathbb{R}$.

La méthode de Newton est une méthode de résolution de l'équation $f(x) = 0$, attention à la différence avec le théorème du point fixe qui permet de résoudre numériquement $f(x) = x$. Si $x_0$ est proche de la racine $r$ on peut faire un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $f$ en $x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + O((x - x_0)^2)$$

Pour trouver une valeur approchée de $r$, on ne garde que la partie linéaire du développement, on résout :

$$f(r) = 0 \approx f(x_0) + (r - x_0) f'(x_0)$$

donc (si $f'(x_0) \neq 0$) :

$$r \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Graphiquement, cela revient à tracer la tangente à la courbe représentative de $f$ et à chercher où elle coupe l'axe des $x$. On considère donc la suite récurrente définie par une valeur $u_0$ proche de la racine et par la relation :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

Il y a deux théorèmes importants, l'un d'eux prouve que si $u_0$ est "assez proche" de $r$ alors la suite $u_n$ converge vers $r$, malheureusement il est difficile de savoir en pratique si on est "assez proche" de $u_0$ pour que ce théorème s'applique. Le second théorème donne un critère pratique facile à vérifier qui assure la convergence, il utilise les propriétés de convexité de la fonction.

**Théorème 44** *Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ (2 fois continument dérivable) sur un intervalle fermé $I$. Soit $r$ une racine simple de $f$ située à l'intérieur de $I$ (telle que $f(r) = 0$ et $f'(r) \neq 0$). Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que la suite définie par*

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}, \quad |u_0 - r| \leq \varepsilon$$

*converge vers $r$.*

*Si on a $|f''| \leq M$ et $|1/f'| \leq m$ sur un intervalle $[r-\eta, r+\eta]$ contenu dans $I$, alors on peut prendre tout réel $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 2/(mM)$ et $\varepsilon \leq \eta$.*

**Démonstration** : on a

$$u_{n+1} - r = u_n - r - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = \frac{(u_n - r)f'(u_n) - f(u_n)}{f'(u_n)}$$

En appliquant un développement de Taylor de $f$ en $u_n$ à l'ordre 2, on obtient pour un réel $\theta$ situé entre $r$ et $u_n$ :

$$0 = f(r) = f(u_n) + (r - u_n)f'(u_n) + (r - u_n)^2 \frac{f''(\theta)}{2}$$

donc :

$$(u_n - r)f'(u_n) - f(u_n) = (u_n - r)^2 \frac{f''(\theta)}{2}$$

d'où :

$$|u_{n+1} - r| \leq |u_n - r|^2 \frac{1}{|f'(u_n)|} \frac{|f''(\theta)|}{2}$$

On commence par choisir un intervalle $[r-\varepsilon, r+\varepsilon]$ contenant strictement $r$ et tel que $|f''| < M$ et $|1/f'| < m$ sur $[r-\varepsilon, r+\varepsilon]$ (c'est toujours possible car $f''$ et $1/f'$ sont continues au voisinage de $r$ puisque $f'(r) \neq 0$). Si $u_n$ est dans cet intervalle, alors $\theta$ aussi donc

$$|u_{n+1} - r| \leq |u_n - r|^2 \frac{Mm}{2} \leq \frac{|u_n - r|Mm}{2} |u_n - r|, \tag{21.5}$$

On a $|u_n - r| \leq \varepsilon$, on diminue si nécessaire $\varepsilon$ pour avoir $\varepsilon < 2/(Mm)$, on a alors :

$$|u_{n+1} - r| \leq k|u_n - r|, \quad k = \frac{\varepsilon Mm}{2} < 1$$

donc d'une part $u_{n+1}$ est encore dans l'intervalle $[r-\varepsilon, r+\varepsilon]$ ce qui permettra de refaire le même raisonnement au rang suivant, et d'autre part on a une convergence au moins géométrique vers $r$. En fait la convergence est bien meilleure lorsqu'on est proche de $r$ grace au carré dans $|u_n - r|^2$, plus précisément, on montre par récurrence que

$$|u_n - r| \leq |u_0 - r|^{2^n} \left(\frac{Mm}{2}\right)^{2^n - 1}$$

il faut donc un nombre d'itérations proportionnel à $\ln(n)$ pour atteindre une précision donnée.

**Remarque :** ce théorème se généralise sur $\mathbb{C}$ et même sur $\mathbb{R}^n$ (cf. la section suivante).

**Exemple :** pour calculer $\sqrt{2}$, on écrit l'équation $x^2 - 2 = 0$ qui a $\sqrt{2}$ comme racine simple sur $I = [1/2, 2]$, on obtient la suite récurrente

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n}$$

Si on prend $\eta = 1/2$, on a $f' = 2x$ et $f'' = 2$ donc on peut prendre $M = 2$ et $m = 1$ car $|1/f'| \leq 1$ sur $[\sqrt{2} - 1/2, \sqrt{2} + 1/2]$. On a $2/(mM) = 1$, on peut donc prendre $\varepsilon = 1/2$, la suite convergera pour tout $u_0 \in [\sqrt{2} - 1/2, \sqrt{2} + 1/2]$.

Plus généralement, on peut calculer une racine $k$-ième d'un réel $a$ en résolvant $f(x) = x^k - a$ par la méthode de Newton.

L'inconvénient de ce théorème est qu'il est difficile de savoir si la valeur de départ qu'on a choisie se trouve suffisamment près d'une racine pour que la suite converge. Pour illustrer le phénomène, on peut par exemple colorer les points du plan complexe en $n + 1$ couleurs selon que la suite définie par la méthode de Newton converge vers l'une des $n$ racines d'un polynôme de degré $n$ fixé au bout de par exemple 50 itérations (la $n + 1$-ième couleur servant aux origines de suite qui ne semblent pas converger).

Passons maintenant à un critère très utile en pratique :

**Définition 45** *(**convexité**)*
*Une fonction $f$ continument dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ est dite convexe si son graphe est au-dessus de la tangente en tout point de $I$.*

Il existe un critère simple permettant de savoir si une fonction de classe $C^2$ est convexe :

**Théorème 46** *Si $f$ est $C^2$ et $f'' \geq 0$ sur $I$ alors $f$ est convexe.*

**Démonstration** :
L'équation de la tangente au graphe en $x_0$ est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Soit

$$g(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$$

on a :

$$g(x_0) = 0, \quad g'(x) = f'(x) - f'(x_0), \quad g'(x_0) = 0, \quad g'' = f'' \geq 0$$

donc $g'$ est croissante, comme $g'(x_0) = 0$, $g'$ est négative pour $x < x_0$ et positive pour $x > x_0$, donc $g$ est décroissante pour $x < x_0$ et croissante pour $x > x_0$. On conclut alors que $g \geq 0$ puisque $g(x_0) = 0$. Donc $f$ est bien au-dessus de sa tangente.

On arrive au deuxième théorème sur la méthode de Newton

**Théorème 47** *Si $f(r) = 0, f'(r) > 0$ et si $f'' \geq 0$ sur $[r, b]$ alors pour tout $u_0 \in [r, b]$ la suite de la méthode de Newton*

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)},$$

*est définie, décroissante, minorée par $r$ et converge vers $r$. De plus*

$$0 \leq u_n - r \leq \frac{f(u_n)}{f'(r)}$$

*(On prendra garde dans cette estimation aux erreurs en calcul approché, le calcul de la valeur de $f(u_n)$, proche de 0, va typiquement faire intervenir la différence de deux termes très proches, d'où perte de précision sur la mantisse)*

**Démonstration** :
On a $f'' \geq 0$ donc si $f'(r) > 0$ alors $f' > 0$ sur $[r, b]$, $f$ est donc strictement croissante sur $[r, b]$ on en déduit que $f > 0$ sur $]r, b]$ donc $u_{n+1} \leq u_n$. Comme la courbe représentative de $f$ est au-dessus de la tangente, on a $u_{n+1} \geq r$ (car $u_{n+1}$ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente avec l'axe des $x$). La suite $u_n$ est donc décroissante minorée par $r$, donc convergente vers une limite $l \geq r$. À la limite, on a

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)} \Rightarrow f(l) = 0$$

donc $l = r$ car $f > 0$ sur $]r, b]$.

Comme $(u_n)$ est décroissante, on a bien $0 \leq u_n - r$, pour montrer l'autre inégalité, on applique le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in [r, u_n]$ tel que

$$f(u_n) - f(r) = (u_n - r)f'(\theta)$$

comme $f(r) = 0$, on a

$$u_n - r = \frac{f(u_n)}{f'(\theta)}$$

et la deuxième inégalité du théorème en découle parce que $f'$ est croissante.

**Variantes** :
Il existe des variantes, par exemple si $f'(r) < 0$ et $f'' \geq 0$ sur $[a, r]$. Si $f'' \leq 0$, on considère $g = -f$.

**Application** :
On peut calculer la valeur approchée de la racine $k$-ième d'un réel $a > 0$ en appliquant ce deuxième théorème. En effet si $a > 0$, alors $x^k - a$ est 2 fois continument dérivable et de dérivée première $kx^{k-1}$ et seconde $k(k-1)x^{k-2}$ strictement positives sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car $k \geq 2$). Il suffit donc de prendre une valeur de départ $u_0$ plus grande que la racine $k$-ième, par exemple $1 + a/k$ (en effet $(1 + a/k)^k \geq 1 + ka/k = 1 + a$). En appliquant l'inégalité du théorème, on a :

$$0 \leq u_n - \sqrt[k]{a} \leq \frac{u_n^k - a}{k\sqrt[k]{a}^{k-1}} \leq \frac{u_n^k - a}{ka}\sqrt[k]{a} \leq \frac{u_n^k - a}{ka}(1 + \frac{a}{k})$$

Pour avoir une valeur approchée de $\sqrt[k]{a}$ à $\varepsilon$ près, on peut donc choisir comme test d'arrêt

$$u_n^k - a \leq \frac{ka}{1 + \frac{a}{k}}\varepsilon$$

Par exemple pour $\sqrt{2}$, le test d'arrêt serait $u_n^2 - 2 \leq 2\varepsilon$.

## 21.5 La méthode de Newton dans $\mathbb{R}^n$.

Le premier énoncé du cas de la dimension 1 se généralise en :

**Théorème 48** *Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ (2 fois continument dérivable) sur un fermé $I$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $r$ une racine simple de $f$ située à l'intérieur de $I$ (telle que $f(r) = 0$ et $f'(r) = (\partial_j f_i)(r)$ inversible). Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que la suite définie par*

$$u_{n+1} = u_n - (f'(u_n))^{-1} f(u_n), \quad |u_0 - r| \leq \varepsilon$$

*converge vers $r$.*

*Si on a $|f''| \leq M$ et $|(f')^{-1}| \leq m$ sur une boule centré en $r$ de rayon $\eta > 0$ contenue dans $I$, alors on peut prendre tout réel $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 2/(mM)$ et $\varepsilon \leq \eta$.*

La démonstration est calquée sur la dimension 1, mais il faut prendre le reste intégral dans la formule de Taylor

$$u_{n+1} - r = u_n - r - f'(u_n)^{-1} f(u_n) = f'(u_n)^{-1}(f'(u_n)(u_n - r) - f(u_n))$$

puis on applique Taylor le long du segment $[r, u_n]$ :

$$0 = f(r) = f(u_n) + f'(u_n)(r - u_n) + \int_0^1 (1-\theta)(r-u_n) f''(r + \theta(u_n - r))(r - u_n)\, d\theta$$

donc :

$$u_{n+1} - r = -f'(u_n)^{-1}(r - u_n) \left( \int_0^1 (1-\theta) f''(r + \theta(u_n - r))\, d\theta \right) (r - u_n)$$

et on en déduit (**??**) et on conclut de même en remplaçant intervalle centré en $r$ de rayon $\varepsilon$ par boule de rayon $\varepsilon$.

Remarque : la convergence "numérique" (au sens du calcul en flottant) de la suite $u_n$ ne suffit pas à montrer l'existence d'une racine proche de $u_n$. Une méthode de preuve alternative au calcul des constantes $m$ et $M$ consiste à trouver un rectangle ou une boule autour de $u_n$ préservée par l'application $x \to x - f'(x)^{-1} f(x)$.

## 21.6 Calcul approché des racines complexes simples

La section précédente nous a montré qu'on pouvait se ramener à la recherche de racines simples, ce qui donne envie d'essayer la méthode de Newton. On a malheureusement rarement la possibilité de pouvoir démontrer qu'à partir d'une valeur initiale donnée, la méthode de Newton converge, parce que les racines peuvent être complexes, et même si elles sont réelles, on n'a pas forcément de résultat sur la convexité du polynôme (cf. cependant une application des suites de Sturm qui permet de connaitre le signe de $P''$ sur un intervalle sans le factoriser).

Par contre, on peut montrer à postériori des estimations sur la distance entre une racine approchée et la racine la plus proche d'un polynôme, plus précisément cette distance est inférieure ou égale au degré du polynôme multiplié par le module de $P/P'$ en la racine approchée (**??**).

On effectue donc souvent des itérations de Newton, en partant de 0.0, en espérant s'approcher suffisamment d'une racine pour que le théorème de convergence théorique s'applique. On se fixe un nombre maximal d'itérations, si on le dépasse on prend alors une valeur initiale aléatoire complexe et on recommence.

Une fois une racine déterminée, on l'élimine en calculant le quotient euclidien $Q$ de $P$ par $X - r$ (par l'algorithme de Horner), puis on calcule les racines du quotient $Q$ (qui sont des racines de $P$).

Un problème pratique apparait alors, c'est que $r$ n'est pas exact donc le quotient $Q$ non plus, au fur et à mesure du calcul des racines de $P$, on perd de plus en plus de précision. Il existe une amélioration simple, si $r'$ est une racine approchée de $Q$, alors elle est racine approchée de $P$ et on a toutes les chances qu'elle soit suffisamment proche d'une racine de $P$ pour que le théorème s'applique, on effectue alors 1 ou 2 itérations de Newton avec $r'$ mais pour $P$ (et non $Q$) afin d'améliorer sa précision comme racine de $P$.

Une méthode de calcul plus stable utilise la recherche des valeurs propres de la matrice companion en double précision, puis affine par la méthode de Newton pour obtenir des valeurs approchées multi-précision, c'est ce que fait `proot`, par exemple `proot(x^3+x+1,50)`. Il existe aussi un algorithme de recherche de racines dû à Schönhage dont la convergence est garantie, cet algorithme est implémenté dans PARI (voir la thèse de Xavier Gourdon et l'article Splitting circle method de Wikipedia) et est appelé par Xcas pour des polynômes mals conditionnés.

Enfin, on peut appliquer directement la méthode de Newton pour trouver dans $\mathbb{C}^n$ toutes les racines simultanément, c'est la méthode de **Durand-Kerner, Weierstrass**. On pose $g_x(z) = \prod_{i=1}^{n}(x - z_i)$, il s'agit de résoudre en $z$ $g_x(z) = P(x)$. On a a l'ordre 1 en $z$

$$g_x(z + w) = g_x(z) - \sum_{i=1}^{n} w_i \prod_{j\neq i}(x - z_j) + O(w^2) = P(x)$$

pour trouver $w_i$, on pose $x = z_i$, on obtient

$$-\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)w_i = P(z_i)$$

donc

$$w_i = -\frac{P(z_i)}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)}$$

On peut aussi calculer le produit du dénominateur en effectuant $g'_x(z_i)$ (la dérivée porte sur $x$). On retrouve la méthode de Newton à une variable où la dérivée du polynôme au dénominateur est remplacée par la valeur approchée du polynôme. D'où le programme

```
dw(P,N,eps):={ // Weierstrass, Durand-Kerner polynomial rooter
  local l,v,w,n,j,k,q,q1;
  P:=P/lcoeff(P);
  n:=degree(P);
  assume(l,symbol);
  v:=seq(exp(i*l/n*2.0*pi),l,0,n-1); w:=v;
```

```
  for k from 1 to N do
    q:=pcoeff(v);
    q1:=q';
    for j from 0 to n-1 do
      w[j]:=v[j]-horner(P,v[j])/horner(q1,v[j]);
    od;
    if (l2norm(w-v)<eps*l2norm(v))
      return w;
    v:=w;
  od;
  retourne "max iter reached";
}:;
```

Par exemple `dw(x^3+x+1,100,1e-10)` renvoie des valeurs approchées des racines de $x^3 + x + 1$.

Si on s'intéresse seulement à la racine de module maximal d'un polynôme, on peut en trouver une estimation assez simplement en appliquant la méthode de la puissance à la matrice companion du polynôme. On peut améliorer la précision d'une racine par des itérations inverses ou par la méthode de Newton en une variable.

## 21.7 Méthodes de gradient (sans contrainte)

Il s'agit ici de minimiser une fonction $f$ d'un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Lorsque la fonction $f$ est suffisamment régulière sur $U$, une condition nécessaire en un extremum local de l'ouvert est que la différentielle $df$ s'annulle. Réciproquement, la recherche d'une solution de $f(x) = 0$ peut se ramener à minimiser $\|f\|^2$. Les méthodes de gradient en dimension 2 peuvent se comprendre à partir de la représentation des lignes de niveau de la fonction. Le long de la tangente à une ligne de niveau $f$ reste constant (la tangente est dans le noyau de $df$), si on est en un point $v$ de la ligne de niveau, intuitivement suivre la direction perpendiculaire à la ligne de niveau devrait permettre de faire diminuer $f$ efficacement, c'est la ligne de plus grande pente choisie par l'eau pour s'écouler vers le bas le plus rapidement possible. Ceci n'est toutefois pas intrinsèque mais dépendant du produit scalaire choisi, toutefois si on ne choisit pas la direction du gradient, on choisira une direction de descente $w$ telle que $d_v f(w) < 0$. Pour le gradient on a bien

$$d_v f(-\nabla f) = - < \nabla f | \nabla f > < 0$$

Une fois la direction de descente choisie, il faut déterminer quelle distance parcourir dans cette direction, c'est le pas $\rho$ et le nouveau $v$ s'obtient par la formule

$$\tilde{v} = v + \rho w = v - \rho \nabla_v f$$

pour la méthode de gradient. Plusieurs choix sont possibles pour $\rho$

- $\rho$ est fixé une fois pour toutes, c'est le gradient à pas constant, le cout d'une itération est minimal.
- on détermine $\rho$ pour minimiser $f$ le long de la direction, c'est le gradient à pas optimial, le cout d'une iteration peut être important car il faut minimiser une fonction d'une variable

— on détermine $\rho$ pour faire diminuer $f$ un peu et $\|\nabla f\|$ suffisamment pour assurer la convergence. Les conditions de Wolfe permettent de préciser ces objectifs. Pour $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$ fixés (par exemple $\varepsilon_1 = 1e{-}4, \varepsilon_2 = 0.99$)

$$\begin{aligned} f(v+\rho w) &\leq f(v) + \varepsilon_1 \rho d_v f(w), \\ 0 \leq -d_{v+\rho w} f(w) &\leq -\varepsilon_2 d_v f(w) \end{aligned}$$

**Proposition 49** *Les conditions de Wolfe permettent d'assurer la convergence d'une suite itérative $v_{k+1} = v_k + \rho_k w_k$ si la direction de descente est "suffisante", plus précisément si $f$ est $C^1$ de dérivée lipschitizienne et bornée inférieurement, si on pose*

$$\cos(\theta_k) = \frac{< \nabla f(v_k) | w_k >}{\|\nabla f(v_k)\| \|w_k\|}$$

*alors la série $\sum \cos(\theta_k)^2 \|\nabla f(v_k)\|^2$ converge. Ainsi si la direction de descente forme un angle minimal avec la tangente à la courbe de niveau (en dimension 2), $\cos(\theta_k)^2$ est borné indépendamment de $k$ et $\sum \|\nabla f(v_k)\|^2$ est convergente donc le gradient de $f$ tend vers 0.*

Preuve : on a avec la deuxième condition de Wolfe

$$< \nabla f(v_{k+1}) | w_k >= d_{v_{k+1}} f(w_k) \geq \varepsilon_2 d_{v_k} f(w_k) = \varepsilon_2 < \nabla f(v_k) | w_k >$$

donc

$$< \nabla f(v_{k+1}) - \nabla f(v_k) | w_k > \geq (\varepsilon_2 - 1) < \nabla f(v_k) | w_k >$$

Par Cauchy-Schwartz et en notant $M_2$ la constante de Lipschitz de $\nabla f$ le membre de gauche est plus petit que

$$\|\nabla f(v_{k+1}) - \nabla f(v_k)\| \|w_k\| \leq M_2 \|v_{k+1} - v_k\| \|w_k\| = M_2 \rho_k \|w_k\|^2$$

Donc

$$(\varepsilon_2 - 1) < \nabla f(v_k) | w_k > \leq M_2 \rho_k \|w_k\|^2 \tag{21.6}$$

On considère ensuite la série de terme général $f(v_k) - f(v_{k+1})$ qui est à terme positif, donc convergente (elle ne peut tendre vers l'infini car $f$ est bornée inférieurement). La première condition de Wolfe donne

$$f(v_k) - f(v_{k+1}) \ \geq \ \varepsilon_1 \rho_k < -\nabla f(v_k) | w_k >$$

puis (**??**) :

$$f(v_k) - f(v_{k+1}) \geq \ \varepsilon_1 (1 - \varepsilon_2) < \nabla f(v_k) | w_k >^2 \ \frac{1}{M_2 \|w_k\|^2} \geq 0$$

d'où le résultat.

L'existence de pas de Wolfe se montre en considérant le max $r$ des pas vérifiant la première condition de Wolfe

$$f(v + \rho w) \leq f(v) + \varepsilon_1 \rho d_v f(w)$$

C'est bien un max si la fonction $f$ est bornée inférieurement. On a alors l'égalité pour le pas $r$ (par passage à la limite des deux cotés de $r$)

$$f(v + rw) = f(v) + \varepsilon_1 r d_v f(w)$$

et l'inégalité dans l'autre sens pour un pas $\rho > r$

$$f(v + \rho w) > f(v) + \varepsilon_1 \rho d_v f(w)$$

Donc

$$f(v + \rho w) - f(v + rw) > \varepsilon_1 d_v f(w)(\rho - r)$$

A la limite lorsque $\rho$ tend vers $r$, on a :

$$d_{v+rw} f(w) \geq \varepsilon_1 d_v f(w) \Rightarrow -d_{v+rw} f(w) \leq \varepsilon_1 (-d_v f(w))$$

et comme $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ on vérifie la deuxième condition de Wolfe.

La recherche d'un pas de Wolfe peut se faire par dichotomie. On initialise $s_-, s_+, s = 0, +\infty$,estimation initiale. Puis on fait une boucle

1. On teste si $s$ vérifie la première condition de Wolfe :
2. Si c'est le cas, on teste la deuxième condition de Wolfe
   (a) si la deuxième condition est vérifiée, on renvoie $s$ qui est un pas de Wolfe.
   (b) Sinon on pose $s_- = s$ et ($s = 2s$ si $s = +\infty$ ou $s = (s_- + s_+)/2$ si $s_+ \neq +\infty$).
3. Si ce n'est pas le cas, $s$ est trop grand, on pose donc $s_+ = s$, et $s = (s_- + s_+)/2$ et on reéssaie.

Cette dichotomie est couteuse car exécutée à chaque itération de la descente, on peut l'accélérer en interpolant $f(v + sw)$ (par exemple par un polynôme de Lagrange/Hermite de degré 3 en 0,0,$s$, $s$).

# Chapitre 22

# Algèbre linéaire

On présente ici des algorithmes autour de la résolution exacte et approchée de systèmes (réduction des matrices sous forme échelonnée) et la recherche de valeurs propres et de vecteurs propres (diagonalisation et jordanisation des matrices).

## 22.1 Résolution de systèmes, calcul de déterminant.

### 22.1.1 La méthode du pivot de Gauß.

— Le pivot : on détermine à partir d'une ligne $i$ la ligne $j$ où apparait le premier coefficient non nul $p$ dans la colonne à réduire. On échange les lignes $i$ et $j$. Puis pour $j > i$ (réduction sous-diagonale) ou $j \neq i$ (réduction complète), on effectue l'opération $L_j \leftarrow L_j - \frac{p_j}{p} L_i$.
Inconvénient : avec des données exactes de taille non bornée, la complexité des coefficients augmente plus vite qu'en choisissant le pivot le plus simple possible, (remarque, lorsque les données sont approchées, on n'utilise pas non plus cette méthode pour des raisons de stabilité numérique). Le domaine d'utilisation naturel concerne donc les coefficients dans un corps fini (par exemple $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

— Le pivot partiel. On choisit le meilleur coefficient non nul de la colonne, où meilleur dépend du type de coefficient : avec des données exactes, on choisirait le coefficient de taille la plus petite possible, avec des données approximatives, on choisit le coefficient de plus grande norme dans la colonne. Le domaine d'utilisation naturel concerne les coefficients approchés. Pour les coefficients exacts, on remplacerait la réduction par $L_j \leftarrow pL_j - p_j L_i$ pour ne pas effectuer de division. Mais avec cette méthode, la taille des coefficients augmente de manière exponentielle. On peut améliorer la taille des coefficients intermédiaires en divisant chaque ligne par le PGCD de ses coefficients, mais comme pour le calcul du PGCD par l'algorithme du sous-résultant, il existe une méthode plus efficace présentée ci-dessous.

— La méthode de **Bareiss** : on initialise un coefficient $b$ à 1. On remplace l'étape de réduction ci-dessus par $L_j \leftarrow (pL_j - p_j L_i)/b$. À la fin de l'étape de réduction, on met le coefficient $b$ à la valeur du pivot $p$. L'intérêt de la méthode est que la division se fait sans introduire de fraction (la preuve pour les deux premières étapes se fait facilement à la main ou avec un

système de calcul formel (cf. infra), pour le cas général, on vérifie que le déterminant de la matrice de départ est égal au dernier coefficient sur la diagonale obtenu par cette méthode de réduction, ce dernier est donc entier, le même raisonnement fait sur des sous-matrices dont on prend les $k$ premières lignes et colonnes et une autre ligne et une autre colonne montre que tous les coefficients des matrices intermédiaires sont entiers). On peut utiliser cette méthode aussi bien pour la réduction sous-diagonale que pour la réduction complète (les lignes intervenant dans la combinaison linéaire subissent des modifications identiques dans les deux cas).

Vérifions qu'on n'introduit pas de dénominateur dans la méthode de Bareiss. Sans restreindre la généralité, il suffit de le montrer avec une matrice 3x3 à coefficients symboliques génériques.

```
Pivot(M,n,m,r):={
 // n ligne du pivot, m colonne, r ligne a modifier
 local COL,j,a,b;
 COL:=ncols(M);
 a:=M[n,m];
 b:=M[r,m];
 for j from 0 to COL-1 do
   // afficher(j,a,b,n,m,r);
   M[r,j]:=a*M[r,j]-b*M[n,j];
 end_for;
 return(M);
}:;
M:=matrix(3,3,[[A,B,C],[D,E,F],[G,H,J]]);
M:=Pivot(M,0,0,1); M:=Pivot(M,0,0,2); /* 1ere colonne */
M:=Pivot(M,1,1,2); M:=Pivot(M,1,1,0); /* 2eme colonne */
factor(M[2,2]);
```

Ce qui met bien en évidence le facteur $A$ dans $M_{3,3}$.

### 22.1.2 Le déterminant.

On peut bien sûr appliquer les méthodes ci-dessus en tenant compte des pivots utilisés et du produit des coefficients diagonaux. Dans le cas de la méthode de Bareiss, si on effectue la réduction sous-diagonale uniquement, il n'est pas nécessaire de garder une trace des pivots et de calculer le produit des coefficients diagonaux, montrons que la valeur du déterminant est égal au dernier coefficient diagonal : en effet si $R$ désigne la matrice réduite et que l'on pose $R_{0,0} = 1$, alors la réduction par la méthode de Bareiss de la colonne $i$ a pour effet de multiplier le déterminant de la matrice initiale $M$ par $(R_{i,i}/(R_{i-1,i-1})^{n-i}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\det(R) &= \det(M) \prod_{i=1}^{n-1} (R_{i,i}/(R_{i-1,i-1})^{n-i} \\
\prod_{i=1}^{n} R_{i,i} &= \det(M) \prod_{i=1}^{n-1} R_{i,i} \\
R_{n,n} &= \det(M)
\end{aligned}$$

Pour les matrices à coefficients entiers, on peut aussi utiliser une méthode **modulaire** : on calcule une borne à priori sur le déterminant et on calcule le déterminant modulo suffisamment de petits nombres premiers pour le reconstruire par les restes chinois. En effet si le produit des nombres premiers utilisés est supérieur au double d'un majorant de la valeur absolue du déterminant, alors le déterminant est le résultat des restes chinois écrit en représentation symétrique. L'avantage de cet algorithme est qu'il est simple et facile à paralléliser.

On utilise souvent la **borne d'Hadamard** sur le déterminant :

$$|\det(M)| \leq \prod_{1\leq i\leq n} \sqrt{\sum_{1\leq j\leq n} |m_{i,j}|^2}$$

Preuve de la borne : on majore le déterminant par le produit des normes des vecteurs colonnes de $M$.

L'algorithme de calcul modulaire du déterminant d'une matrice bornée de taille $n$ est en $O(n^4 \ln(n))$ opérations, en effet chaque calcul modulaire nécessite $O(n^3)$ opérations, et il faut $O(n \ln(n))$ nombres premiers d'une taille donnée (par exemple 31 bits) pour dépasser le double de la borne de Hadamard (on montre facilement que la norme euclidienne d'une colonne de $A$ est $\leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$, on en prend la puissance $n$-ième). C'est meilleur que la méthode de Bareiss, qui est en $O(n^5 \ln(n)^2$ (avec multiplication naïve des entiers). En effet lors de la réduction de la $k$-ième colonne, on manipule des entiers qui sont des mineurs de taille $k$ donc de taille $O(k \ln(k))$, d'où une complexité en $O(\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2(k \ln(k))^2)$. Mais la méthode de Bareiss fonctionne dans bien d'autres situations, par exemple si les coefficients sont des polynômes.

**Remarque** :
Si on veut juste prouver l'inversibilité d'une matrice à coefficients entiers, il suffit de trouver un nombre premier $p$ tel que le déterminant de cette matrice modulo $p$ soit non nul.

**Développement par rapport à une ligne ou une colonne**
On a tendance à oublier ce type de méthode car le développement complet du déterminant (faisant intervenir une somme sur toutes les permutations du groupe symétrique) nécessite d'effectuer $n!$ produits de $n$ coefficients et $n!$ additions ce qui est gigantesque. Or on peut "factoriser" une partie des calculs et se ramener à $n.2^n$ opérations élémentaires au lieu de $n.n!$. Remarquons aussi que le nombre d'opérations élémentaires n'a guère de sens si on ne tient pas compte de la complexité des expressions, l'avantage principal de la méthode de développement étant d'éviter d'effectuer des divisions.

**Calcul du déterminant par développement de Laplace**
On calcule d'abord tous les mineurs 2x2 des colonnes 1 et 2 que l'on place dans une table de mineurs, puis on calcule les mineurs 3x3 des colonnes 1 à 3 en développant par rapport à la colonne 3 et en utilisant les mineurs précédents, puis les mineurs 4x4 avec les mineurs 3x3, etc.. On évite ainsi de recalculer plusieurs fois les mêmes mineurs. Cf. par exemple l'implémentation en C++ dans giac/xcas (`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html`) qui utilise le type générique `map<>` de la librairie standard C++ (STL) pour stocker les tables de mineurs (fonction `det_minor` du fichier `vecteur.cc`).
Nombre d'opérations élémentaires : il y a $\binom{n}{2}$ mineurs d'ordre 2 à calculer nécessitant chacun 2 multiplications (et 1 addition), puis $\binom{n}{3}$ mineurs d'ordre 3 nécessi-

tant 3 multiplications et 2 additions, etc. donc le nombre de multiplications est de $2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+...+n\binom{n}{n}$, celui d'additions est $\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+...+(n-1)\binom{n}{n}$ soit un nombre d'opérations élémentaires majoré par $n.2^n$.

On observe "expérimentalement" que cet algorithme est intéressant lorsque le nombre de paramètres dans le déterminant est grand et que la matrice est plutôt creuse (majorité de coefficients nuls). Il existe des heuristiques de permutation des lignes ou des colonnes visant à optimiser la position des zéros (par exemple, les auteurs de GiNaC (`www.ginac.de`) suite à des expérimentations privilégient la simplification des petits mineurs en mettant les colonnes contenant le maximum de zéros à gauche selon la description faite ici).

Pour se convaincre de l'intérêt de cet algorithme, on peut effectuer le test O1 de Lewis-Wester
`http://www.bway.net/~lewis/calatex.html`
il s'agit de calculer un déterminant de taille 15 avec 18 paramètres.

### 22.1.3 Systèmes linéaires

On peut appliquer la méthode du pivot de Gauß ou les règles de Cramer (matrices creuses avec beaucoup de paramètres par exemple).

Pour les systèmes à coefficients entiers non singuliers, on peut aussi utiliser une méthode $p$-adique asymptotiquement plus efficace. On calcule d'abord une borne sur les coefficients des fractions solutions de l'équation $Ax = b$ en utilisant les règles de Cramer et la borne d'Hadamard. On calcule ensuite $C$, l'inverse de $A$ modulo $p$ (en changeant de $p$ si $A$ n'est pas inversible modulo $p$), puis, si

$$x = \sum_i x_i p^i, \quad A(\sum_{i<k} x_i p^i) = b \pmod{p^k}$$

on ajoute $x_k p^k$ et on obtient l'équation :

$$Ax_k = \frac{b - \sum_{i<k} x_i p^i}{p^k} \pmod{p}$$

qui détermine $x_k$. On s'arrête lorsque $k$ est suffisamment grand pour pouvoir reconstruire les fractions à l'aide de l'identité de Bézout (cf. infra), ce qui est le cas si $p^k$ est supérieur à 4 fois la borne de Hadamard de $A$ au carré. Pour éviter de recalculer plusieurs fois $b - \sum_{i<k} x_i p^i$, on utilise la récurrence suivante

$$y_0 = b, \quad x_k = Cy_k \pmod{p}, \quad y_{k+1} = \frac{y_k - Ax_k}{p}$$

Pour une matrice de taille $n$, il faut $O(n^3)$ opérations pour calculer $C$, puis $kn^2\ln(n)$ opérations pour calculer $x_k$ (le terme $\ln(n)$ vient de la taille des coefficients de $y_k$ dans le produit $Cy_k$), donc pour pouvoir reconstruire $x$, il faut prendre $k$ de l'ordre de $n\ln(n)$, ce qui nécessite finalement $O(n^3\ln(n)^2)$ opérations.

### 22.1.4 Bézout et les $p$-adiques.

Soit $n$ et $a/b$ une fraction irréductible d'entiers tels que $b$ est premier avec $n$ et $|a| < \sqrt{n}/2$ et $0 \leq b \leq \sqrt{n}/2$. Il s'agit de reconstruire $a$ et $b$ connaissant $x = a \times (b^{-1}) \pmod{n}$ avec $x \in [0, n[$.

**Unicité**

S'il existe une solution $(a, b)$ vérifiant $|a| < \sqrt{n}/2$ et $0 \leq b \leq \sqrt{n}/2$, soit $(a', b')$ une solution de $x = a \times (b^{-1}) \pmod{n}$ et vérifiant $|a'| < \sqrt{n}$ et $0 \leq b' \leq \sqrt{n}$, alors :

$$ab' = a'b \pmod{n}$$

Comme $|ab'| < n/2$, $|a'b| < n/2$, on en déduit que $ab' = a'b$. Donc $a/b = a'/b'$ donc $a = a'$ et $b = b'$ car $a/b$ et $a'/b'$ sont supposées irréductibles.

**Reconstruction lorsqu'on sait qu'il y a une solution**

On suit l'algorithme de calcul des coefficients de Bézout pour les entiers $n$ et $x$. On pose :

$$\alpha_k n + \beta_k x = r_k$$

où les $r_k$ sont les restes successifs de l'algorithme d'Euclide, avec la condition initiale :

$$\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, r_0 = n, r_1 = x$$

et la relation de récurrence :

$$\beta_{k+2} = \beta_k - q_{k+2}\beta_{k+1}, \quad q_{k+2} = \frac{r_k - r_{k+2}}{r_{k+1}}$$

On a $\beta_k x = r_k \pmod{n}$ pour tout rang mais il faut vérifier les conditions de taille sur $\beta_k$ et $r_k$ pour trouver le couple $(a, b)$. Montrons par récurrence que :

$$\beta_{k+1} r_k - r_{k+1}\beta_k = (-1)^k n \tag{22.1}$$

Au rang $k = 0$, on vérifie l'égalité, on l'admet au rang $k$, alors au rang $k + 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\beta_{k+2} r_{k+1} - r_{k+2}\beta_{k+1} &= \beta_k r_{k+1} - q_{k+2} r_{k+1}\beta_{k+1} - r_{k+2}\beta_{k+1} \\
&= \beta_k r_{k+1} - (r_k - r_{k+2})\beta_{k+1} - r_{k+2}\beta_{k+1} \\
&= \beta_k r_{k+1} - r_k \beta_{k+1} \\
&= -(-1)^k n
\end{aligned}$$

On vérifie aussi que le signe de $\beta_k$ est positif si $k$ est impair et négatif si $k$ est pair, on déduit donc de (**??**) :

$$|\beta_{k+1}| r_k < n$$

(avec égalité si $r_{k+1} = 0$)

Considérons la taille des restes successifs, il existe un rang $k$ tel que $r_k \geq \sqrt{n}$ et $r_{k+1} < \sqrt{n}$. On a alors $|\beta_{k+1}| < n/r_k \leq \sqrt{n}$.

Donc l'algorithme de Bézout permet de reconstruire l'unique couple solution s'il existe.

**Exemple**

On prend $n = 101$, $a = 2$, $b = 3$, $a/b = 68 \pmod{101}$. Puis on effectue Bézout pour 68 et 101 en affichant les étapes intermédiaires (par exemple avec `IEGCD` sur une HP49 ou exercice avec votre système de calcul formel) :

```
   = alpha*101+beta*68
101    1        0
 68    0        1   L1 - 1*L2
 33    1       -1   L2 - 2*L3
  2   -2        3   ...
```

On s'arrête à la première ligne telle que le coefficient de la 1ère colonne est inférieur à $\sqrt{101}$, on retrouve bien 2 et 3. Quand on programme l'algorithme de reconstruction, on ne calcule bien sûr pas la colonne des $\alpha$, ce qui donne par exemple le programme xcas ou mupad suivant :

```
// Renvoie a/b tel que a/b=x mod n et |a|,|b|<sqrt(n)
padictofrac:=proc (n,x)
  local r0,beta0,r1,beta1,r2,q2,beta2;
begin
  r0:=n;
  beta0:=0;
  r1:=x;
  beta1:=1;
  sqrtn:=float(sqrt(n));
  while r1>sqrtn do
    r2:= irem(r0,r1);
    q2:=(r0-r2)/r1;
    beta2:=beta0-q2*beta1;
    beta0:=beta1; r0:=r1; beta1:=beta2; r1:=r2;
  end_while;
  return(r1/beta1);
end_proc;
```

### 22.1.5 Base du noyau

On présente ici deux méthodes, la première se généralise au cas des systèmes à coefficients entiers, la deuxième utilise un peu moins de mémoire (elle travaille sur une matrice 2 fois plus petite).

**Première méthode** Soir $M$ la matrice dont on cherche le noyau. On ajoute à droite de la matrice transposée de $M$ une matrice identité ayant le même nombre de lignes que $M^t$. On effectue une réduction sous-diagonale qui nous amène à une matrice composée de deux blocs

$$(M^t I_n) \ \rightarrow \ (U\tilde{L})$$

Attention, $\tilde{L}$ n'est pas la matrice $L$ de la décomposition $LU$ de $M^t$, on a en fait

$$\tilde{L}M^t = U$$

donc

$$M\tilde{L}^t = U^t$$

Les colonnes de $\tilde{L}^t$ correspondant aux colonnes nulles de $U^t$ (ou si on préfère les lignes de $\tilde{L}$ correspondant aux lignes nulles de $U$) sont donc dans le noyau de $M$ et réciproquement si $Mv = 0$ alors

$$U^t(\tilde{L}^t)^{-1}v = 0$$

donc, comme $U$ est réduite, $(\tilde{L}^t)^{-1}v$ est une combinaison linéaire des vecteurs de base d'indice les lignes nulles de $U$. Finalement, les lignes de $\tilde{L}$ correspondant aux lignes nulles de $U$ forment une base du noyau de $M$.

**Deuxième méthode** On commence bien sûr par réduire la matrice (réduction complète en-dehors de la diagonale), et on divise chaque ligne par son premier coefficient non nul (appelé pivot). On insère alors des lignes de 0 pour que les pivots (non nuls) se trouvent sur la diagonale. Puis en fin de matrice, on ajoute ou on supprime des lignes de 0 pour avoir une matrice carrée de dimension le nombre de colonnes de la matrice de départ. On parcourt alors la matrice en diagonale. Si le $i$-ième coefficient est non nul, on passe au suivant. S'il est nul, alors tous les coefficients d'indice supérieur ou égal à $i$ du $i$-ième vecteur colonne $v_i$ sont nuls (mais pas forcément pour les indices inférieurs à $i$). Si on remplace le $i$-ième coefficient de $v_i$ par -1, il est facile de se convaincre que c'est un vecteur du noyau, on le rajoute donc à la base du noyau. On voit facilement que tous les vecteurs de ce type forment une famille libre de la bonne taille, c'est donc bien une base du noyau.

## 22.2 Algèbre linéaire sur $\mathbb{Z}$

### 22.2.1 Calcul du déterminant d'une matrice à coefficient entiers

L'algorithme $p$-adique de résolution de systèmes linéaires peut servir à accélérer le calcul du déterminant d'une matrice à coefficients entiers de grande taille. En effet, le PPCM $f$ des dénominateurs des composantes de $x$ est un diviseur du déterminant, et si $b$ est choisi avec des coefficients aléatoires, on a une forte probabilité d'obtenir le dernier facteur invariant de la matrice $A$. Comme le déterminant de $A$ a une très faible probabilité de contenir un gros facteur carré, ce dernier facteur invariant est très proche du déterminant. Ce dernier est pour une matrice $A$ aléatoire lui-même à un facteur de l'ordre de $(2/\pi)^n$ proche de la borne de Hadamard. Il suffit donc de très peu de nombres premiers pour déterminer $\det(A)/f$ par le théorème des restes chinois. En pratique pour des $n$ de l'ordre de 100 à 1000, cet algorithme est plus rapide que le calcul uniquement par les restes chinois. Pour des $n$ plus grands, il faut se rabattre sur des algorithmes probabilistes avec arrêt prématuré pour être plus rapide (on s'arrête lorsque le déterminant n'évolue plus par reconstruction par les restes chinois pour plusieurs nombres premiers successifs, le résultat n'est alors pas certifié, c'est ce qui se passe dans Xcas si `proba_epsilon` n'est pas nul), ou utiliser des méthodes d'inversion ou de réduction de type Strassen.

### 22.2.2 Réduction de Hermite et Smith

Lorsque $M$ est une matrice à coefficients entiers, on ne peut plus faire l'algorithme du pivot de Gauss ou de Gauss-Bareiss en restant dans $\mathbb{Z}$ et en étant réversible. On peut toutefois effectuer des manipulations élémentaires réversibles dans $\mathbb{Z}$, grâce à l'idendité de Bézout. Si $a$ est le pivot en ligne $i$, $b$ le coefficient en ligne $j$ à annuler, et $u, v, d$ les coefficients de l'identité de Bézout $au + bv = d$ on fait les changements :

$$L_i \leftarrow uL_i + vL_j, \quad L_j \leftarrow -\frac{b}{d}L_i + \frac{a}{d}L_j$$

qui est réversible dans $\mathbb{Z}$ car le déterminant de la sous-matrice élémentaire correspondante est

$$\begin{vmatrix} u & v \\ -\frac{b}{d} & \frac{a}{d} \end{vmatrix} = 1$$

On peut donc créer des zéros en-dessous de la diagonale, il existe une matrice inversible $L$ telle que $LM = U$ où $U$ est triangulaire supérieure. On peut même rendre les coefficients hors diagonale de $U$ inférieur aux pivots de leurs colonnes respectives en faisant une combinaison linéaire de lignes $L_j = L_j - qL_p, j < p$ où $q$ est le quotient de la division euclidienne de $M_{jc}$ par $M_{pc}$ ($p$ la ligne du pivot, en principe $p = c$). On observe aussi que les pivots sont les pgcd des éléments de la colonne du pivot à partir de la ligne du pivot.

Applications : Cette réduction (dite forme normale de Hermite lorsqu'on réduit les lignes au-dessus de la diagonale par division euclidienne par le pivot) permet de trouver une base du noyau à coefficients entiers et telle que tout élément du noyau à coefficient entier s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de la base. Il suffit d'appliquer la réduction de Hermite à $(M^t|I)$, on obtient une matrice $(U|L)$ telle que $U = LM^t$. Dans Xcas, on peut utiliser l'instruction `ihermite` (ou `mathnf` de PARI). L'aide détaillée de Xcas donne un exemple de calcul de $\mathbb{Z}$-base d'un noyau.

Exemple : soit à résoudre en entiers $2x+3y+5z = 0$. On pose `M:=[[2,3,5]]` puis `L,U:=ihermite(tran(M))`, les lignes nulles de $U$ correspondent à des lignes de $L$ qui forment une base du noyau de $M$, soit $(6, 1, -3)$ et $(-5, 0, 2)$. En effet $U = LM^t$ donc $U^t = ML^t$, les colonnes nulle de $U^t$ sont donc images par $M$ des colonnes correspondantes de $L^t$, ainsi les lignes de $L$ correspondant à des lignes nulles de $U$ sont dans le noyau. Et si un vecteur à coefficient entiers est dans le noyau, alors il se décompose sur les vecteurs colonnes de $L^t$ avec des coefficients entiers (puisque $L \in$GL$_n(\mathbb{Z})$), on applique $M$ et on conclut que ses composantes sur les colonnes non nulles de $U^t$ sont nulles.

Remarque : l'algorithme du pivot de Gauss permet de trouver plus rapidement une base sur $\mathbb{Q}$ du noyau de $M$ à coefficients entiers, par exemple ici $\{v_1 = (-3, 2, 0), v_2 = (-5, 0, 2)\}$ mais ce n'est pas une base sur $\mathbb{Z}$, par exemple $1/2v_1 + 1/2v_2 \in \mathbb{Z}^3$.

Plus généralement, chercher une solution particulière du système $MX = B$ revient à résoudre $U^tY = B$ avec $Y = (L^t)^{-1}X$, la recherche de $Y$ est alors très simple puisque $U$ est échelonnée. Par exemple, `M:=[[2,3,5],[7,5,3]]` puis `B:=[3,-2]`, puis `L,U:=ihermite(tran(M))`, donne pour `tran(U)`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a donc $y_1 = 3, y_2 = -2, y_3$ quelconque puis on calcule `X:=tran(L)*[3,-2,y3]`, on peut vérifier avec `normal(M*X)`.

On peut aussi se servir de la forme normale de Hermite pour compléter un vecteur $v = (a_1, ..., a_n)$ de contenu 1 en une base de $\mathbb{Z}^n$ (si le contenu n'est pas 1, c'est bien sur impossible puisque le déterminant est un multiple du contenu), il suffit de prendre les colonnes de $L^{-1}$ (où `L,U:=ihermite(tran(v))`). En effet on a $U = Lv^t$ et $U$ est égal à $(1, 0, ..., 0)$ car le contenu de $v$ vaut 1.

La réduction échelonnée sous la diagonale correspond à `ihermite`, la réduction complète correspond à `ismith` (ou `matsnf` de PARI) qui calcule la décom-

position de Smith d'une matrice $A$ à coefficients entiers et en donne les coefficients invariants. Il faut pour cela alterner plusieurs décomposition de Hermite en ligne et en colonne. En effet un élément hors diagonale $a_{ij}$ non nul d'une réduction de Hermite est un reste de division euclidienne par le pivot $a_{jj}$ (respectivement $a_{ii}$ selon qu'on réduit en lignes ou en colonnes) sur la diagonale, il est donc strictement plus petit et donnera lieu à l'étape de réduction suivante à un pgcd soit égal en $a_{ii}$ [resp. $a_{jj}$] (dans ce cas $a_{ij}$ deviendra nul et on effectue une seule manipulation de lignes de type Gauss et non deux, ce qui ne changera pas les 0 dans la ligne du pivot), soit strictement plus petit, donc soit l'un des pivots décroit, soit l'un des $a_{ij}$ hors diagonale s'annule. On obtient en un nombre fini d'étapes une matrice diagonale. La forme normale de Smith d'une matrice $A$ impose également que les coefficients diagonaux non nuls $d_1|d_2|...|d_r$ se divisent. Pour réaliser cela, si par exemple $d_1$ ne divise pas $d_2$, on remplace $C_1$ par $C_1 + C_2$, puis on fait apparaitre le pgcd de $d_1$ et $d_2$ en ligne 1 colonne 1 en créant un 0 en ligne 2 colonne 1.

La réduction de Smith sert par exemple à montrer qu'un sous-module de $\mathbb{Z}^n$ obtenu par quotient par l'image d'une application linéaire de matrice $A$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/d_i \times ... \times \mathbb{Z}/d_r \times \mathbb{Z}^{n-r}$. C'est ce qu'on obtient pour un module présenté par des générateurs et relations entre générateurs. Les coefficients $d_i$ sont appelés **facteurs invariants** de la matrice $A$, leur factorisation en produit de nombres premiers à une certaine puissance donne les **diviseurs élémentaires**.

Exemple 1 : on se donne le groupe abélien engendré par $x_1$ et $x_2$ vérifiant les relations $2x_1+4x_2 = 0, -2x_1+6x_2 = 0$. On fait $L_2 = L_2+L_1$ et $C_2 = C_2-C_1$ ce qui donne la matrice réduite de diagonale 2 et 10, qui en sont les facteurs invariants, le groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/10$ (parfois noté $\oplus$ au lieu de $\times$).

Exemple 2 : on se donne un module sur $\mathbb{Z}$ engendré par $m_1, m_2, m_3$ et les relations $2m_1+3m_2+5m_3 = 0, 7m_1+3m_2-5m_3 = 0$. On pose `A:=[[2,3,5],[7,3,-5]]`, puis `U,B,V:=ismith(A)`, on a donc $B = UAV$. Si $M = (m_1, m_2, m_3)$, on a $AM = 0$ donc $BV^{-1}M = UAM = 0$. On pose $(n_1, n_2, n_3) = N = V^{-1}M$, les générateurs $n_1 = m_1 - 6m_2 - 20m_3, n_2 = m_2 + 3m_3, n_3 = m_3$ vérifient donc $b_1n_1 = 0, b_2n_2 = 0, b_1 = 1, b_2 = 15$, le module est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/1 \times \mathbb{Z}/15 \times \mathbb{Z}$ soit encore $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

### 22.2.3 L'algorithme LLL.

Il s'agit d'une méthode permettant d'obtenir rapidement une base courte d'un réseau. Ce n'est pas la base la plus courte possible mais un compromis temps d'exécution rapide/base pas trop grande. Voir par exemple Cohen pour la définition et les propriétés. L'instruction Xcas correspondante est `lll` (ou `qflll` de PARI).

Cet algorithme est très utile en calcul formel, pour éviter une explosion combinatoire dans certaines opérations de recombinaison. Par exemple, supposons que nous souhaitions factoriser un polynôme $P$ à coefficients entiers sur $\mathbb{Z}[X]$ en utilisant ses racines approchées. Si plusieurs racines $r_k$ correspondent à un facteur entier, alors $p_n \sum r_k$ doit être un entier aux erreurs d'arrondi près. Tester toutes les combinaisons possibles serait beaucoup trop long, en particulier si $P$ est irréductible (en gros $2^{n-1}$ tests de recombinaison). Pour éviter ce problème, on construit un réseau engendré par degré $P$ lignes dont les premières coordonnées sont celles de la matrice identité, complétées par la partie réelle et imaginaire des racines de $P$ multipliée par le coefficient dominant de $P$ et par une puissance de 10 assez

grande. On ajoute deux lignes qui"annulent" les parties entières des combinaisons linéaires des parties réelles et imaginaires. L'existence d'un facteur irréductible se lira sur un vecteur court du réseau avec des 1 et des 0 comme combinaison linéaire des vecteurs initiaux.

```
f(P):={
  local l,n,prec,M,S,A,L,O;
  n:=degree(P);
  prec:=2*n;
  l:=proot(P,prec+n);
  M:=round(tran([op(idn(n)),
     lcoeff(P)*10^prec*re(l),lcoeff(P)*10^prec*im(l)]));
  M:=[op(M),[op(seq(0,n)),10^prec,0],[op(seq(0,n+1)),10^prec]];
  S,A,L,O:=lll(M);
  retourne l,A;
}:;
```

Par exemple, `P:=(x^3+x+1)*(x^4+x+1)` suivi de `l,A:=f(P)` fait apparaitre en première ligne de $A$ le vecteur $(1,1,1,0,0,0,0,0,0)$. On essaie donc de recombiner les trois premières racines de `l`
`pcoeff(l[0],l[1],l[2])`
renvoie bien un facteur presqu'entier de $P$. Il faut bien entendu des encadrements rigoureux pour déterminer la précision à utiliser pour les racines pour prouver l'irréductibilité de $P$ si $A$ ne contient pas de vecteur court contenant uniquement des 1 et 0.

## 22.3 Le pivot de Gauss numérique.

### 22.3.1 Efficacité de l'algorithme

Si la matrice possède $L$ lignes et $C$ colonnes, le nombre maximal d'opérations pour réduire une ligne est $C$ opérations (une opération=1 multiplication + 1 soustraction, en calculant une seule fois le quotient). Il y a $L-1$ lignes à réduire à chaque étape et $\min(L,C)$ étapes à effectuer, on en déduit que le nombre maximal d'opérations pour réduire une matrice est $LC\min(L,C)$. Pour une matrice carrée de taille $n$, cela fait $n^3$ opérations. En fait c'est moins, parce que lorsqu'on crée des 0 dans la $k$-ième colonne, la ligne du pivot à retrancher commence par $k-1$ zéros, on peut donc commencer la combinaison linéaire à la colonne $k$, donc pour une matrice carrée de taille $n$ cela fait en réalité $n^3/2$ opérations. Si on effectue une réduction en-dessous de la diagonale, toujours pour une matrice carrée, le nombre d'opérations devient $n^3/3$ ($\sum_{k=2}^{n} k^2$). On peut ensuite réduire au-dessus de la diagonale.

### 22.3.2 Erreurs d'arrondis du pivot de Gauss

Comme $|a_{jc}| \leq |a_{lc}|$, une étape de réduction multiplie au plus l'erreur absolue des coefficients par 2. Donc la réduction complète d'une matrice peut multiplier au pire l'erreur absolue sur les coefficients par $2^n$ (où $n$ est le nombre d'étapes de réduction, inférieur au plus petit du nombre de lignes et de colonnes). Ceci signifie

qu'avec la précision d'un double, on peut au pire perdre toute précision pour des matrices pas si grandes que ça ($n = 52$). Heureusement, il semble qu'en pratique, l'erreur absolue ne soit que très rarement multipliée par un facteur supérieur à 10.

Par contre, si on ne prend pas la précaution de choisir le pivot de norme maximale dans la colonne, les erreurs d'arrondis se comportent de manière bien moins bonnes, cf. l'exemple suivant.

**Exemple**
Soit à résoudre le système linéaire

$$\epsilon x + 1.0y = 1.0, \quad x + 2.0y = 3.0$$

avec $\epsilon = 2^{-54}$ (pour une machine utilisant des doubles pour les calculs en flottant, plus généralement on choisira $\epsilon$ tel que $(1.0 + 3\epsilon) - 1.0$ soit indistinguable de 0.0). Si on résoud le système exactement, on obtient $x = 1/(1 - 2\epsilon)$ (environ 1) et $y = (1 - 3\epsilon)/(1 - 2\epsilon)$ (environ 1). Supposons que l'on n'utilise pas la stratégie du pivot partiel, on prend alors comme pivot $\epsilon$, donc on effectue la manipulation de ligne $L_2 \leftarrow L_2 - 1/\epsilon L_1$ ce qui donne comme 2ème équation $(2.0 - 1.0/\epsilon)y = 3.0 - 1.0/\epsilon$. Comme les calculs sont numériques, et à cause des erreurs d'arrondis, cette 2ème équation sera remplacée par $(-1.0/\epsilon)y = -1.0/\epsilon$ d'où $y = 1.0$, qui sera remplacé dans la 1ère équation, donnant $\epsilon x = 1.0 - 1.0y = 0.0$ donc $x = 0.0$. Inversement, si on utilise la stratégie du pivot partiel, alors on doit échanger les 2 équations $L'_2 = L_1$ et $L'_1 = L_2$ puis on effectue $L_2 \leftarrow L'_2 - \epsilon L'_1$, ce qui donne $(1.0 - 2.0\epsilon)y = 1.0 - 3.0\epsilon$, remplacée en raison des erreurs d'arrondi par $1.0 * y = 1.0$ donc $y = 1.0$, puis on remplace $y$ dans $L'_1$ ce qui donne $x = 3.0 - 2.0y = 1.0$. On observe dans les deux cas que la valeur de $y$ est proche de la valeur exacte, mais la valeur de $x$ dans le premier cas est grossièrement eloignée de la valeur correcte.

On peut aussi s'intéresser à la sensibilité de la solution d'un système linéaire à des variations de son second membre. Cela fait intervenir le nombre de conditionnement de la matrice $A$ (voir plus bas) du système (qui est essentiellement la valeur absolue du rapport de la valeur propre la plus grande sur la valeur propre la plus petite), plus ce nombre est grand, plus la solution variera (donc plus on perd en précision).

## 22.4 La méthode de factorisation $LU$

Dans sa forme la plus simple, elle permet d'écrire une matrice $A$ comme produit de deux matrices triangulaire inférieures et supérieures, ce qui ramène la résolution de système à la résolution de deux systèmes triangulaires. Pour tenir compte d'éléments diagonaux nuls et pour optimiser les erreurs d'arrondi, il est nécessaire d'effectuer des permutations sur les lignes de la matrice.

### 22.4.1 Interprétation matricielle du pivot de Gauss

On notera $l$ et $c$ le nombre de lignes et colonnes de $A$ (pour éviter la confusion avec le facteur $L$) et on supposera $A$ non singulière pour simplifier l'exposition.

Lorsqu'on réduit la colonne $j$ d'une matrice $\tilde{A}$ (partiellement réduite) à partir de la ligne $j + 1$ (en supposant $\tilde{A}_{j,j} \neq 0$), cela revient à multiplier $\tilde{A}$ à gauche par

une matrice $\tilde{L}_j$ créée en partant de la matrice identité de taille $l$ où on remplace les 0 colonne $j$, lignes $j+1$ à $l$ par le coefficient de la combinaison de ligne effectuée :

$$l_i \to l_i - \frac{\tilde{A}_{i,j}}{\tilde{A}_{j,j}} l_j$$

donc :

$$\tilde{L}_j = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & -\frac{\tilde{A}_{j+1,j}}{\tilde{A}_{j,j}} & 1 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & .... & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & -\frac{\tilde{A}_{l,j}}{\tilde{A}_{j,j}} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que l'inverse de cette matrice est

$$L_j = \tilde{L}_j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \frac{\tilde{A}_{j+1,j}}{\tilde{A}_{j,j}} & 1 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & .... & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \frac{\tilde{A}_{l,j}}{\tilde{A}_{j,j}} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $A$ est le produit des matrices $L_j$ par une matrice réduite $U$ qui est triangulaire supérieure

$$A = L_1 ... L_{l-1} U$$

On vérifie ensuite que le produit des matrices $L_1 ... L_{l-1}$ revient à remplacer les coefficients de la colonne $j$ sous la diagonale par ceux de $L_j$, ce qui donne une matrice $L$ triangulaire inférieure (avec des 1 sur la diagonale). Pour l'obtenir il suffit au cours de l'algorithme de réduction sous-diagonale du pivot de Gauss de stocker le coefficient de la combinaison linéaire dans une matrice initialisée à la matrice identité (on peut aussi le faire en place dans la matrice á réduire).

Attention, le produit $\tilde{L}_{l-1} ... \tilde{L}_1$ ne s'obtient pas en copiant la colonne $j$ de $\tilde{L}_j$ pour $j$ variant de 1 à $l-1$ ! On peut l'obtenir en faisant une réduction sous-diagonale de la matrice bloc obtenue en collant $A$ avec la matrice identité ayant $l$ lignes.

### 22.4.2 Factorisation $PA = LU$

Si on veut mettre en oeuvre la stratégie du pivot partiel (ou en calcul exact si un coefficient diagonal est nul), il est nécessaire d'intervertir une ligne de la matrice partiellement réduite avec une ligne en-dessous. Cela revient à réduire la matrice $A$ de départ après échange de ces mêmes lignes. En conséquence ce n'est pas $A$ qui est le produit $LU$ mais une matrice obtenue par permutations de lignes de $A$, que l'on peut écrire comme produit à gauche de $A$ par une matrice de permutation $P$.

Remarque : si à une étape de réduction, tous les coefficients de la colonne $j$ à partir de la ligne $j$ sont nuls, on peut simplement ignorer cette colonne et incrémenter $j$ de 1 ($L_j$ sera l'identité). Mais ceci diffère de la réduction sous forme échelonnée où on incrémente $j$ de 1, mais pas $i$ (on ne peut plus alors déduire le rang de $U$ du nombre de lignes non nulles). On peut aussi effectuer un échange de colonnes (ce qui revient à multiplier à droite par une matrice de permutation).

### 22.4.3 Applications de la décomposition $LU$

On peut résoudre des systèmes linéaires par la factorisation $LU$. En effet soit à résoudre $Ax = b$. On effectue la permutation de lignes sur $A$ et $b$ (correspondant à la matrice de permutation $P$), ce qui donne $PAx = Pb = LUx$, puis on résoud $Ly = Pb$ (système triangulaire inférieur), puis on résoud $Ux = y$ (système triangulaire supérieur).

Comparaison avec la réduction complète sous forme échelonnée de $(A|b)$ :

— La factorisation $LU$ peut reservir plus tard pour résoudre le même système linéaire avec un autre second membre. Avec `rref` il faut dès le départ mettre tous les vecteurs colonnes second membre à $A$.

— Le nombre d'opérations pour résoudre un système $n, n$ est moindre. La réduction sous-diagonale nécessite de réduire les colonnes $j$ de 1 à $n-1$, avec pour réduire la colonne $j$ $n-j$ combinaisons linéaire de lignes ayant $n+1-j$ coefficients non nuls, soit $\sum_{j=1}^{(} n-1)(n-j)(n+1-j) = 1/3n^3+O(n^2)$ opérations (1 opération = 1 multiplication et 1 soustraction). La résolution des systèmes triangulaires est en $O(n^2)$.

— Le calcul est plus favorable au cache mémoire, puisqu'on travaille sur une portion de plus en plus petite de la matrice.

On peut inverser une matrice en utilisant la décomposition $LU$. Supposons pour simplifier que la permutation est l'identité. On calcule d'abord $L^{-1}$ en utilisant le fait que $L$ est triangulaire inférieure, voici comment cela est implémenté dans Xcas ($L$ est noté `l`) :

```
first step compute l^-1,
solve l*a=y for y a canonical basis vector
  a0=y0, a1=y1-l_{1,0}*a0, ..., ak=yk-sum_{j=0..k-1}(l_kj*aj)
if y=(0,..,0,1,0,...0) (1 at position i),
  a0=..=a_{i-1}=0, a_i=1 and we start at equation k=i+1 and sum_{j=i...}
-> n^3/6 operations
To store the result in place of l
we first compute all the a2 (there is only 1), then all the a3 (2), etc.
a0=y0, a1=y1-l_{1,0}*a0, ..., ak=yk-sum_{j=0..k-1}(l_kj*aj)
```

Puis on résoud $UA^{-1} = L^{-1}$ colonne par colonne

```
second step, solve u*inverse=l^-1 (now under the diagonal)
we compute a column of inverse by solving the system:
u*col(inverse)=corresponding row of l^-1,
and overwrite the row of l^-1 by solution
u*[x0,..,xn-1]=[a0,...,an]
x_{n-1}=a_{n-1}/u_{n-1,n-1}
```

```
x_{n-2}=(a_{n-2}-u_{n-2,n-1}*x_{n-1})/u_{n-2,n-2}
...
x_k=(a_{k}-sum_{j=k+1..n-1} u_{k,j}x_j)/u_{k,k}
-> n^3/2 operations
To store the solution in place, we first compute all the x_{n-1}
put them in the last line of m, then all the x_{n-2}, etc.
```

Pour une analyse des erreurs d'arrondis dans la décomposition $LU$, voir par exemple Higham et les références citées
`www.maths.manchester.ac.uk/~higham/narep/narep173.pdf`

## 22.5 La factorisation de Cholesky

Dans le cas où la matrice est réelle symétrique définie positive (ou plus généralement hermitienne), on peut obtenir une écriture analogue mais où $U$ est la transconjuguée de $L$

$$A = U^*U = LL^*$$

$L$ reste triangulaire inférieure, mais n'a plus des 1 sur sa diagonale en général. Si $A$ est définie positive, on peut rendre l'écriture unique en imposant aux coefficients diagonaux de $L$ d'être réels positifs.

L'algorithme de calcul de $U$ est la traduction matricielle de l'algorithme de Gauss de réduction des formes quadratiques. On a en effet

$$x^*Ax = x^*U^*Ux = ||Ux||^2$$

les lignes de $U$ (ou les colonnes de $L$) sont donc les coefficients des formes linéaires indépendantes qui interviennent dans l'écriture de la forme quadratique comme somme/différence de carrés de formes linéaires. Si $A$ est définie positive, seules des sommes interviennent, et les variables s'éliminent l'une après l'autre (le coefficient de $x_2$ est forcément non nul lorsqu'on a éliminé $x_1$ et ainsi de suite), ceci explique la forme triangulaire de $U$ et $L$.

Le calcul de $L$ se fait donc colonne par colonne, en calculant d'abord le coefficient diagonal comme racine carrée du coefficient diagonal $\alpha_j = \sqrt{A_{j,j}}$. Ensuite on effectue les combinaisons de ligne sous la forme

$$l_j \to \frac{1}{\alpha_j} l_j, \quad l_i \to \alpha_j l_i - \frac{A_{i,j}}{\alpha_j} l_j$$

On peut aussi tout simplement effectuer le produit de $LL^*$ et chercher les inconnues en commencant par $l_{1,1}$ puis on calcule les $l_{i,1}$ pour $i > 1$, etc. En suivant wikipedia, pour une matrice réelle :

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \left(LL^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{jk} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} l_{ik} l_{jk}, \ 1 \leq i, j \leq n$$

La matrice $A$ étant symétrique, il suffit que les relations ci-dessus soient vérifiées pour $i \leq j$, c'est-à-dire que les éléments $l_{i,j}$ de la matrice $L$ doivent satisfaire

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} l_{jk},\ 1 \leq i \leq j \leq n$$

Pour $i = 1$, on détermine la première colonne de $L$

$$a_{11} = l_{11} l_{11}, \quad a_{1j} = l_{11} l_{j1}$$

donc

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{j1} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \text{ (pour } j > 1)$$

On détermine la $i$-ième colonne de $L$ ($2 \leq i \leq n$) après avoir calculé les $i-1$ premières colonnes

$$a_{ii} = l_{i1} l_{i1} + \ldots + l_{ii} l_{ii}, \quad a_{ij} = l_{i1} l_{j1} + \ldots + l_{ii} l_{ji}$$

d'où

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \quad l_{ji} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{ii}} \text{ (pour } j > i)$$

Pour une matrice hermitienne complexe, il suffit de remplacer $l_{ik} l_{jk}$ par $l_{ik}\overline{l_{jk}}$ et $l_{ik}^2$ par $|l_{ik}|^2$.

Le nombre d'opérations à effectuer est asymptotiquement 2 fois plus faible que celui pour $LU$. En effet, pour la première ligne, il faut 1 racine et $n-1$ divisions, pour la deuxième ligne, 1 racine, $n-1$ additions, multiplications et $n-2$ divisions, ..., pour la $i$-ième ligne 1 racine, $(i-1)(n-i)$ additions, multiplications et $n-2$ divisions, au final le cout est dominé par les additions et multiplications en $1/6n^3$ pour chaque, contre $1/3n^3$ pour la factorisation $LU$.

La commande Xcas correspondante est `cholesky` et renvoie la matrice $L$.

## 22.6 Conditionnement

Le conditionnement mesure la sensibilité de la solution renvoyée d'un système linéaire aux données du problème.

Soit le système linéaire $Ax = b$ de solution $x = A^{-1}b$, supposons $b$ connu avec une erreur $e$, alors la solution renvoyée sera $x + A^{-1}e$, on a donc une erreur relative sur la solution de

$$\frac{\|A^{-1}e\|}{\|A^{-1}b\|} = \frac{\|A^{-1}e\|}{\|e\|} \frac{\|e\|}{\|b\|} \frac{\|b\|}{\|A^{-1}b\|} \leq |||A^{-1}||| \frac{|e|}{|b|} |||A|||$$

(la dernière inégalité s'obtient en écrivant $b = A(A^{-1}b)$). On en déduit que le rapport de l'erreur relative sur la solution par l'erreur relative du second membre est majorée par le produit de la norme de $A$ (en tant qu'application linéaire) par la norme de $A^{-1}$, ce produit est appelé conditionnement de la matrice $A$ (ou parfois nombre de condition de $A$ en adoptant la terminologie anglo-saxonne).

On remarquera que le conditionnement dépend du choix de la norme sur l'espace vectoriel. Si on prend comme norme la norme $L^2$, le calcul de $|||A|||$ nécessite de maximiser $\sqrt{< Ab|Ab >}$ pour $b$ de norme 1, ce qui revient à maximiser $\sqrt{< b|A^*Ab >}$. En diagonalisant la matrice hermitienne $A^*A$, on voit qu'il suffit d'en trouver la plus grande valeur propre et d'en prendre la racine carrée. Les valeurs propres de $A^*A$ sont appelées valeurs singulières de $A$ (ce sont des réels positifs). Le même raisonnement pour $A^{-1}$ (dont les valeurs singulières sont les inverses des valeurs singulières de $A$ [1]) nous donne alors le :

**Théorème 50** *Lorsqu'on résoud un système linéaire $Ax = b$, $A$ matrice connue précisément et inversible, $b$ connu avec une erreur relative en norme $L^2$, l'erreur relative en norme $L^2$ sur $x$ est au plus multipliée par*

$$K_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

*oú $\lambda_n$ [resp. $\lambda_1$] est la plus grande [resp. plus petite] valeur singulière de $A$ (racines carrées des valeurs propres de $A^*A$).*
*Ce facteur d'amplification des erreurs relatives est évidemment supérieur ou égal à 1. Il est égal à 1 si la matrice est unitaire (puisque $A$ est une matrice d'isométrie ou car $AA^* = I$). S'il est de l'ordre de $2^c$ on perdra (au plus) $c$ bits de précision sur la mantisse de $x$.*

Avec Xcas, les **valeurs singulières** s'obtiennent par l'instruction `SVL(A)`, le conditionnement $L^2$ par `COND(A,2)`. Attention, les valeurs singulières de $A$ ne sont pas les valeurs absolues des valeurs propres de $A$ (c'est le cas si $A$ commute avec sa transconjuguée mais ce n'est pas général). On peut utiliser la méthode de la puissance (cf. infra) pour estimer la plus grande valeur singulière de $A$ (donc sans diagonaliser complètement la matrice $A^*A$), et de même sur $A^{-1}$ (en utilisant $LU$ ou Cholesky pour trouver les itérées sans calculer $A^{-1}$).

On peut aussi prendre la norme $L^1$ sur l'espace vectoriel, dans ce cas la norme de matrice correspondante est la norme de colonne (exercice !), le maximum des sommes valeurs absolues des éléments des colonnes (`colNorm(A)` en Xcas) et le conditonnement est le produit de `colNorm(A)` par `colNorm(inv(A))` qui est renvoyé par `COND(A)` en Xcas.

Si la matrice du système $A$ (de nombre de condition noté $\kappa(A)$) est elle-même connue avec une certaine incertitude, alors pour $||\Delta A||$ suffisamment petit, la solution de $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$ vérifie

$$\frac{|\Delta x|}{|x|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{||\Delta A||}{||A||}} \left( \frac{|\Delta b|}{|b|} + \frac{||\Delta A||}{||A||} \right)$$

En effet, on a

$$A\Delta x = \Delta b - \Delta A(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta x = A^{-1}(\Delta b - \Delta A(x + \Delta x))$$

donc en norme

$$\|\Delta x\| \leq |||A^{-1}||| \left( \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\|Ax\| + \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}|||A|||(\|x\| + \|\Delta x\|) \right)$$

1. On le montre en observant que les valeurs propres de $AA^*$ sont identiques à celles de $A^*A$, car si $v$ est vecteur propre de $A^*A$ alors $Av$ est vecteur propre de $AA^*$

puis :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}\left(1 + \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\right)\right)$$

## 22.7 Réduction des endomorphismes

### 22.7.1 Le polynôme minimal (Krylov)

On prend un vecteur $v$ au hasard et on calcule la relation linéaire de degré minimal entre $v$, $Av$, ..., $A^n v$ en cherchant le premier vecteur $w$ du noyau de la matrice obtenue en écrivant les vecteurs $v$, $Av$, etc. en colonne dans cet ordre. Les coordonnées de $w$ donnent alors par ordre de degré croissant un polynôme $P$ de degré minimal tel que $P(A)v = 0$ donc $P$ divise le polynôme minimal $M$. Donc si $P$ est de degré $n$, $P = M$. Sinon, il faut vérifier que le polynôme obtenu annule la matrice $A$. On peut aussi calculer le polynôme $P$ précédent pour quelques vecteurs aléatoires et prendre le PPCM des polynômes obtenus, il suffit de s'arrêter lorsque l'espace engendré par les vecteurs et les images par les puissances de $A$ engendrent tout $\mathbb{R}^n$. On peut aussi utiliser l'algorithme de Danilevsky (voir plus bas) qui est intéressant sur les corps finis.

**Exemple 1**

Polynôme minimal de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On prend $v = (1, 0)$, la matrice à réduire est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -11 \\ 2 & 10 & 38 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Le noyau est engendré par $(-6, 5, -1)$ donc $P = -x^2 + 5x - 6$.

**Exemple 2**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en prenant $v = (1, 0, 0)$ on obtient la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le permier vecteur du noyau est $(-1, 2, -1)$ d'où un polynôme divisant le polynôme minimal $-x^2 + 2x - 1$.

**Cout**

Le calcul de la suite des $v_k = A^k v$ se fait par valeurs de $k$ croissantes $v_{k+1} = Av_k$ en $n \times O(n^2)$ opérations soit en $O(n^3)$ (il ne faut pas calculer $A^k$ ce qui nécessiterait $O(n^4)$ opérations).

On peut améliorer la complexité asymptotique de la manière suivante : on calcule $v, Av$ et $A^2$ avec une multiplication rapide de matrices à la Strassen, on multiplie $A^2$ par $v, Av$ obtenant ainsi $A^2v, A^3v$, on calcule $A^4 = (A^2)^2$ on multiplie $A^4$ par $v, Av, A^2v, A^3v$ obtenant ainsi $A^4v, ..., A^7v$, etc. Il faut faire $\log_2(n)$ multiplications de matrices, on a donc une complexité en $O(n^{\log_2(7)} \log(n))$ avec une multiplication à la Strassen, mais il faudrait des valeurs de $n$ vraiment grandes

(plus d'une dizaine de millions donc impossible à stocker en mémoire) pour que cet algorithme soit intéressant comme le montre le calcul

```
fsolve(n^(log(7.)/log(2)-3)*log(n)/log(2)=1,n=1e5)
```

$$13708339.4047$$

### 22.7.2 Le polynôme caractéristique

Pour une matrice générique, le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal, il est donc intéressant de chercher si le polynôme annulateur de $A$ sur un vecteur aléatoire est de degré $n$, car le temps de calcul du polynôme caractéristique est alors en $O(n^3)$. Si cette méthode probabiliste échoue, on se rabat sur une des méthode déterministe ci-dessous :

— on utilise la formule $\det(\lambda I - A)$ déterminé par une des méthodes de calcul de déterminant ci-dessus. Cela nécessite $O(n^3)$ opérations mais avec des coefficients polynômes en $\lambda$.

— on fait une interpolation de Lagrange en donnant $n+1$ valeurs distinctes à $\lambda$. Ce qui nécessite $O(n^4)$ opérations mais avec des coefficients indépendants de $\lambda$, de plus cette méthode est facile à programmer de manière parallèle.

— si la matrice est à coefficients entiers on peut utiliser la méthode de Hessenberg (voir ci-dessous), on calcule une borne à priori sur les coefficients du polynôme caractéristique (cf. Cohen p.58-59) :

$$|P_k| \leq \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} (n-k)^{(n-k)/2} |M|^{n-k} ,$$

on calcule le polynôme caractéristique modulo suffisamment de petits entiers puis on remonte par les restes chinois.

### 22.7.3 La méthode de Hessenberg

Pour les matrices à coefficients de taille bornée (modulaires par exemple) on préfère la méthode de Hessenberg qui est plus efficace, car elle nécessite de l'ordre de $n^3$ opérations sur les coefficients.

On se raméne d'abord à une matrice triangulaire supérieure à une diagonale près qui est semblable à la matrice de départ puis on applique une formule de récurrence pour calculer les coefficients du polynôme caractéristique.

**Algorithme de réduction de Hessenberg :**
Dans une colonne $m$ donnée de la matrice $H$, on cherche à partir de la ligne $m+1$ un coefficient non nul. S'il n'y en a pas on passe à la colonne suivante. S'il y en a un en ligne $i$, on échange les lignes $m+1$ et $i$ et les colonnes $m+1$ et $i$. Ensuite pour tout $i \geq m+2$, soit $u = H_{i,m}/H_{m+1,m}$, on remplace alors la ligne $L_i$ de $H$ par $L_i - uL_{m+1}$ et la colonne $C_{m+1}$ par $C_{m+1} + uC_i$ ce qui revient "à remplacer le vecteur $e_{m+1}$ de la base par le vecteur $e_{m+1} + ue_i$" ou plus précisément à multiplier à gauche par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}$$

et à droite par la matrice inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$$

(en utilisant les lignes et colonnes $m+1$ et $i$ au lieu de 1 et 2 pour ces matrices). Ceci a pour effet d'annuler le coefficient $H_{i,m}$ dans la nouvelle matrice.

On obtient ainsi en $O(n^3)$ opérations une matrice $H'$ semblable à $H$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} H'_{1,1} & H'_{1,2} & ... & H'_{1,n-2} & H'_{1,n-1} & H'_{1,n} \\ H'_{2,1} & H'_{2,2} & ... & H'_{2,n-2} & H'_{2,n-1} & H'_{2,n} \\ 0 & H'_{3,2} & ... & H'_{3,n-2} & H'_{3,n-1} & H'_{3,n} \\ 0 & 0 & ... & H'_{4,n-2} & H'_{4,n-1} & H'_{4,n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & H'_{n,n-1} & H'_{n,n} \end{pmatrix}$$

On calcule alors le polynôme caractéristique de $H'$ par une récurrence qui s'obtient en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} h_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - H) &= (\lambda - H'_{n,n})h_{n-1}(\lambda) - (-H'_{n-1,n})(-H'_{n,n-1})h_{n-2}(\lambda) + \\ &\quad +(-H'_{n-2,n})(-H'_{n,n-1})(-H'_{n-1,n-2})h_{n-3}(\lambda) - ... \end{aligned}$$

où les $h_i$ s'entendent en gardant les $i$ premières lignes/colonnes de $H'$. On peut écrire cette formule pour $m \leq n$ :

$$h_m(\lambda) = (\lambda - H'_{m,m})h_{m-1}(\lambda) - \sum_{i=1}^{m-1} H'_{m-i,m} \prod_{j=1}^{i-1} H'_{m-j+1,m-j} h_{i-1}(\lambda)$$

Pour effectuer cette récurrence de manière efficace, on conserve les $h_m(\lambda)$ dans un tableau de polynômes et on utilise une variable produit contenant successivement les $\prod H'_{m-j+1,m-j}$.

**Remarques** Une variante de la réduction ci-dessus utilise des matrices de **rotation de Givens** : il s'agit d'une rotation dans le plan engendré par deux vecteurs de base $e_i, e_j$ prolongée par l'identité. On doit alors effectuer deux combinaisons linéaires de ligne et deux combinaisons linéaires de colonnes par transformation donc deux fois plus de calculs, mais l'avantage est que la matrice de transformation est unitaire (donc facile à inverser, et bien conditionnée).

On peut aussi utiliser des **matrices de Householder** pour se ramener à une forme de Hessenberg. La matrice de Householder associée à $v$ est définie par ;

$$H = I - 2\frac{vv^t}{\|v\|^2}$$

c'est la matrice de la symétrie par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à $v$, $Hv = -v$ et pour tout vecteur perpendiculaire à $v$ on a $Hw = w$, donc $H$ est orthogonale. On l'utilise en général pour $v = a - b$ avec $\|a\| = \|b\|$, on a alors $Ha = b$ puisque $H(a-b) = b - a$ car $v = a - b$ et $H(a+b) = a + b$ car $v$ est orthogonal à $a + b$ (puisque $\|a\| = \|b\|$).

On peut enfin utiliser l'algorithme de **Danilevsky**. Il s'agit un peu d'un analogue de la méthode du pivot de Gauss pour se ramener à une matrice companion

semblable (avec des 1 sur la diagonale au-dessus de la diagonale principale et le polynôme caractéristique en dernière ligne). Cela se fait ligne par ligne en commençant par la ligne $k = 0$. On multiplie à gauche par $P$ une matrice identité dont la ligne $k + 1$ est remplacée par la ligne $k$ de la matrice et à droite par son inverse $P^{-1}$, qui est une matrice identité sauf en ligne $k + 1$. Comme la $k + 1$-ième ligne de $P$ est la $k$-ième ligne de la matrice $A$, le produit à droite par $P^{-1}$ va remplacer la $k$-ième ligne de la matrice $A$ par la $k + 1$-ième ligne de $I = PP^{-1}$. Le produit à gauche par $P$ préserve les $k$ premières lignes. Quand on programme cet algorithme, on traduit le produit à droite par une opération sur les colonnes, et le produit à gauche par une opération sur les lignes, on ne doit faire ces opérations qu'à partir de la ligne $k$.

Exemple sur une matrice 3,3 :

```
a:=[[1,2,3],[1,-1,1],[2,-3,3]]
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Réduction de la 1ère ligne :

```
p:=idn(3):; p[1]:=a[0]; inv(p); a*inv(p);
 b:=p*a*inv(p);
```

"Done", $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{15}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{27}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{55}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$

Deuxième ligne :

```
p:=idn(3):; p[2]:=b[1]; inv(p); b*inv(p);
 c:=p*b*inv(p)
```

"Done", $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{27}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{55}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{27}{55} & \frac{9}{55} & \frac{2}{55} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

on lit le polynôme caractéristique en dernière ligne

```
[1,op(revlist(-c[2]))];charpoly(a)
```

$$[1, -3, -6, 5], [1, -3, -6, 5]$$

Notons $(a_{k,0}, ..., a_{k,n-1})$ la $k$-ième ligne de $A$, donc la $k + 1$-i'eme ligne de $P$, alors la $k + 1$-ième ligne de $P^{-1}$ a comme coefficients $-a_{k,j}/a_{k,k+1}$ si $j \neq k$ et $1/a_{k,k+1}$ pour $j = k$. Les opérations de colonnes correspondant à $AP^{-1}$ sont donc $C_j \leftarrow C_j - a_{k,j}/a_{k,k+1}C_{k+1}$ si $j \neq k$ et $C_{k+1} \leftarrow C_{k+1}/a_{k,k+1}$. Puis l'opération de ligne correspondant à $PA$ est $L_{k+1} \leftarrow \sum_j a_{k,j}L_j$ (on peut commencer la somme à $k+1$ si on initialise la ligne à $(0, a_{k,0}, .., a_{k,k}, 0, ...0)$). Dans l'exemple, pour $k = 0$ on a $a_{0,1} = 2$ donc on fait $C_1 = C_1 - 1/2C_2, C_2 = C_2/2, C_3 = C_3 - 3C_2/2$ puis $L_2 = L_1 + 2L_2 + 3L_3$. Pour $k = 1$, on a $b_{1,2} = 55/2$ donc on fait $C_1 = C_1 - 27/55C_3, C_2 = C_2 + 9/55C_3, C_3 = 2/55C_3$ puis $L_3 = 27/2L_1 - 9/2L_2 + 55/2L_3$.

Si au cours du calcul $a_{k,k+1} = 0$, il faut chercher un "pivot" non nul sur la ligne $k$ à partir de la colonne $k + 1$, on échange ensuite les colonnes et les lignes

$k+1$ et $k'$ correspondantes. Si tout le reste de la ligne est nul, alors le polynomême caractéristique est le produit du polynôme de la matrice companion lignes et colonnes 0 à $k$ incluses et de la matrice lignes et colonnes $k+1$ à $n-1$. Si on s'intéresse au polynôme minimal, on prend le PPCM au lieu du produit.

Le coût de l'algorithme de Danilevsky est de $O(n^3)$ opérations sur le corps. Si on travaille sur les entiers, on peut reconstruire le polynôme minimal ou caractéristique par les restes chinois, en estimant la taille des coefficients, on obtient un temps de calcul en $O(n^4 \ln(n))$. Si la matrice est à coefficients dépendant polynomialement d'un paramètre, on peut reconstruire par interpolation en majorant le degré du polynôme minimal ou caractéristique. Dans le cas du polynôme minimal, on prendra garde aux valeurs du paramètre de mauvaise réduction, c'est-à-dire dont le degré est trop petit, il ne faut garder pour l'interpolation que les valeurs du paramètre telles que le degré du polynôme minimal soit maximal. Le nombre de points d'interpolation nécessaire est égal à 1 plus le degré du polynome minimal de la matrice multiplié par le degré maximal de la matrice en le paramètre. Le polynôme interpolé est alors bien le polynôme minimal. En effet appliqué sur la matrice de départ on obtient une matrice à coefficients polynômiaux en le paramètre. Chaque coefficient est un polynôme dont le degré en le paramètre est majoré par le nombre de points d'interpolation utilisés moins 1, et est donc nul car sinon il aurait trop de racines avec tous les points d'interpolation utilisés.

### 22.7.4 Les traces et les identités de Newton

Une autre idée pour calculer le polynôme caractéristique, on calcule les $A^k, k = 0..n$ (en posant $A_{k+1} = AA_k$), puis les traces. Si le polynôme caractéristique est $P = x^n + c_{n-1}x^{n-1}... + c_0$ alors les $c_i$ sont au signe et indice près les polynômes symétriques élémentaires $e_j$ en les racines $r_j$ de $P$ (=valeurs propres de $A$, dans une extension algébrique du corps si nécessaire). On pose

$$e_j = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_j \le n} r_{i_1}...r_{i_j}$$

On a alors (en considérant $t^n P(1/t)$)

$$\prod_{j=1}^{n}(1 - r_j t) = \sum_{k=0}^{n} t^k (-1)^k e_k \tag{22.2}$$

On peut passer facilement des $e_j$ aux $p_j = \sum_{k=1}^{n} r_k^j$ par les identtés de Newton. On calcule la dérivée par rapport à $t$ de (**??**) et on multiplie par $t$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{-r_j t}{1 - r_j t} \prod_{k=1}^{n}(1 - r_k t) = \sum_{k=0}^{n} k t^k (-1)^k e_k$$

on développe en série entière

$$\frac{r_j t}{1 - r_j t} = \sum_{k=1}^{\infty} (r_j t)^k$$

on inverse les sommes d'où

$$-\left(\sum_{k=1}^{\infty} t^k (\sum_{j=1}^{n} r_j^k)\right) \times \sum_{k=0}^{n} t^k (-1)^k e_k = \sum_{k=0}^{n} k t^k (-1)^k e_k$$

on remplace $\sum_{j=1}^{n} r_j^k$ par $p_k$ et on écrit la relation induite pour la puissance $t^k$

$$-\sum_{j=1}^{k} p_j (-1)^{k-j} e_{k-j} = (-1)^k k e_k$$

ou encore

$$k e_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} p_j e_{k-j}$$

Ainsi, connaissant les $p_k, k = 0..n$, on peut calculer les $e_k, k = 0..n$ par ordre croissant sur un corps de caractéristique nulle ou supérieure à $n$ :

$$\begin{aligned} e_0 &= 1, \\ e_1 &= p_1 e_0 = p_1, \\ 2e_2 &= p_1 e_1 - p_2, \\ 3e_3 &= p_1 e_2 - p_2 e_1 + p_3, \\ 4e_4 &= p_1 e_3 - p_2 e_2 + p_3 e_1 - p_4, \\ &... \end{aligned}$$

Le cout de calcul par cette méthode est en $O(n^4)$ (avec multiplication naïve des matrices, ce cout est amélioré avec une multiplication rapide à la Strassen) et n'est donc pas compétitif par rapport à l'algorithme de Danilevsky. La section suivante présente un algorithme assez proche, toujours en $O(n^4)$, mais qui permet également de calculer facilement les vecteurs propres lorsqu'on peut trouver les racines du polynôme caractéristique.

### 22.7.5 La méthode de Leverrier-Faddeev-Souriau

Cette méthode permet le calcul simultané des coefficients $p_i$ $(i = 0..n)$ du polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ et des coefficients matriciels $B_i$ $(i = 0..n-1)$ du polynôme en $\lambda$ donnant la matrice adjointe (ou transposée de la comatrice) $B(\lambda)$ de $\lambda I - A$ :

$$(\lambda I - A)B(\lambda) = (\lambda I - A) \sum_{k \leq n-1} B_k \lambda^k = (\sum_{k \leq n} p_k \lambda^k) I = P(\lambda) I \qquad (22.3)$$

Remarquons que cette équation donne une démonstration assez simple de Cayley-Hamilton puisque le reste de la division euclidienne du polynôme $P(\lambda)I$ par $\lambda I - A$ est $P(A)$.

Pour déterminer simultanément les $p_k$ et $B_k$, on a les relations de récurrence :

$$B_{n-1} = p_n I = I, \quad B_k - A B_{k+1} = p_{k+1} I \qquad (22.4)$$

Il nous manque une relation entre les $p_k$ et $B_k$ pour pouvoir faire le calcul par valeurs décroissantes de $k$, on va montrer le :

**Théorème 51** *La dérivée du polynôme caractéristique $P'(\lambda)$, est égale à la trace de la matrice adjointe de $\lambda I - A$*

$$tr(B) = P'(\lambda)$$

Le théorème nous donne $\text{tr}(B_k) = (k+1)p_{k+1}$. Si on prend la trace de (**??**), on a :

$$\text{tr}(B_{n-1}) = np_n, \quad (k+1)p_{k+1} - \text{tr}(AB_{k+1}) = np_{k+1}$$

donc on calcule $p_{k+1}$ en fonction de $B_{k+1}$ puis $B_k$ :

$$p_{k+1} = \frac{\text{tr}(AB_{k+1})}{k+1-n}, \quad B_k = AB_{k+1} + p_{k+1}I$$

**Démonstration du théorème :**
Soient $V_1(\lambda), ...V_n(\lambda)$ les vecteurs colonnes de $\lambda I - A$ et $b_{i,j}(\lambda)$ les coefficients de $B$, on a :

$$\begin{aligned} P'(\lambda_0) &= \det(V_1(\lambda), V_2(\lambda), ..., V_n(\lambda))'_{|\lambda=\lambda_0} \\ &= \det(V_1'(\lambda_0), V_2(\lambda_0), ..., V_n(\lambda_0)) + \det(V_1(\lambda_0), V_2'(\lambda_0), ..., V_n(\lambda_0)) + \\ &\quad +... + \det(V_1(\lambda_0), V_2(\lambda_0), ..., V_n'(\lambda_0)) \end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que $V_i'(\lambda_0)$ est le $i$-ième vecteur de la base canonique donc :

$$\det(V_1(\lambda_0), V_2(\lambda_0), ..., V_i'(\lambda_0), ..., V_n(\lambda_0)) = b_{i,i}(\lambda_0)$$

Finalement :

$$P'(\lambda_0) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i}(\lambda_0) = \text{tr}\,(B(\lambda_0))$$

**Remarque** :
En réindexant les coefficients de $P$ et $B$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2}... + p_n \\ B(\lambda) &= \lambda^{n-1}I + \lambda^{n-2}B_1 + ... + B_{n-1} \end{aligned}$$

on a montré que :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A_1 = A, & p_1 = -\text{tr}(A), & B_1 = A_1 + p_1 I \\ A_2 = AB_1, & p_2 = -\frac{1}{2}\text{tr}(A_2), & B_2 = A_2 + p_2 I \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_k = AB_{k-1}, & p_k = -\frac{1}{k}\text{tr}(A_k), & B_k = A_k + p_k I \end{array} \right.$$

On peut alors vérifier que $B_n = A_n + p_n I = 0$. D'où ce petit programme :

```
Faddeev(A):={ // renvoie la liste des matrices B et le polynome P
  local Aj,AAj,Id,coef,n,pcara,lmat,j;
  n:=ncols(A);
  Id:=idn(n);      // matrice identite
  Aj:=Id;
  lmat:=[];       // B initialise a liste vide
  pcara:=[1];     // coefficient de plus grand degre de P
```

```
  for j from 1 to n do
    lmat:=append(lmat,Aj);  // rajoute Aj a la liste de matrices
    AAj:=Aj*A;
    coef:=-trace(AAj)/j;
    pcara:=append(pcara,coef);  // rajoute coef au pol. caract.
    Aj:=AAj+coef*Id;
   end_for;
  return lmat,pcara;         // resultat
}:;
```

### 22.7.6 Les vecteurs propres simples.

On suppose ici qu'on peut factoriser le polynôme caractéristique (ou calculer dans une extension algébrique d'un corps). Lorsqu'on a une valeur propre simple $\lambda_0$, en écrivant la relation $(A-\lambda_0 I)B(\lambda_0) = P(\lambda_0)I = 0$, on voit que les vecteurs colonnes de la matrice $B(\lambda_0)$ sont vecteurs propres. Remarquer que $B(\lambda_0) \neq 0$ sinon on pourrait factoriser $\lambda - \lambda_0$ dans $B(\lambda)$ et apreès simplifications on aurait :

$$(A - \lambda_0 I)\frac{B}{\lambda - \lambda_0}(\lambda_0) = \frac{P}{\lambda - \lambda_0}(\lambda_0)I$$

or le 2ème membre est inversible en $\lambda_0$ ce qui n'est pas le cas du premier. Pour avoir une base des vecteurs propres associés à $\lambda_0$, on calcule $B(\lambda_0)$ par la méthode de Horner appliquée au polynôme $B(\lambda)$ en $\lambda = \lambda_0$. En fait il suffit de calculer chaque colonne l'une à la suite de l'autre et s'arrêter dès qu'on rencontre une colonne non nulle. Le calcul d'un vecteur propre associé à une valeur propre simple se fait donc génériquement en $O(n^2)$ opérations.

### 22.7.7 La forme normale de Jordan

Pour les valeurs propres de multiplicité plus grande que 1, on souhaiterait généraliser la méthode ci-dessus pour obtenir une base de l'espace caractéristique, sous forme de cycles de Jordan. Soit $\lambda_i$, $n_i$ les valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On fait un développement de Taylor en $\lambda_i$ :

$$\begin{aligned} -P(\lambda)I &= (A-\lambda I)\left(B(\lambda_i) + B'(\lambda_i)(\lambda-\lambda_i) + ... + \frac{B^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!}(\lambda-\lambda_i)^{n-1}\right) \\ &= -(\lambda-\lambda_i)^{n_i}\prod_{j\neq i}(\lambda-\lambda_j)^{n_j} I \end{aligned}$$

Comme $A-\lambda I = A-\lambda_i I-(\lambda-\lambda_i)I$, on obtient pour les $n_i$ premières puissances de $\lambda - \lambda_i$ :

$$(A-\lambda_i I)B(\lambda_i) = 0 \quad (22.5)$$

$$(A-\lambda_i I)B'(\lambda_i) = B(\lambda_i) \quad (22.6)$$

$$... \quad (22.7)$$

$$(A-\lambda_i I)\frac{B^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} = \frac{B^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} \quad (22.8)$$

$$(A-\lambda_i I)\frac{B^{(n_i)}(\lambda_i)}{n_i!} - \frac{B^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} = -\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)^{n_j} I \quad (22.9)$$

Le calcul des matrices $B^{(n)}(\lambda_i)/n!$ pour $n < n_i$ se fait en appliquant $n_i$ fois l'algorithme de Horner (avec reste).

**Théorème 52** *L'espace caractéristique de $\lambda_i$ est égal à l'image de $B^{(n_i-1)}(\lambda_i)/(n_i-1)!$.*

**Preuve :**
On montre d'abord que Im$B^{(n_i-1)}(\lambda_i)/(n_i-1)!$ est inclus dans l'espace caractéristique correspondant à $\lambda_i$ en appliquant l'équation (**??**) et les équations précédentes. Réciproquement on veut prouver que tout vecteur caractéristique $v$ est dans l'image de $B^{(n_i-1)}(\lambda_i)/(n_i-1)!$. Prouvons le par récurrence sur le plus petit entier $m$ tel que $(A-\lambda_i)^m v = 0$. Le cas $m = 0$ est clair puisque $v = 0$. Supposons le cas $m$ vrai, prouvons le cas $m+1$. On applique l'équation (**??**) à $v$, il suffit alors de prouver que

$$w = (A-\lambda_i)\frac{B^{(n_i)}(\lambda_i)}{n_i!}v$$

appartient à l'image de $B^{(n_i-1)}(\lambda_i)/(n_i-1)!$. Comme $B^{(n_i)}(\lambda_i)$ commute avec $A$ (car c'est un polynôme en $A$ ou en appliquant le fait que $B(\lambda)$ inverse de $A-\lambda I$) :

$$(A-\lambda_i)^m w = \frac{B^{(n_i)}(\lambda_i)}{n_i!}(A-\lambda_i)^{m+1}v = 0$$

et on applique l'hypothèse de récurrence à $w$.

Pour calculer les cycles de Jordan, nous allons effectuer une réduction par le pivot de Gauß simultanément sur les colonnes des matrices $B^{(k)}(\lambda_i)/k!$ où $k < n_i$. La simultanéité a pour but de conserver les relations (**??**) à (**??**) pour les matrices réduites. Pour visualiser l'algorithme, on se représente les matrices les unes au-dessus des autres, colonnes alignées. On commence par réduire la matrice $B(\lambda_i)$ jusqu'à ce que l'on obtienne une matrice réduite **en recopiant** les opérations élémentaires de colonnes faites sur $B(\lambda_i)$ sur toutes les matrices $B^{(k)}(\lambda_i)/k!$. On va continuer avec la liste des matrices réduites issues de $B'(\lambda_i)$, ..., $B^{(n_i-1)}(\lambda_i)/(n_i-1)!$, mais en déplacant les colonnes non nulles de $B(\lambda_i)$ d'une matrice vers le bas (pour une colonne non nulle de la matrice réduite $B(\lambda)$ les colonnes correspondantes de $B^{(k)}(\lambda_i)$ réduite sont remplacées par les colonnes correspondantes de $B^{(k-1)}(\lambda_i)$ réduite pour $k$ décroissant de $n_i-1$ vers 1). À chaque étape, on obtient une famille (éventuellement vide) de cycles de Jordan, ce sont les vecteurs colonnes correspondants aux colonnes non nulles de la matrice réduite du haut de la colonne. On élimine bien sûr les colonnes correspondant aux fins de cycles déjà trouvés.

Par exemple, si $B(\lambda_i) \neq 0$, son rang est 1 et on a une colonne non nulle, et un cycle de Jordan de longueur $n_i$ fait des $n_i$ vecteurs colonnes des matrices $B^{(k)}(\lambda_i)/k!$ réduites. Plus généralement, on obtiendra plus qu'un cycle de Jordan (et dans ce cas $B(\lambda_i) = 0$).

### 22.7.8 Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$ est valeur propre de multiplicité 2, on obtient :

$$B(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

on applique l'algorithme de Horner :

$$\begin{aligned} B(2) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B'(2) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme $B(2) \neq 0$, on pourrait arrêter les calculs en utilisant une colonne non nulle et le cycle de Jordan associé $(2,2,1) \to (1,1,0) \to (0,0,0)$. Expliquons tout de même l'algorithme général sur cet exemple. La réduction de $B(2)$ s'obtient en effectuant les manipulations de colonnes $C_2 + C_1 \to C_2$ et $C_3 - C_1 \to C_3$. On effectue les mêmes opérations sur $B'(2)$ et on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'étape suivante consiste à déplacer vers le bas d'une matrice les colonnes non nulles de la matrice du haut, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui se réduit en :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on chercherait alors dans les colonnes 2 et 3 de nouveaux cycles (puisque la colonne 1 a déja été utilisée pour fournir un cycle).

### 22.7.9 Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ est valeur propre de multiplicité 3. On trouve :

$$\begin{aligned} B(1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B'(1) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \frac{B''(1)}{2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le processus de réduction commence avec $B'(1)$ en haut de la liste de matrices, on effectue les opérations élémentaires de colonne $C_2 - C_1 \to C_2$ et $C_3 + C_1 \to C_3$ et on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La première colonne donne le premier cycle de Jordan $(1,0,0) \to (2,-1,1)$. On déplace les premières colonnes d'une matrice vers le bas :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qu'on réduit par les opérations $2C_2 + C_1 \to C_2$ et $2C_3 - C_1 \to C_3$ en :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis on effectue $C_3 - C_2 \to C_3$ et la deuxième colonne nous donne le deuxième cycle de Jordan, réduit ici à un seul vecteur propre $(0,1,1)$.

### 22.7.10 Le polynôme minimal par Faddeev

On vérifie aisément que le degré du facteur $(\lambda - \lambda_i)$ dans le polynôme minimal de $A$ est égal à $n_i - k$ où $k$ est le plus grand entier tel que :

$$\forall j < k, \quad B^{(j)}(\lambda_i) = 0$$

### 22.7.11 Formes normales rationnelles

On se place ici dans une problématique différente : trouver une matrice semblable la plus simple possible sans avoir à introduire d'extension algébrique pour

factoriser le polynôme caractéristique. Quitte à "compléter" plus tard la factorisation et la jordanisation à partir de la forme simplifiée. Il existe diverses formes associées à une matrice et plusieurs algorithmes permettant de les relier entre elles, forme de Smith, de Frobenius, forme normale de Jordan rationnelle.

On commence par un algorithme très simple qui donne la décomposition dite de Dunford $A = D + N$ (somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente) sans calculer les valeurs propres (donc en faisant tous les calculs dans le corps des coefficients de la matrice). Il utilise la méthode de Newton, la partie diagonalisable annulant le polynôme $q$ déduit du polynôme caractéristique en ramenant à 1 toutes les multiplicités, la partie nilpotente étant vue comme le terme d'erreur (la taille de l'erreur se mesurant par l'exposant nécessaire pour annuler le nilpotent). On résoud donc $q(x) = 0$ en considérant la suite récurrente $u_{n+1} = u_n - q(u_n)/q'(u_n)$ avec comme valeur initiale de la suite $u_0 = A$. On observe que $q(A)$ est nilpotente car $q(D) = 0$.

```
dunford(A):={
  local U,p,q,q1,j,d,n;
  U:=A;
  n:=nrows(U);
  p:=charpoly(U);
  q:=p/gcd(p,p'); // partie sans multiplicite
  q1:=q';
  for (j:=1;j<=n;j:=2*j){
    d:=inv(horner(q1,U))*horner(q,U); // pas de Newton
    if (d==0*d) return U,A-U;
    U:=U-d;
  }
  return U,A-U;
}:;

J:=[[2,1,0],[0,1,1],[0,0,1]]; P:=trn([[1,2,3
],[0,-1,4],[0,0,1]]); A:=P*J*inv(P)
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 17 & -5 & -1 \\ -35 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

```
D,N:=dunford(A); N^2; N^3
```

$$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ -16 & 7 & 2 \\ -24 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & -4 & -1 \\ 33 & -12 & -3 \\ -11 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais cet algorithme est un peu trop simple pour être efficace pour de grandes matrices, une itération est en $O(n^4)$. Pour le rendre plus efficace, il faut travailler un peu en utilisant la factorisation la plus poussée possible sur le polynôme caractéristique (en tout cas au moins la décomposition `sqrfree`) et Bézout pour calculer

les projecteurs spectraux, on diminue ainsi la dimension pour accélérer les évaluations du polynôme d'endomorphisme (en $O(\text{dimension})^4$). Et au demeurant la forme de Dunford n'a pas beaucoup d'applications pratiques.

On va maintenant présenter une méthode directe de calcul d'une forme normale contenant le maximum de zéros (dont la forme dite normale de Jordan rationnelle peut se déduire) en utilisant le même algorithme que pour la forme normale de Jordan. Soit $Q(\lambda) = q_0 + ... + q_d\lambda^d$ un facteur irréductible de degré $d$ et de multiplicité $q$ du polynôme caractéristique $P$. Il s'agit de construire un sous-espace de dimension $dq$ formé de "cycles de Jordan rationnels". On part toujours de la relation $(\lambda I - A)\sum_{k\leq n-1} B_k\lambda^k = P(\lambda)I$. On observe que $Q(\lambda)I - Q(A)$ est divisible par $(\lambda I - A)$ donc il existe une matrice $M(\lambda)$ telle que :

$$(Q(\lambda)I - Q(A))(\sum_{k\leq n-1} B_k\lambda^k) = Q(\lambda)^q M(\lambda)$$

On observe aussi que $Q$ a pour coefficient dominant 1 puisqu'il divise $P$, on peut donc effectuer des divisions euclidiennes de polynômes donc de polynômes à coefficients matriciels par $Q$ sans avoir à diviser des coefficients. Ce qui nous permet de décomposer $B(\lambda) = \sum_{k\leq n-1} B_k\lambda^k$ en puissances croissantes de $Q$ :

$$B(\lambda) = \sum_k C_k(\lambda)Q(\lambda)^k, \quad \deg(C_k) < q$$

On remplace et on écrit que les coefficients des puissances inférieures à $q$ de $Q$ sont nulles (la $k$-ième étant non nulle car $M(\lambda)$ n'est pas divisible par $Q$ pour les mêmes raisons que pour la forme normale de Jordan). On a donc les relations :

$$Q(A)C_0 = 0, \quad C_k = Q(A)C_{k+1}$$

ce qui donne une colonne de matrice $C_{q-1} \to C_{q-2}... \to C_0 \to 0$ qui sont images l'une de l'autre en appliquant $Q(A)$. On peut alors faire l'algorithme de réduction simultanée sur les colonnes des $C_j$. On observe ensuite que le nombre de cycles de Jordan de $Q(A)$ de longueur donnée est un multiple de $d$, en effet il suffit de multiplier un cycle par $A$, ..., $A^{d-1}$ pour créer un autre cycle, de plus ces cycles forment des familles libres car on a supposé $Q$ irréductible. On peut donc choisir pour un cycle de longueur $k$ des bases de la forme $(v_{k-1}, Av_{k-1}..., A^{d-1}v_{k-1}) \to ... \to (v_0, Av_0..., A^{d-1}v_0) \to (0, ..., 0)$ où la flèche $\to$ désigne l'image par $Q(A)$. Si on écrit la matrice de $A$ dans la base $v_0, Av_0..., A^{d-1}v_0, ..., v_{k-1}, Av_{k-1}..., A^{d-1}v_{k-1}$ on obtient un "quasi-bloc de Jordan rationnel" de taille $kd$ multiple de $d$ :

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & ... & -q_0 & 0 & 0 & ... & 1 & ... \\
1 & 0 & ... & -q_1 & 0 & 0 & ... & 0 & ... \\
0 & 1 & ... & -q_2 & 0 & 0 & ... & 0 & ... \\
\vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & ... \\
0 & 0 & ... & -q_{d-1} & 0 & 0 & ... & 0 & ... \\
 & & & & & & & & \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & -q_0 & ... \\
0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & -q_1 & ... \\
\vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & ...
\end{pmatrix}$$

**Exemple**

Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{-7}{2} & 2 & \frac{-5}{2} \\ 1 & \frac{-5}{2} & 2 & \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} & -3 \\ 0 & -1 & \frac{9}{2} & \frac{-7}{2} & 3 & \frac{-7}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $(x-2)^2(x^2-2)^2$ et on va déterminer la partie bloc de Jordan rationnel correspondant au facteur irréductible sur les entiers $Q(x) = (x^2-2)$ de multiplicité $q=2$. On calcule $B(x)$ et l'écriture de $B$ comme somme de puissances de $Q$ (ici avec `xcas` en mode `xcas`) :

```
A:=[[1,-2,4,-2,5,-4],[0,1,5/2,(-7)/2,2,(-5)/2],[1,(-5)/2,2,1/(-2),5/2,
    [0,-1,9/2,(-7)/2,3,(-7)/2],[0,0,2,-2,3,-1],[1,(-3)/2,1/(-2),1,3/2,
P:=det(A-x*idn(6));
B:=normal(P*inv(A-x*idn(6))); // preferer un appel a faddeev bien sur
ecriture(B,Q,q):={
  local j,k,l,n,C,D,E;
  C:=B;
  D:=B;
  E:=NULL;
  n:=coldim(B);
  for (j:=0;j<q;j++){
    for (k:=0;k<n;k++){
      for (l:=0;l<n;l++){
        D[k,l]:=rem(C[k,l],Q,x);
        C[k,l]:=quo(C[k,l],Q,x);
      }
    }
    E:=E,D;
  }
  return E;
};
E:=ecriture(B,x^2-2,2);
QA:=A*A-2*idn(6);
```

On vérifie bien que `normal(QA*E(0))` et `normal(QA*E(1))-E(0))` sont nuls. On sait qu'on a un bloc de taille 2 de cycles de Jordan de longueur 2, donc il n'est pas nécessaire de faire des réductions ici, il suffit de prendre une colonne non nulle de $E(0)$, par exemple la première colonne en $x=0$ et la colonne correspondante de $E(1)$ et leurs images par $A$, ici cela donne $(4, 24, 12, 32, 8, -4)$ correspondant à $(0, 4, -4, 8, 4, -4)$, on calcule les images par $A$, la matrice de l'endomorphisme restreint à ce sous-espace est alors le bloc de taille 4 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette forme normale minimise le nombre de coefficients non nuls, mais présente un inconvénient, la partie nilpotente ne commute pas avec la partie bloc-diagonale, contrairement à la forme normale rationnelle de Jordan qui contient des blocs identités au-dessus de la diagonale de blocs. Pour créer la forme normale rationnelle de Jordan, on doit donc remplacer les blocs $\begin{pmatrix} ... & 0 & 1 \\ ... & 0 & 0 \\ ... & & \end{pmatrix}$ par des matrices identités. Supposons constitués les $j$ premiers blocs de taille $d$ numérotés de 0 à $j-1$ avec comme base de vecteurs $(v_{0,0}, ..., v_{0,d-1}, ..., v_{j-1,d-1})$. Il s'agit de trouver un vecteur $v_{j,0}$ pour commencer le bloc suivant. On définit alors $v_{j,l}$ en fonction de $v_{j,l-1}$ en appliquant la relation $Av_{j,l-1} = v_{j,l} + v_{j-1,l-1}$. Il faut donc chercher $v_{j,0}$ tel que

$$Av_{j,d-1} = -q_0 v_{j,0} - ... - q_{d-1} v_{j,d-1} + v_{j-1,d-1} \tag{22.10}$$

En utilisant les relations de récurrence précédentes, on voit que cela revient à fixer $Q(A)v_{j,0}$ en fonction des $v_{j',l}$ avec $j' < j$ ($l$ quelconque). Ce qui est toujours possible en utilisant la colonne de matrices $C_{j'}$ qui s'obtiennent en fonction des $C_{j'+1}$ en appliquant $Q(A)$.

Plus précisément, calculons les $v_{j,l}$ en fonction de $v_{j,0}$ et des $v_{j',l'}$ ($j' < j$). On utilise les coefficients binomiaux $\binom{l}{m}$ calculés par la règle du triangle de Pascal et on montre par récurrence que :

$$v_{j,l} = A^l v_{j,0} - \sum_{m=1}^{\inf(l,j)} \binom{l}{m} v_{j-m,l-m} \tag{22.11}$$

On remplace dans (**??**) d'où :

$$A^d v_{j,0} - \sum_{m=1}^{\inf(d,j)} \binom{d}{m} v_{j-m,l-m} + \sum_{l=0}^{d} q_l (A^l v_{j,0} - \sum_{m=1}^{\inf(l,j)} \binom{l}{m} v_{j-m,l-m}) = 0$$

finalement :

$$Q(A)v_{j,0} = \sum_{l=1}^{d} q_l \sum_{m=1}^{\inf(l,j)} \binom{l}{m} v_{j-m,l-m} \tag{22.12}$$

**Application à l'exemple :**
Ici $v_{0,0} = (4, 24, 12, 32, 8, -4)$ et $v_{0,1} = Av_{j,0}$ dont une préimage par $Q(A)$ est $w_{1,0} = (0, 4, -4, 8, 4, -4)$ et $w_{1,1} = Aw_{1,0}$. On applique (**??**), comme $q_1 = 0$ et $q_2 = 1$ on doit avoir :

$$Q(A)v_{1,0} = \sum_{l=1}^{2} q_l \sum_{m=1}^{\inf(l,1)} \binom{l}{m} v_{1-m,l-m} = 2v_{0,1}$$

donc :

$$\begin{array}{rcccc} v_{1,0} & = & 2A(0,4,-4,8,4,-4) & = & (-8,-32,0,-48,-16,16) \\ v_{1,1} & = & Av_{1,0} - v_{0,0} & = & (4,40,-4,64,24,-20) \end{array}$$

On vérifie bien que $Av_{1,1} = 2v_{1,0} + v_{0,1}$.

### 22.7.12 Fonctions analytiques

Soit $f$ une fonction analytique et $M$ une matrice. Pour calculer $f(M)$, on calcule la forme normale de Jordan de $M = P(D+N)P^{-1}$ où $D = \text{diag}(d_1, ..., d_m)$ est diagonale et $N$ nilpotente d'ordre $n$. On calcule aussi le développement de Taylor formel de $f$ en $x$ à l'ordre $n-1$, on a alors :

$$f(N) = P\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\text{diag}(f^{(j)}(d_1), ..., f^{(j)}(d_m))}{j!} N^j\right) P^{-1}$$

## 22.8 Quelques autres algorithmes utiles

### 22.8.1 Complexité asymptotique

Pour calculer le produit de matrices, on peut utiliser l'algorithme de **Strassen**, on présente ici la variante de **Winograd**. Soit à calculer :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$\begin{gathered} s_1 = a_{2,1} + a_{2,2}, \quad s_2 = s_1 - a_{1,1}, \quad s_3 = a_{1,1} - a_{2,1}, \quad s_4 = a_{1,2} - s_2 \\ t_1 = b_{1,2} - b_{1,1}, \quad t_2 = b_{2,2} - t_1, \quad t_3 = b_{2,2} - b_{1,2}, \quad t_4 = b_{2,1} - t_2 \end{gathered}$$

puis :

$$\begin{gathered} p_1 = a_{1,1}b_{1,1}, \quad p_2 = a_{1,2}b_{2,1}, \quad p_3 = s_1t_1, \quad p_4 = s_2t_2 \\ p_5 = s_3t_3, \quad p_6 = s_4b_{2,2}, \quad p_7 = a_{2,2}t_4 \\ u_1 = p_1 + p_2 \quad u_2 = p_1 + p_4, \quad u_3 = u_2 + p_5, \quad u_4 = u_3 + p_7 \\ u_5 = u_3 + p_3, \quad u_6 = u_2 + p_3, \quad u_7 = u_6 + p_6 \end{gathered}$$

Alors $c_{1,1} = u_1, c_{1,2} = u_7, c_{2,1} = u_4, c_{2,2} = u_5$.
Cet algorithme utilise 7 multiplications et 15 additions ce qui économise 1 multiplication et permet en appliquant récursivement cet algorithme pour des matrices blocs de réduire la complexité d'un produit de grandes matrices normalement en $O(n^3 = n^{\ln(8)/\ln(2)})$ à $O(n^{\ln(7)/\ln(2)})$ (la preuve est analogue à celle de la multiplication des polynômes par l'algorithme de Karatsuba).

En utilisant une factorisation $LU$ par blocs, on peut montrer que cette complexité asymptotique se généralise au calcul de l'inverse. On peut d'ailleurs améliorer l'exposant, mais la constante non explicitée dans le $O$ augmente aussi. En pratique, Strassen n'est pas utilisée pour des matrices de taille plus petites que plusieurs centaines de lignes et colonnes.

De même on peut gagner sur le calcul du polynôme minimal en faisant des opérations de multiplication par bloc.

## 22.9 Quelques méthodes alternatives au pivot

### 22.9.1 Factorisation $QR$

La factorisation $QR$ consiste à écrire une matrice $A$ comme produit d'une matrice orthogonale (ou unitaire dans $\mathbb{C}$) et d'une matrice triangulaire supérieure. Les matrices orthogonales ayant un conditionnement de 1 (en norme $L^2$) cette factorisation peut s'obtenir de manière numériquement stable.

Il existe plusieurs algorithmes pour effectuer cette factorisation. On peut voir cette factorisation comme l'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué aux vecteurs colonnes de $A$ si $A$ est non singulière. Mais la procédure de Gram-Schmidt n'est pas numériquement stable (car on retranche d'un vecteur une combinaison linéaire des vecteurs précdents pour rendre le nouveau vecteur orthogonal et les erreurs d'arrondi s'accumulent rendant l'orthogonalité plus aléatoire). La méthode de Householder utilise des matrices de symétrie par rapport à un hyperplan et ne souffre pas de ce problème d'instabilité. Pour annuler les coefficients de la première colonne $c_1$ de $A$, on construit le vecteur $u = c_1 \pm \|c_1\| e_1$ où $e_1$ est le premier vecteur de base et le signe $\pm$ est le signe de la première composante de $c_1$ (pour assurer la stabilité numérique). On fait alors la symétrie $Q_1$ par rapport à l'hyperplan $H$ orthogonal à $u$, qui laisse $H$ invariant et transforme $u$ en $-u$. Comme $u$ est vecteur directeur de la bissectrice intérieure ou extérieure de $c_1$ et $e_1$, la symétrie échange ces deux vecteurs, éventuellement au signe près. La matrice $A_1 = Q_1 A$ a donc comme première colonne un multiple de $e_1$, on continue ensuite en faisant le même raisonnement sur la matrice $A_1$ en se limitant et lignes et colonnes d'indice $\geq 2$. Après $n-1$ itérations, on a $A_{n-1} = Q_{n-1}...Q_1 A$ qui est triangulaire supérieure d'où la factorisation annoncée.

Matriciellement, $Q_1 = I - 2vv^*$ où $v = u/\|u\|$, pour calculer $Q_1 A$ il faut effectuer $A - 2vv^*A$, on calcule donc $w = v^*A$ en $n^2$ opérations (ou une opération est une addition et une multiplication) puis on soustrait $(2v)_i w_j$ de $a_{ij}$ en $n^2$ opérations. En faisant de même aux étapes qui suivent, sans tenir compte de la simplification progressive du vecteur $v$, on effectue $2n^3$ opérations. La constante 2 peut être un peu améliorée en tenant compte des 0 initiaux de $v$ aux étapes 2 et ultérieures, elle est toutefois supérieure à LU (et Cholesky), mais en contrepartie la méthode est très stable numériquement.

On peut aussi utiliser des rotations (méthode de Givens) pour annuler les coefficients de $A$ sous la diagonale. C'est par exemple très efficace pour des matrices tridiagonales.

Lorsque la matrice $A$ n'est pas carrée, mais possède $n$ lignes et $c$ colonnes, la factorisation $QR$ est encore possible, la matrice $Q$ est alors une matrice carrée d'ordre $n$, et $R$ a les mêmes dimensions que $A$. En particulier si $A$ a plus de lignes que de colonnes (matrice verticale), $R$ aussi. Par exemple si $A$ est de rang maximal $c$, alors $R$ se décompose en un premier bloc $c, c$ inversible $R_1$ et un deuxième bloc $n-c, c$ entièrement nul.

**Applications :**
On peut alors écrire $Ax = b$ sous la forme $QRx = b$ donc $Rx = Q^*b$ qui est un système triangulaire supérieur, donc résoudre $Ax = b$ en $O(n^2)$ opérations une fois la factorisation $QR$ effectuée.

```
a:=[[1.,2.,3.],[4.,5.,6.],[7.,8.,0.]]; q,r:=qr(a);
```

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 & 3.0 \\ 4.0 & 5.0 & 6.0 \\ 7.0 & 8.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \left[ \begin{pmatrix} -0.123091490979 & 0.904534033733 & -0.408248290464 \\ -0.492365963917 & 0.301511344578 & 0.816496580928 \\ -0.861640436855 & -0.301511344578 & -0.408248290464 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} -8. \\ -4.2205 \\ -4.420 \end{bmatrix}$$

Mais c'est surtout pour résoudre **au sens des moindres carrés** un système sur-déterminé que la factorisation $QR$ trouve tout son intérêt. Soit $A$ la matrice d'un système sur-déterminé avec $n$ lignes et $c$ colonnes, $n > c$ (matrice "verticale" ou mince). Le système n'a en général pas de solution, on cherche alors à minimiser $\|Ax - b\|_2^2$. Ceci revient à chercher la projection orthogonale de $b$ sur $\mathrm{Im}(A)$. Soit $Ax$ cette projection, on a $b = Ax + p$ avec $p$ orthogonal à $\mathrm{Im}(A)$ donc dans $\mathrm{Ker}(A^*)$, donc $A^*b = A^*(Ax + p) = A^*Ax$.

**Proposition 53** *La solution $x$ du problème de minimisation de $\|Ax - b\|_2$ est donnée par $A^*Ax = A^*b$*

Si $A = QR$ on a alors $R^*Rx = R^*Q^*b$. Si $A$ est de rang maximal $c$, on décompose $R$ en $\binom{R_1}{R_2}$ avec $R_1$ inversible de taille $c$ et $R_2 = 0$, donc $R^* = (R_1^*, 0)$ et le système devient $R_1^*R_1x = (R_1^*, 0)Q^*b$ et comme $R_1$ est inversible, on a $R_1x =$ les $c$ premières lignes de $Q^*b$. Il vaut mieux résoudre ce système que $A^*Ax = A^*b$ car le conditionnement de $A^*A$ est le carré du conditionnement de $A$ (le nombre d'opérations est un peu supérieur : $QR$ a une constante nettement plus grande que Cholesky mais il n'y a pas de multiplication de matrice à faire, et le résultat est plus précis).

Notons qu'on peut résoudre de manière assez analogue un système sous-déterminé au sens des moindres carrés. On considère toujours le système $Ax = b$ mais cette fois-ci $A$ est une matrice "horizontale" (nombre de lignes $n < c$ le nombre de colonnes). Si $b \in \mathrm{Im}(A)$ (on peut génériquement supposer que $A$ est de rang $n$), il y a une infinité de solutions, on cherche alors la solution de norme minimale. On cherche donc le projeté orthogonal de l'espace affine des solutions (dirigé selon $\mathrm{Ker}(A)$) sur l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(A)$ qui est $\mathrm{Im}A^*$. Ainsi $x = A^*y$ vérifie $Ax = b$, donc $AA^*y = b$. Si $A$ est de rang $n$ alors $AA^*$ est inversible et $y = (AA^*)^{-1}b$ donc $x = A(AA^*)^{-1}b$. En utilisant la factorisation $QR$ de $A^*$ (attention pas celle de $A$), on a $AA^* = R^*R$, donc $x = QR(R^*R)^{-1}b$. Si $A$ est de rang $n$, on a alors en posant $R = \binom{R_1}{0}$ avec $R_1$ matrice $n, n$ inversible :

$$x = Q \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} R_1^{-1} {R_1^*}^{-1} b = Q \begin{pmatrix} {R_1}^{*^{-1}} \\ 0 \end{pmatrix} b = Q_1 {R_1}^{*^{-1}} b$$

où $Q_1$ désigne les $n$ premières colonnes de $Q$.

**Proposition 54** *Soit $A$ une matrice ayant $n$ lignes et $c > n$ colonnes. Si $A$ est de rang maximal $n$, posons $A^* = QR$, $R_1$ les $n$ premières lignes de $R_1$, $Q_1$ les $n$ premières colonnes de $Q$. La solution de $Ax = b$ de norme minimale est donnée par $Q_1c$ où $c$ est la solution de $R_1^*c = b$ (système triangulaire).*

**Exemple 1 : la régression linéaire** :
On se donne $n$ points de coordonnées $(x_i, y_i)$ où les $x_i$ sont distincts 2 à 2 et on

cherche la droite qui approche le mieux ces points au sens de l'écart en $y$ au carré. Il s'agit donc de trouver $\alpha$ et $\beta$ qui minimisent :

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha+\beta x_i-y_i)^2$$

Ici on a :

$$A=\begin{pmatrix}1 & x_1\\ ... & ...\\ 1 & x_n\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}y_1\\ ...\\ y_n\end{pmatrix}$$

Pour trouver $\alpha,\beta$ de manière précise, on préferera donc calculer la factorisation $QR$ de $A$ plutôt que calculer $A^*A$, $R_1$ est une matrice carrée d'ordre 2, $Q$ une matrice carrée d'ordre $n$, la première colonne de $Q$ est le vecteur de coordonnées $\pm(1,...,1)/\sqrt{n}$.

Exemple : on se donne les points $(1,2),(2,1),(3,5),(4,4)$. La matrice $A$ et $b$ sont donc

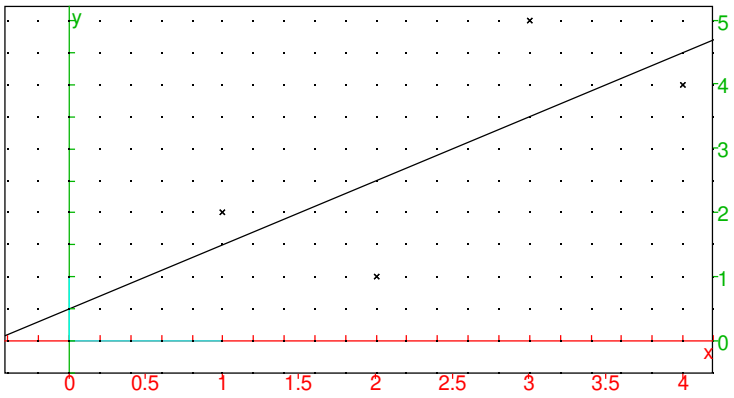
```
A:=evalf(tran([seq(1,4),seq(j,j,1,4)]));
 b:=[2,1,5,4];
```

$$\begin{pmatrix}1.0 & 1.0\\ 1.0 & 2.0\\ 1.0 & 3.0\\ 1.0 & 4.0\end{pmatrix},[2,1,5,4]$$

```
q,r:=qr(A); y0,m:=normal(r[0..1,0..1]^-1*trn
(q)[0..1]*b);
```

$$\left[\begin{pmatrix}-0.5 & -0.67082039325 & -0.42360679775 & -0.3472135955\\ -0.5 & -0.22360679775 & 0.306011329583 & 0.778689325833\\ -0.5 & 0.22360679775 & 0.658797734083 & -0.515737865167\\ -0.5 & 0.67082039325 & -0.541202265917 & 0.0842621348333\end{pmatrix},\begin{bmatrix}-2.0\\ -2.9790409839\times10^{-16}\\ -1.881192081\times10^{-16} & -2.22\\ -1.54193811275\times10^{-16} & -4.4\end{bmatrix}\right.$$

```
purge(x);droite(y=m*x+y0); scatterplot(seq
(j,j,1,4),b);linear_regression_plot(seq(j,j,1,4
),b)
```

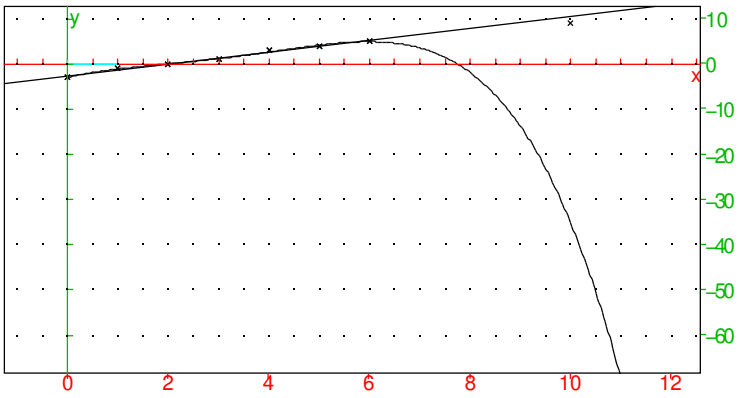



**Exemple 2 : régression polynomiale** :
C'est une généralisation de l'exemple précédent, on cherche un polynôme $P(x)$ de degré fixé tel que $\sum_i (y_i - P(x_i))^2$ soit minimal. Si on choisit la base canonique des polynômes, la matrice $A$ est alors une matrice de Vandermonde et son conditionnement est en général très mauvais. De plus, plus le degré augmente, plus l'extrapolation est hasardeuse :

```
a:=[[0,-3],[1,-1],[2,0],[3,1],[4,3],[5,4
],[6,5],[10,9]]:;
```

"Done"

```
scatterplot(a); linear_regression_plot(a
[0..6]); polynomial_regression_plot(a[0..6],4);
```




On préfèrera utiliser une base de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $\sum_i P(x_i)Q(x_i)$ ou minimiser une autre fonctionnelle quadratique, par exemple une intégrale du carré de la différence entre une fonction à approcher et un polynôme ou un polynôme trigonométrique.

**Remarque** : La factorisation $QR$ peut s'obtenir en calculant la factorisation de Cholesky de $A^*A$ qui donne $R$, mais on lui préfère une méthode de calcul direct pour des raisons de stabilité, en tout cas pour des matrices denses (pour des matrices creuses des considérations d'efficacité peuvent faire préférer la factorisation de Cholesky).

### 22.9.2 Méthodes itératives de Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation

Lorsqu'on a une matrice creuse (peu d'éléments non nuls), l'algorithme du pivot de Gauss a tendance à densifier rapidement la matrice réduite (surtout avec le pivot partiel où on ne controle pas le nombre de zéros de la ligne contenant le pivot). Il peut alors être intéressant d'utiliser des méthodes alternatives ne faisant intervenir que des produits de matrice, donnant éventuellement un résultat seulement approché.

Par exemple pour calculer l'inverse d'une matrice $A = M - N$, avec $M$ facile à inverser (par exemple diagonale) et $N$ petit en norme et creuse, on peut écrire :

$$A^{-1} = (M-N)^{-1} = (M(I-M^{-1}N))^{-1} = (I+M^{-1}N+(M^{-1}N)^2+...)M^{-1}$$

De même pour résoudre un système linéaire $Ax = b$ avec $A = M - N$, on considère la suite $Mx_{n+1} - Nx_n = b$, donc $x_{n+1}$ est obtenu en résolvant le système :

$$Mx_{n+1} = b + Nx_n, \quad x_0 = 0$$

pour laquelle on vérifiera les hypothèses du théorème du point fixe, il suffit par exemple de vérifier que la plus grande valeur singulière de $M^{-1}N$ est strictement plus petite que 1. Lorsque la matrice $N$ n'est pas creuse, le procédé est intéressant pour résoudre approximativement un système si $n$ est grand et si chaque itération est en $O(n^2)$ (ceci veut dire qu'on ne calcule pas $M^{-1}$ sauf si c'est évident, par exemple si $M$ est diagonale), mais le procédé n'est pas intéressant pour le calcul de l'inverse de $A$.

Notons $D$ la partie diagonale de $A$, $L$ sa partie triangulaire inférieure stricte, $U$ sa partie triangulaire supérieure stricte, La méthode de Jacobi utilise pour $M$ la diagonale $D$ de $A$, alors que la méthode de Gauss-Seidel prend pour $M$ la partie triangulaire inférieure $D + L$ de $A$ (diagonale comprise). Pour Jacobi, on a donc

$$x_{n+1} = D^{-1}(b + (D - A)x_n) = x_n + D^{-1}(b - Ax_n)$$

En Xcas, l'instruction préprogrammée est `jacobi_linsolve`, on peut aussi programmer la méthode par

```
jacobi(A,b,eps,N):={
  local D,x0,x1,n,j;
  n:=size(A);
  D:=diag(A).^-1;
  x0:=seq(0,n);
  pour j de 1 jusque N faire
    x1:=b-A*x0;
    si l2norm(x1)<eps alors return x0; fsi;
    x0:=x0+D .*x1;
  fpour;
  return "non convergent";
}:;
```

Un cas simple où on a convergence :

**Proposition 55** *Lorsque la matrice $A$ est à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire que l'élément diagonal est en valeur absolue strictement supérieur à la somme des éléments non diagonaux de la même ligne :*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

*la méthode de Jacobi converge.*

En effet, $\|M^{-1}Nx\|_\infty < \|x\|_\infty$ car :

$$|(Nx)_i| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\|x\|_\infty < |a_{ii}|\|x\|_\infty \quad \Rightarrow \quad |M^{-1}(Nx)_i| < \|x\|_\infty$$

On retrouve ce cas pour une petite perturbation d'une matrice diagonale, par exemple

```
n:=500;A:=2*idn(n)+1e-4*ranm(n,n,uniformd,-1,1
);:;b:=seq(1,n):;
```

$$500, \text{"Done"}, \text{"Done"}$$

```
time(c:=linsolve(A,b));
```

$$[0.17, 0.169115744]$$

```
time(d:=jacobi(A,b,1e-12,50));
```

$$[0.13, 0.129665365]$$

```
maxnorm(d-c)
```

$$7.95807864051 \times 10^{-13}$$

Pour $n$ assez grand, la méthode de Jacobi devient plus rapide. Cela se vérifie encore plus vite si $A$ est une matrice creuse.

Pour Gauss-Seidel, le calcul de $M^{-1}$ n'est pas effectué, on résoud directement le système triangulaire $Mx_{n+1} = b + Nx_n$ soit

$$(D + L)x_{n+1} = b - Ux_n$$

Gauss-Seidel est moins adapté à la parallélisation que Jacobi. On adapte le programme précédent

```
seidel(A,b,N,eps):={
  local L,U,x0,x1,n,j;
  n:=size(A);
  L:=diag(A,left);
  U:=A-L;
  x0:=seq(0.0,n);
  pour j de 1 jusque N faire
    x1:=b-U*x0;
    x1:=linsolve(L,x1);
    si l2norm(x1-x0)<eps*l2norm(x0) alors return x0; fsi;
```

```
    x0:=x1;
  fpour;
  return "non convergent";
}:;
```

Dans la méthode de relaxation, on pose pour $M$ la matrice triangulaire inférieure $M = \frac{1}{\omega}D + L$ où $\omega > 0$, donc $N = (\frac{1}{\omega} - 1)D - U$ et on utilise la récurrence $Mx_{n+1} = b + Nx_n$ donc $Mx_{n+1} = b + (M - A)x_n$ puis $M(x_{n+1} - x_n) = b - Ax_n$ puis

$$(D + \omega L)(x_{n+1} - x_n) = \omega(b - Ax_n)$$

On remarque que Gauss-Seidel correspond à $\omega = 1$. L'instruction correspondante de Xcas est `gauss_seidel_linsolve` et peut prendre en paramètre le coefficient de relaxation, dont la valeur par défaut est 1.

**Proposition 56** *(Convergence ) : si $A = M - N$ est une matrice symétrique définie positive et si $M^* + N$ est définie positive, alors la méthode converge.*

On utilise la norme correspondant à la forme quadratique de matrice $A$ et on calcule la norme subordonnée de $M^{-1}N$, on a $M^{-1}Nx = x - y$ avec $y = M^{-1}Ax$ donc

$$\begin{aligned}
\|M^{-1}Nx\|_A^2 &= < x - y | A(x - y)) > \\
&= < x|Ax > + < y|Ay > - < y|Ax > - < x|Ay > \\
&= < x|Ax > + < y|Ay > - < y|My > - < My|y > \\
&= < x|Ax > - < y|(M^* + N)y > \\
&< < x|Ax > = \|x\|_A^2
\end{aligned}$$

Conséquence : si $A$ symétrique définie positive, alors Gauss-Seidel converge, car $M^* + N = D$. Pour la relaxation, on a $M^* + N = (2/\omega - 1)D$ qui est définie positive si $\omega < 2$.

**Remarque** : Jacobi et Gauss-Seidel sont implémentées dans les commandes Xcas `jacobi_linsolve` et `gauss_seidel_linsolve`.

### 22.9.3 Méthode du gradient à pas constant

Soit $A$ est une matrice symétrique définie positive (relativement à un produit scalaire noté $< | >$), on considère la fonctionnelle :

$$J(v) = \frac{1}{2} < Av|v > - < b|v >$$

$J(v)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|v\|$ tend vers l'infini, car si $\lambda_1 > 0$ est la plus petite valeur propre de $A$, on a $J(v) \geq \frac{1}{2}\lambda_1\|v\|^2 - \|b\|\|v\|$. Elle admet donc un minimum global, qui vérifie $J'(v) = \nabla J(v) = 0$ Or $d_v J(w) =< Av - b|w >$, en effet

$$< A(v+hw)|(v+hw) > - < Av|v >= h < Aw|v > + h < Av|w > + O(h^2) = 2h < Av|w > + O(h$$

donc $\nabla J(v) = Av - b$ Donc le minimum global est l'unique solution de $Av = b$.

La méthode du gradient à pas constant consiste à résoudre le système $Av = b$ en minimisant $J$. Pour cela on calcule une suite récurrente de premier terme par

exemple $v_0 = 0$, et au rang $k+1$ on suit la direction opposée au gradient de $J$ en $v_k$ selon un pas constant :

$$v_{n+1} = v_k - \rho(Av_k - b)$$

La plus grande et plus petite valeur propre de $I - \rho A$ sont $1 - \rho\lambda_1$ et $1 - \rho\lambda_n$, si ces deux valeurs propres sont en module strictement inférieure à 1, alors $v_k$ va converger à vitesse géométrique (de raison $\max(|1-\rho\lambda_1|, |1-\rho\lambda_n|)$ vers l'unique point fixe de $f(v) = (I - \rho A)v + \rho b$, qui est la solution du système $Av = b$. Il suffit de choisir $\rho$ (si on a une estimation sur $\lambda_1$ et $\lambda_n$).

Par exemple, pour la matrice du laplacien discret (2 sur la diagonale, et -1 sur les 2 diagonales de part et d'autre), les valeurs propres sont les $2(1-\cos(k\pi/(n+1)))$, il faut donc que $-1 < 1-2\rho(1+\cos(\pi/(n+1)))$ soit $0 < \rho < \frac{1}{1+\cos(\pi/(n+1))}$. La valeur optimale est obtenue lorsque les 2 valeurs extrêmales ont même valeur absolue

$$2\rho(1+\cos(\pi/(n+1)) - 1 = 1 - 2\rho(1-\cos(\pi/(n+1)) \;\Rightarrow\; \rho = \frac{1}{2}$$

La vitesse de convergence est assez lente, car $|I - \rho A|$ a pour valeur propre maximale $\cos(\pi/(n+1))$, par exemple pour $n = 20$, $\cos(pi/21.) \equiv 0.988$ est très proche de 1.

### 22.9.4 Méthode itérative du gradient conjugué

Il s'agit de résoudre $Ax = b$, où $A$ est définie positive. Si on a une base orthogonale pour le produit scalaire induit par $A$, on peut calculer la $j$-ième coordonnée de $x$ dans cette base en faisant le produit scalaire de $Ax = b$ par le $j$-ième vecteur de la base. On construit donc petit à petit une base orthogonale $\{p_1, ..., p_n\}$ pour $A$ par un procédé à la Gram-Schmidt, mais on ne part pas de la base canonique : on construit cette famille orthogonale pour $A$ en meme temps qu'on calcule les composantes de $x$. Si $x = \sum_{j\geq 1} \alpha_j p_j$, alors

$$< b|p_j > = < Ax|p_j > = \alpha_j < Ap_j|p_j >$$

Posons $x_i = \sum_{j\leq i} \alpha_j p_j$, on a donc

$$< b - Ax_i|p_j > = 0 \text{ si } j \leq i, \quad < b - Ax_i|p_j > = \alpha_j < Ap_j|p_j > \text{ sinon.}$$

On peut donc construire $x_i$ comme une suite récurrente de la manière suivante :

1. on initialise par $x_0 = 0$,
2. à la $i$-ième itération, on pose $r_{i+1} = b - Ax_i$, on a donc
$$< r_{i+1}|p_j > = 0 \text{ si } j \leq i$$
3. On en déduit que si $r_{i+1}$ est combinaison linéaire des $p_j, j \leq i$, alors $r_{i+1} = 0$ donc on a terminé : $x = x_i$.
4. Sinon, on complète la famille $A$-orthogonale par un nouveau vecteur $p_{i+1}$ tel que $r_{i+1} - p_{i+1}$ soit dans Vect($\{p_1, ..., p_i\}$) et $A$-orthogonal. On observe que $r_{i+1}$ est combinaison linéaire des $p_j$ pour $j \leq i+1$, donc $< r_i|r_k > = 0$ si $i < k$ puisque $r_k$ est orthogonal aux $p_j$ pour $j \leq i < k$.

5. On calcule la $i+1$-ième composante de $x$ sur la famille orthogonale augmentée :
$$\alpha_{i+1} = \frac{< b|p_{i+1} >}{< Ap_{i+1}|p_{i+1} >}$$
On peut maintenant ajouter la $i+1$-ième composante de $x$ à $x_i$ pour obtenir $x_{i+1} = x_i + \alpha_{i+1}p_{i+1}$.
6. Pour calculer efficacement $p_{i+1}$, on observe que
$$r_{k+1} - r_k = A(x_{k-1} - x_k) = -\alpha_k A p_k$$
Donc $r_{i+1} - p_{i+1}$ est orthogonal à $p_k$ pour $k < i$ :
$$< r_{i+1} - p_{i+1}|Ap_k >= -\frac{1}{\alpha_k} < r_{i+1}|Ap_k >= -\frac{1}{\alpha_k} < r_{i+1}|r_{k+1} - r_k >= 0$$
Ainsi $r_{i+1} - p_{i+1} = \beta_i p_i$ et :
$$< r_{i+1} - p_{i+1}|Ap_i >= -\frac{1}{\alpha_i} < r_{i+1}|r_{i+1} >= \beta_i < p_i|Ap_i >$$
7. De plus :
$$\alpha_{i+1} = \frac{< r_{i+1}|r_{i+1} >}{< Ap_{i+1}|p_{i+1} >}$$
En effet, comme $b = Ax_i + r_{i+1}$ et comme $r_{i+1}$ est orthogonal aux $p_j, j \leq i$ :
$$< b|p_{i+1} >=< Ax_i + r_{i+1}|p_{i+1} >=< r_{i+1}|p_{i+1} >=< r_{i+1}|r_{i+1} >$$
8. Donc
$$\beta_i = -\frac{< r_{i+1}|r_{i+1} >}{< r_i|r_i >}, \quad p_{i+1} = r_{i+1} - \beta_i p_i$$

On s'arrête en au plus la dimension itérations lorsque la famille orthogonale est devenue une base. En grande dimension, on peut décider de s'arrêter prématurément sur une solution approchée en testant si la norme de la valeur du résidu vérifie $\|r_{i+1}\| = \|b - Ax_i\| < \varepsilon$.

La commande `conjugate_gradient(A,b)` de Xcas permet de faire ce calcul, on peut préciser une valeur initiale de recherche `x0` et une précision `eps` en tapant `conjugate_gradient(A,b,x0,eps)`. Voir aussi le programme en langage Xcas depuis le menu `Exemple, analyse, gradconj`

## 22.10 Réduction approchée des endomorphismes

On pourrait trouver des valeurs propres approchées d'une matrice en calculant le polynome caractéristique ou minimal puis en le factorisant numériquement. Mais cette méthode n'est pas idéale relativement aux erreurs d'arrondis (calcul du polynome caractéristiaue, de ses racines, et nouvelle approximation en calculant le noyau de $A - \lambda I$), lorsqu'on veut calculer quelques valeurs propres on préfère utiliser des méthodes itératives directement sur $A$ ce qui évite la propagation des erreurs d'arrondi.

### 22.10.1 Méthode de la puissance

Elle permet de déterminer la plus grande valeur propre en valeur absolue d'une matrice diagonalisable lorsque celle-ci est unique. Supposons en effet que les valeurs propres de $A$ soient $x_1, ..., x_n$ avec $|x_1| \leq |x_2| \leq ... \leq |x_{n-1}| < |x_n|$ et soient $e_1, ..., e_n$ une base de vecteurs propres correspondants. On choisit un vecteur aléatoire $v$ et on calcule la suite $v_k = Av_{k-1} = A^k v$. Si $v$ a pour coordonnées $V_1, ..., V_n$) dans la base propre, alors

$$v_k = \sum_{j=1}^{n} V_j x_j^k e_j = x_n^k w_k, \quad w_k = \sum_{j=1}^{n} V_j \left(\frac{x_j}{x_n}\right)^k e_j$$

L'hypothèse que $x_n$ est l'unique valeur propre de module maximal entraine alors que $\lim_{k\to+\infty} w_k = V_n e_n$ puisque la suite géométrique de raison $x_j/x_n$ converge vers 0. Autrement dit, si $V_n \neq 0$ (ce qui a une probabilité 1 d'être vrai pour un vecteur aléatoire), $v_k$ est équivalent à $V_n x_n^k e_n$. Lorsque $n$ est grand, $v_k$ est presque colinéaire au vecteur propre $e_n$ (que l'on peut estimer par $v_k$ divisé par sa norme), ce que l'on détecte en testant si $v_{k+1}$ et $v_k$ sont presques colinéaires. De plus le facteur de colinéarité entre $v_{k+1}$ et $v_k$ est presque $x_n$, la valeur propre de module maximal.

En pratique, pour éviter des débordements d'exposant des coordonnées des $v_k$ on normalise $v_k$ à chaque étape, on pose donc $w_{k+1} = Av_k, v_{k+1} = w_{k+1}/\|w_{k+1}\|$ et on estime $x_n$ en calculant $\lambda_k = (w_k|v_k)$.

Lorsque la matrice $A$ est symétrique réelle ou hermitienne complexe, on peut utiliser comme test d'arrêt $\|w_k - \lambda_k v_k\| \leq \varepsilon$. En effet, $A$ est alors diagonalisable dans une base orthonormale, on écrit la relation $\|(A - \lambda_k)v_k\| \leq \varepsilon$ dans cette base et on obtient qu'il existe une valeur propre de $A$ à distance inférieure ou égale à $\varepsilon$ de la valeur propre estimée $\lambda_k$. Ce résultat n'est malheureusement plus vrai si $A$ est quelconque, car deux vecteurs propres peuvent faire un angle très petit. Par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{\epsilon} & 1 \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres $-1$ et 1 mais $A\binom{\epsilon}{1} = \binom{-\epsilon}{0}$ donc 0 semble être une valeur propre approchée. Il vaut alors mieux tester l'écart entre deux estimations consécutives de la valeur propre, en effet au premier ordre

$$\lambda_k - x_n \approx \sum_j \beta_j \left(\frac{x_j}{x_n}\right)^k$$

où la somme porte sur les indices $j$ des valeurs propres de module sous-dominant. En général cette somme se réduit au seul indice $j = n-1$, et $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ se comporte comme une suite géométrique (de raison $x_j/x_n$), on peut alors estimer l'erreur par

$$|\lambda_k - x_n| \leq \epsilon, \quad \epsilon \approx_{k\to+\infty} \frac{|\lambda_{k+1} - \lambda_k|}{1 - |\frac{\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}|}$$

Mais cette estimation n'est plus correcte s'il y a plusieurs indices $j$ sous-dominants (cas par exemple d'une paire de valeurs propres conjuguées pour une matrice réelle).

Exercice : tester la convergence de $v_k = A^k v$ vers l'espace propre associé à $\lambda = 3$ pour la matrice `[[1,-1],[2,4]]` et le vecteur $v = (1, 0)$. Attention à ne pas calculer $A^k$ pour déterminer $v_k$, utiliser la relation de récurrence !

Si on n'observe pas de convergence ou si elle est trop lente, alors $|x_{n-1}|$ est proche de $|x_n|$ ou égal, il est judicieux de faire subir à la matrice un shift, on remplace $A$ par $A - \lambda I$. On peut prendre $\lambda$ aléatoirement, ou bien mieux faire des itérations inverses sur $A - \lambda I$ si $\lambda$ est une estimation d'une valeur propre (voir les itérations inverses ci-dessous).

Lorsqu'on applique cette méthode a une matrice réelle, il peut arriver quíl y ait deux valeurs propres conjuguées de module maximal. On peut appliquer la méthode ci-dessus avec un shift complexe non réel, mais on doit alors travailler en arithmétique complexe ce qui est plus couteux. Le même type de raisonnement que ci-dessus montre que pour $k$ grand, $v_{k+2}$ est presque colinéaire à l'espace engendré par $v_k$ et $v_{k+1}$, la recherche d'une relation $av_{k+2} + bv_{k+1} + v_k = 0$ permet alors de calculer les valeurs propres qui sont les deux racines de $ax^2 + bx + 1 = 0$.

La convergence est de type série géométrique, on gagne le même nombre de décimales à chaque itération.

Applications :

— la méthode de la puissance peut donner une estimation du nombre de condition $L^2$ d'une matrice $A$. On calcule $B = A^*A$ puis on effectue cette méthode sur $B$ pour avoir une estimation de la plus grande valeur propre, puis "sur $B^{-1}$" par itérations inverses et on fait le rapport des racines carrées. C'est une méthode intéressante si la matrice est creuse et symétrique (pour pouvoir faire Cholesky creux pour les itérations inverses).

— la méthode de la puissance peut donner une estimation rapide de la taille de la plus grande racine d'un polynôme (en module), en itérant sur la matrice companion du polynôme, matrice qui contient beaucoup de 0, donc le produit avec un vecteur se fait en temps $O(n)$, où $n$ est le degré du polynôme.

```
f(P,eps,N):={
  local k,l,n,v,old,new,oldratio,tmp;
  l:=coeffs(P);
  n:=degree(P);
  l:=revlist(l[1..n]/l[0]);
  v:=randvector(n,uniformd,-1,1);
  oldratio:=inf;
  for k from 1 to N do
    old:=maxnorm(v);
    tmp := -l[0]*v[n-1];
    for j from 1 to n-1 do
      v[j] =< v[j-1]-l[j]*v[n-1];
    od;
    v[0] =< tmp;
    new:=maxnorm(v);
    if (abs(new/old-oldratio)<eps) return new/old;
    oldratio:=new/old;
  od;
  retourne undef;
}:;
```

Ceci peut par exemple servir à déterminer pour un polynôme $P$ donné squarefree (de degré $n$ et coefficient dominant $p_n$) l'écart minimal entre 2 racines, on calcule
`R:=normal(resultant(P,subst(P,x=x+y),x)/x^degree(P))`
c'est un polynôme bicarré dont on cherche la plus petite racine en calculant le carré de la plus grande racine en module de `numer(subst(R,y=1/sqrt(x)))`.

On peut obtenir un minorant à priori de cette plus petit racine en calculant

$$\text{resultant}(P, P') = \pm p_n^{2n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_i - r_j)^2$$

on isole l'écart minimal au carré, on majore les autres carrés en majorant les racines, et on peut minorer le résultant à priori par 1 si $P$ est à coefficients entiers.

### 22.10.2 Itérations inverses

La méthode précédente permet de calculer la valeur propre de module maximal d'une matrice. Pour trouver une valeur propre proche d'une quantité donnée $x$, on peut appliquer la méthode précédente à la matrice $(A - xI)^{-1}$ (en pratique on effectue $LU$ sur $A - xI$ et on résoud $(A - xI)u_{n+1} = u_n$). En effet, les valeurs propres de cette matrice sont les $(x_i - x)^{-1}$ dont la norme est maximale lorsqu'on se rapproche de $x_i$. Attention à ne pas prendre $x$ trop proche d'une valeur propre, car le calcul de $(A - xI)u_{n+1} = u_n$ est alors peu précis (la matrice étant mal conditionnée).

### 22.10.3 Elimination des valeurs propres trouvées

Si la matrice $A$ est symétrique, et si $e_n$ est un vecteur propre normé écrit en colonne, on peut considérer la matrice $B = A - x_n e_n e_n^t$ qui possède les mêmes valeurs propres et mêmes vecteurs propres que $A$ avec même multiplicité, sauf $x_n$ qui est remplacé par 0. En effet les espaces propres de $A$ sont orthogonaux entre eux, donc

$$Be_n = x_n e_n - x_n e_n e_n^t e_n = 0, Be_k = x_k e_k - x_n e_n e_n^t e_k = x_k e_k$$

On peut donc calculer la 2ème valeur propre (en valeur absolue), l'éliminer et ainsi de suite.

Si la matrice $A$ n'est pas symétrique, il faut considérer $B = A - x_n e_n f_n^t / e_n.f_n$ où $f_n$ est vecteur propre de $A^t$ associé à $x_n$. En effet $f_k.e_j = 0$ si $i \neq j$ car $Ae_k.f_j = x_k e_k.f_j = e_k.A^t f_j = x_j e_k f_j$ et donc $f_k.e_k \neq 0$ (sinon $e_k$ est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}^n$ =Vect$(f_1, ..., f_n)$.

### 22.10.4 Décomposition de Schur

Il s'agit d'une factorisation de matrice sous la forme

$$A = PSP^{-1}$$

où $P$ est unitaire et $S$ diagonale supérieure. Existence (théorique) : on prend une valeur propre et un vecteur propre correspondant, puis on projette sur l'orthogonal

de ce vecteur propre et on s'y restreint, on prend à nouveau une valeur propre et un vecteur propre correspondant, etc.

On peut approcher cette factorisation par un algorithme itératif qui utilise la **factorisation** $QR$ d'une matrice quelconque comme produit d'une matrice unitaire par une matrice triangulaire supérieure à coefficients positifs sur la diagonale. On fait l'hypothèse que les valeurs propres de $S$ sur la diagonale sont classées par ordre de module strictement décroissant $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$ (développement inspiré par Peter J. Olver dans le cas symétrique `http://www.math.umn.edu/~olver/aims_/qr.pdf`
On peut toujours s'y ramener quitte à remplacer $A$ par $A - \alpha I$. Posons $A_1 = A$, et par récurrence $A_n = Q_n R_n$ (avec $Q_n$ unitaire et $R$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs), $A_{n+1} = R_n Q_n$. On a alors

$$\begin{aligned} A^k &= (Q_1R_1)(Q_1R_1)(Q_1R_1)...(Q_1R_1)(Q_1R_1) \\ &= Q_1(R_1Q_1)(R_1Q_1)(R_1...Q_1)(R_1Q_1)R_1 \\ &= Q_1(Q_2R_2)(Q_2R_2)..(Q_2R_2)R_1 \\ &= Q_1Q_2(R_2Q_2)R_2..Q_2R_2R_1 \\ &= Q_1Q_2(Q_3R_3)...Q_3R_3R_2R_1 \\ &= Q_1...Q_kR_k...R_1 \end{aligned}$$

D'autre part $A = PSP^{-1}$ donc $A^k = PS^kP^{-1}$. Soit $D$ la forme diagonale de $S$ et $U$ la matrice de passage $S = UDU^{-1}$, où $U$ est triangulaire supérieure et où on choisit la normalisation des coefficients sur la diagonale de $U$ valant 1. On a donc

$$A^k = PUD^kU^{-1}P^{-1}$$

Ensuite, on suppose qu'on peut factoriser $U^{-1}P^{-1} = L\tilde{U}$ sans permutations, donc qu'on ne rencontre pas de pivot nul, et quitte à multiplier les vecteurs unitaires de $P^{-1}$ par une constante complexe de module 1 on peut supposer que les pivots sont positifs donc que $\tilde{U}$ a des coefficients positifs sur la diagonale, on a alors

$$A^k = PUD^kL\tilde{U} = Q_1...Q_kR_k...R_1$$

puis en multipliant par $\tilde{U}^{-1}|D|^{-k}$

$$PUD^kL|D|^{-k} = Q_1...Q_kR_k...R_1\tilde{U}^{-1}|D|^{-k}$$

où $R_k...R_1\tilde{U}^{-1}|D|^{-k}$ est triangulaire supérieure à coefficients positifs sur la diagonale et $Q_1...Q_k$ est unitaire. On regarde ensuite les entrées de la matrice $D^kL|D|^{-k}$, sous la diagonale elles convergent (géométriquement) vers 0, donc $UD^kL|D|^{-k}$ tend vers une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux valent $e^{ik\arg(\lambda_j)}$. On montre que cela entraine que $Q_1...Q_k$ est équivalent à $P(D/|D|)^k$

$$Q_1...Q_k \approx P(D/|D|)^k, \quad R_k...R_1\tilde{U}^{-1}|D|^{-k} \approx (D/|D|)^{-k}UD^kL|D|^{-k}$$

Donc, $Q_k$ tend à devenir diagonale, et $R_kQ_k = A_{k+1}$ triangulaire supérieure. De plus

$$A = Q_1A_2Q_1^{-1} = ... = Q_1...Q_kA_{k+1}(Q_1...Q_k)^{-1}$$

la matrice $A_{k+1}$ est donc semblable à $A$.

En pratique, on n'impose pas la positivité des coefficients diagonaux de $R$ dans la factorisation $QR$, ce qui ne change évidemment pas le fait que $Q_k$ s'approche d'une matrice diagonale et $A_k$ d'une matrice triangulaire supérieure (avec convergence à vitesse géométrique). On commence aussi par mettre la matrice $A$ sous forme de Hessenberg (par conjugaison par des matrices de Householder), c'est-à-dire presque triangulaire supérieure (on autorise des coefficients non nuls dans la partie inférieure seulement sur la sous-diagonale, $a_{ij} = 0$ si $i > j+1$). Cela réduit considérablement le temps de calcul de la décomposition $QR$, le produit $RQ$ ayant encore cette propriété, une itération se fait en temps $O(n^2)$ au lieu de $O(n^3)$. Le calcul de $RQ$ à partir de $A$ est d'ailleurs fait directement, on parle d'itération $QR$ implicite.

On utilise aussi des "shifts" pour accélerer la convergence, c'est-à-dire qu'au lieu de faire $QR$ et $RQ$ sur la matrice $A_k$ on le fait sur $A_k - \alpha_k I$ où $\lambda_k$ est choisi pour accélerer la convergence vers 0 du coefficient d'indice ligne $n$ colonne $n-1$ (idéalement il faut prendre $\alpha_k$ proche de $\lambda_n$ la valeur propre de module minimal, afin de minimiser $|\lambda_n - \alpha_k|/|\lambda_{n-1} - \alpha_k|$). En effet, si $A_k - \lambda_k I = Q_k R_k$ et $A_{k+1} = R_k Q_k + \lambda_k I$ alors :

$$\begin{aligned}
(A-\alpha_1 I)...(A-\alpha_k I) &= Q_1 R_1 (Q_1 R_1 - (\alpha_2-\alpha_1)I)...(Q_1 R_1 - (\alpha_k - \alpha_1)I) \\
&= Q_1 (R_1 Q_1 - (\alpha_2-\alpha_1)I) R_1 (Q_1 R_1 - (\alpha_3-\alpha_1)I)...(Q_1 R_1 - (\alpha_k-\alpha_1)I) \\
&= Q_1 (A_2 - \alpha_1 I - (\alpha_2-\alpha_1)I) R_1 Q_1 (R_1 Q_1 - (\alpha_3-\alpha_1)I) R_1 ...(Q_1 R_1 - (\alpha_k-\alpha_1)I \\
&= Q_1 (A_2 - \alpha_2 I)(A_2 - \alpha_3 I)...(A_2 - \alpha_k I) R_1 \\
&= ... \\
&= Q_1 ... Q_k R_k ... R_1
\end{aligned}$$

On peut aussi éliminer la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice pour accélerer les calculs dès que le coefficient en ligne $n$ colonne $n-1$ est suffisamment petit.

On remarque que pour une matrice réelle si on choisit des shifts conjugués, alors $Q_1...Q_k R_k ... R_1$ est réel. Or si $QR = \overline{QR}$ et si $R$ est inversible

$$\overline{Q}^{-1} Q = \overline{R} R^{-1}$$

On a donc une matrice symétrique (car $\overline{Q}^{-1} = Q^t$) et triangulaire supérieure. On en déduit que $\overline{Q}^{-1} Q = D$ est diagonale, donc $Q = \overline{Q} D$. On peut donc rendre $Q$ réelle en divisant chaque colonne par un $e^{i\theta}$, et rendre $R$ réelle en conjuguant par la matrice $D$. Mais ce procédé de retour au réel après élimination de 2 valeurs propres complexes conjuguées d'une matrice réelle se heurte à un problème de conditionnement parce que le choix d'un shift intéressant pour la convergence va rendre la matrice $R$ proche d'une matrice non inversible (les deux derniers coefficients diagonaux de $R$ sont proches de 0). On a alors seulement

$$\overline{Q}^{-1} Q R = \overline{R}$$

Si on décompose $\overline{Q}^{-1} Q$, $R$, $\overline{R}$ par blocs $n-2, n-2, n-2, 2, 2, n-2$ et $2, 2$, on a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} QQ_{11} & QQ_{12} \\ QQ_{21} & QQ_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} QQ_{11}R_{11} & QQ_{21}R_{11} \\ QQ_{11}R_{12} + QQ_{12}R_{22} & QQ_{21}R_{12} + QQ_{22}R_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \overline{R}_{11} & \overline{R}_{12} \\ 0 & \overline{R}_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc on a $QQ_{11} = \overline{R}_{11}R_{11}^{-1}$. Comme $Q$ est unitaire, $QQ = \overline{Q}^{-1}Q = Q^t\,Q$ est symétrique, donc $QQ_{11}$ est diagonale puisque symétrique et triangulaire supérieure. On peut donc ramener $Q_{11}$ et $R_{11}$ en des matrices réelles. L'algorihtme des itérations $QR$ implicites traite de manière efficace le cas des couples de valeurs propres complexes conjuguées ou plus généralement de clusters de valeurs propres, c'est l'algorithme de Francis (aussi appelé *bulge chasing* en anglais, qu'on pourrait traduire par "à la poursuite du bourrelet", cela vient de la forme que prend la matrice après application d'un shift, elle a des entrées non nulles en première colonne plus bas que la sous-diagonale qui forment un bourrelet non nul, l'annulation de ces entrées par des transformations de Householder déplace le bourrelet sur la colonne suivante).

Revenons à la localisation des valeurs propres On suppose qu'on a maintenant une matrice unitaire $P$ et une matrice triangulaire supérieure $S$ (aux erreurs d'arrondi près) telles que

$$P^{-1}AP = S$$

Que peut-on en déduire ?[2] On va d'abord arrondir $P$ en une matrice exacte à coefficients rationnels, dont les dénominateurs sont une puissance de 2 (en fait c'est exactement ce que donne l'écriture d'un flottant en base 2, une fois ramené tous les exposants à la même valeur). On a donc une matrice $P_e$ presque unitaire exacte et telle que

$$S_e = P_e^{-1}AP_e$$

est semblable à $A$, et presque triangulaire supérieure. (comme $P_e$ est presque unitaire, sa norme et la norme de son inverse sont proches de 1 donc $S_e$ est proche de $S$, les coefficients de $S_e$ sont de la même taille que les coefficients de $A$ : le changement de base est bien conditionné et c'est la raison pour laquelle on a choisi d'effectuer des transformations unitaires).

Notons $\mu_1, ..., \mu_n$ les coefficients diagonaux de $S_e$, soit $\varepsilon$ un majorant de la norme des coefficients sous-diagonaux de $S_e$, et soit $\delta$ un minorant de l'écart entre 2 $\mu_j$ distincts. On a donc $S_e = U + E$ où $U$ est triangulaire supérieure, $E$ est triangulaire inférieure avec des 0 sous la diagonale et des coefficients de module majorés par $\varepsilon$. Si $\varepsilon$ est suffisamment petit devant $\delta$, on va montrer qu'on peut localiser les valeurs propres de $S_e$ (qui sont celles de $A$) au moyen des $\mu_j$.

En effet, fixons $j$ et soit $C$ un cercle de centre $\mu = \mu_j$ et de rayon $\alpha \leq \delta/2$. Si $A$ est une matrice diagonalisable, on sait que

$$\text{nombre de valeurs propres} \in C = \frac{1}{2i\pi}\text{trace}\int_C (A - zI)^{-1}$$

En prenant $A = S_e$, et en écrivant

$$(S_e - zI)^{-1} = (U - zI + E)^{-1} = (I + (U - zI)^{-1}E)^{-1}(U - zI)^{-1}$$

on développe le second terme si la norme de $(U-zI)^{-1}E$ est strictement inférieure à 1

$$(S_e-zI)^{-1} = (U-zI)^{-1}-(U-zI)^{-1}E(U-zI)^{-1}+(U-zI)^{-1}E(U-zI)^{-1}E(U-zI)^{-1}+...$$

2. Si $A$ est la matrice companion d'un polynôme, une autre approche consiste à rechercher un rectangle du plan complexe stable par itérée de la méthode de Newton ou à calculer les disques de centre les coefficients diagonaux et de rayon le degré du polynôme divisé par un minorant de la dérivée du polynôme par la valeur du polynôme

puis on calcule la trace

$$\text{trace}(S_e - zI)^{-1} = \sum_j (\mu_j - z)^{-1} + \eta$$

avec

$$|\eta| \leq 2\pi\alpha ||(U - zI)^{-1}|| \frac{||(U - zI)^{-1}E||}{1 - ||(U - zI)^{-1}E||}$$

Au final, le nombre de valeurs propres dans $C$ est donné par

$$1 + \tilde{\eta}, \quad |\tilde{\eta}| \leq \alpha \text{max}_{z \in C} ||(U - zI)^{-1}|| \frac{||(U - zI)^{-1}E||}{1 - ||(U - zI)^{-1}E||}$$

Il suffit donc que le max soit plus petit que 1 pour avoir l'existence d'une valeur propre et une seule de $S_e$ dans le cercle $C$ (à distance au plus $\alpha$ de $\mu$). Ce sera le cas si

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\delta}{2||S_e||} \right)^{n-1} \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}}$$

on choisit donc $\alpha$ pour réaliser l'égalité ci-dessus, sous réserve que $\delta$ ne soit pas trop petit, rappelons que $\alpha$ doit être plus petit ou égal à $\delta/2$. Si $\delta$ est petit, il peut être nécessaire d'utiliser une précision plus grande pour les calculs de la décomposition de Schur en arithmétique flottante.

Typiquement, on peut espérer (pour un écart $\delta$ pas trop petit) pouvoir localiser les racines d'un polynôme de degré $n$ par cette méthode avec précision $b$ bits en $O(n^3b^2 + n^2b^3)$ opérations pour le calcul de la décomposition de Schur en flottant ($n^3b^2$ pour Hessenberg initial puis $n^2b^2$ par itération et un nombre d'itérations proportionnel à $b$). Pour le calcul exact de $S_e$, il faut inverser une matrice de taille $n$ avec des coefficients de taille proportionnelle à $b$ donc $O(n^4 b \ln(n))$ opérations (en modulaire, la taille des coefficients de l'inverse est $O(nb \ln(n))$) puis calculer un produit avec une matrice $n, n$ de coefficients de taille proportionnelle à $b$, soit $O(n^4b^2 \ln(nb))$ opérations. Asymptotiquement, on peut faire mieux avec des méthodes de multiplication et d'opérations matricielles par blocs. Pour éviter la perte d'un facteur $n$, on peut aussi ne pas faire de calculs en mode exact et controler les erreurs sur la matrice $S$. On peut regrouper les valeurs propres par "clusters" si elles sont trop proches à la précision de $b$ bits. Pour la recherche des racines d'un polynôme $P$, on peut montrer, en calculant le résultant de $P$ et de $P'$ qui est en module plus grand ou égal à 1, et en l'écrivant comme produit des carrés de différences des racines, et en majorant toutes les différences de racine sauf une à l'aide de la norme infinie de $P$, qu'il faut au pire $b = O(n)$ bits pour séparer les racines).

## 22.11 Quelques références


— Comme toujours on renvoie à l'excellent livre de Henri Cohen : A Course in Computational Algebraic Number Theory
— Gantmacher : Théorie des matrices
— Press et al. : Numerical recipies in Fortran/C/Pascal.
Pour des algorithmes numériques (sur les matrices et autres).

## 22.12 Exercices (algèbre linéaire)

### 22.12.1 Instructions

— Les commandes d'algèbre linéaire de Xcas sont regroupées dans le menu `Cmds->Alglin`. En maple V, la commande `?linalg` affiche la liste des commandes d'algèbre linéaire.
— En maple V il est conseillé d'exécuter `with(linalg);`, sinon il faut précéder chaque commande de `linalg::`. Attention il faut utiliser le caractère `&` avant la multiplication et il faut souvent utiliser `evalm` dans les programmes utilisant des matrices et vecteurs. Notez aussi que les matrices sont toujours passées par référence en maple V, en Xcas le choix revient à l'utilisateur (affectation par := par valeur ou par =< par référence)
— Pour travailler avec des coefficients modulaires, en Xcas on fait suivre les coefficients ou matrices de `% n` (utiliser `% 0` pour enlever les modulos), en maple V, on utilise les noms de commandes avec une majuscule (forme inerte) suivi de `mod n`.

### 22.12.2 Exercices

1. Écrire un programme calculant l'inverse d'une matrice en utilisant sa décomposition $LU$. Tester avec une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ puis dans un corps fini non premier. Que se passe-t-il sur $\mathbb{Q}$ ?
2. En utilisant un logiciel de calcul formel, comparez le temps de calcul d'un déterminant de matrice aléatoire de tailles 50, 100 et 200 à coefficients dans un corps fini, puis dans les entiers.
   Même question pour une matrice de taille 20, 40 et 80 dans des polynômes de degré 2 à 1 variables sur un corps fini premier.
   Même question pour une matrice de taille 6 et 12 avec comme coefficients symboliques ligne $j$ colonne $k$, $x_{j+k}$ lorsque $j+k$ est pair et 0 sinon. Peut-on en déduire une indication sur l'algorithme utilisé ?
3. Écrire un programme calculant la borne de Hadamard d'un déterminant à coefficients réels (rappel : c'est la borne obtenue en faisant le produit des normes euclidiennes des vecteurs colonnes).
   Créez une matrice 4x4 aléatoire avec des coefficients entiers compris entre -100 et 100, calculer la borne de Hadamard de son déterminant avec le programme précédent, calculer ce déterminant modulo quelques nombres premiers choisis en fonction de la borne de Hadamard et vérifiez le résultat de la reconstruction modulaire du déterminant.
4. Créez une matrice 100x100 aléatoire à coefficients entiers et calculez son déterminant modulo quelques nombres premiers. Dans quels cas peut-on conclure que la matrice est inversible dans $\mathbb{R}$ ? dans $\mathbb{Z}$ ?
5. Écrire un programme calculant par interpolation de Lagrange (`interp`) le polynôme caractéristique d'une matrice (en donnant à $\lambda$ de $\det(\lambda I - A)$, $n+1$ valeurs distinctes).
6. Recherche du polynôme minimal (Krylov). On prend un vecteur aléatoire à coefficients entiers et on calcule $v$, $Av$, ..., $A^n v$ puis on cherche une relation linéaire minimale entre ces vecteurs, en calculant le noyau de la ma-

trice ayant ces vecteurs colonnes. Si le noyau est de dimension 1, alors le polynôme minimal est égal au polynome caractéristique et correspond à un vecteur de la base du noyau. Sinon, il faut choisir un vecteur du noyau correspondant au degré le plus petit possible puis faire le PPCM avec les polynomes obtenus avec d'autres vecteurs pour obtenir le polynôme minimal avec une grande probabilité. Essayez avec la matrice $A$ de taille 3 ayant des 0 sur la diagonale et des 1 ailleurs. Écrire un programme mettant en oeuvre cette recherche, testez-le avec une matrice aléatoire de taille 30.

7. (Long) Écrire un programme qui calcule un déterminant de matrice en calculant les mineurs 2x2 puis 3x3 etc. (méthode de Laplace)

8. Testez l'algorithme méthode de Fadeev pour la matrice $A$ ci-dessus. Même question pour

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Écrire un programme calculant par une méthode itérative la valeur propre de module maximal d'une matrice à coefficients complexes. Dans le cas réel, modifier le programme pour pouvoir traiter le cas d'un couple de complexes conjugués de module maximal. Dans le cas hermitien ou réel symétrique, éliminer le couple valeur propre/vecteur propre et continuer la diagonalisation numérique.

10. Soient $|a|, |b| < \sqrt{n/2}$ Écrire une fonction ayant comme arguments $a/b \pmod n$ qui calcule $a$ et $b$.
Utiliser ce programme pour résoudre un système 4,4 à coefficients entiers par une méthode $p$-adique.

# Chapitre 23

# Approximation polynomiale

On présente dans cette section quelques méthodes d'approximation de fonctions par des polynômes sur un intervalle, la section suivante présente des méthodes d'approximation près d'un point ou de l'infini.

## 23.1 Polynôme de Lagrange

Étant donné la facilité de manipulation qu'apportent les polynomes, on peut chercher à approcher une fonction par un polynôme. La méthode la plus naturelle consiste à chercher un polynôme de degré le plus petit possible égal à la fonction en certains points $x_0, ..., x_n$ et à trouver une majoration de la différence entre la fonction et le polynôme. Le polynome interpolateur de Lagrange répond à cette question.

### 23.1.1 Existence et unicité

Soit donc $x_0, ..., x_n$ des réels distincts et $y_0, ..., y_n$ les valeurs de la fonction à approcher en ces points (on posera $y_j = f(x_j)$ pour approcher la fonction $f$). On cherche donc $P$ tel que $P(x_j) = y_i$ pour $j \in [0, n]$.

Commencons par voir s'il y a beaucoup de solutions. Soit $P$ et $Q$ deux solutions distinctes du problème, alors $P - Q$ est non nul et va s'annuler en $x_0, ..., x_n$ donc possède $n + 1$ racines donc est de degré $n + 1$ au moins. Réciproquement, si on ajoute à $P$ un multiple du polynome $A = \prod_{j=0}^{n}(X - x_j)$, on obtient une autre solution. Toutes les solutions se déduisent donc d'une solution particulière en y ajoutant un polynome de degré au moins $n + 1$ multiple de $A$, et on prenant le reste euclidien de la division par $A$ on en déduira une solution de degré au plus $n$.

Nous allons maintenant construire cette solution particulière de degré au plus $n$. Si $n = 0$, on prend $P = x_0$ constant. On procède ensuite par récurrence. Pour construire le polynôme correspondant à $x_0, ..., x_{n+1}$ on part du polynoôme $P_n$ correspondant à $x_0, ..., x_n$ et on lui ajoute un multiple réel de $A$

$$P_{n+1} = P_n + \alpha_{n+1} \prod_{j=0}^{n}(X - x_j)$$

Ainsi on a toujours $P_{n+1}(x_j) = y_j$ pour $j = 0, ..n$, on calcule maintenant $\alpha_{n+1}$ pour que $P_{n+1}(x_{n+1}) = y_{n+1}$. En remplacant avec l'expression de $P_{n+1}$ ci-dessus,

on obtient

$$P_n(x_{n+1}) + \alpha_{n+1} \prod_{j=0}^{n} (x_{n+1} - x_j) = y_{n+1}$$

Comme tous les $x_j$ sont distincts, il existe une solution unique :

$$\alpha_{n+1} = \frac{y_{n+1} - P_n(x_{n+1})}{\prod_{j=0}^{n}(x_{n+1} - x_j)}$$

On a donc prouvé le :

**Théorème 57** *Soit $n+1$ réels distincts $x_0, ..., x_n$ et $n+1$ réels quelconques $y_0, ..., y_n$. Il existe un unique polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $n$, appelé polynome de Lagrange, tel que :*

$$P(x_i) = y_i$$

Exemple : déterminons le polynome de degré inférieur ou égal à 2 tel que $P(0) = 1, P(1) = 2, P(2) = 1$. On commence par $P_0 = 1$. Puis on pose $P_1 = P_0 + \alpha_1 X = 1 + \alpha_1 X$. Comme $P(1) = 2 = 1 + \alpha_1$ on en tire $\alpha_1 = 1$ donc $P_1 = 1 + X$. Puis on pose $P_2 = P_1 + \alpha_2 X(X-1)$, on a $P_2(2) = 3 + 2\alpha_2 = 1$ donc $\alpha_2 = -1$, finalement $P_2 = 1 + X - X(X-1)$.

```
P:=interp([0,1,2],[1,2,1]);
```

$$(-x + 1 + 1)\, x + 1$$

### 23.1.2 Majoration de l'erreur d'interpolation.

Reste à estimer l'écart entre une fonction et son polynome interpolateur, on a le :

**Théorème 58** *Soit $f$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, $x_0, ..., x_n$ des réels distincts de $I$. Soit $P$ le polynome de Lagrange donné par les $x_j$ et $y_j = f(x_j)$. Pour tout réel $x \in I$, il existe un réel $\xi_x \in [a, b]$ (qui dépend de $x$) tel que :*

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{[n+1]}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \tag{23.1}$$

Ainsi l'erreur commise dépend d'une majoration de la taille de la dérivée $n+1$-ième sur l'intervalle, mais aussi de la disposition des points $x_j$ par rapport à $x$. Par exemple si les points $x_j$ sont équidistribués, le terme $|\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)|$ sera plus grand près du bord de $I$ qu'au centre de $I$.

Preuve du théorème : Si $x$ est l'un des $x_j$ l'égalité est vraie. Soit

$$C = (f(x) - P(x)) / \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

on considère maintenant la fonction :

$$g(t) = f(t) - P(t) - C \prod_{j=0}^{n} (t - x_j)$$

elle s'annule en $x_j$ pour $j$ variant de 0 à $n$ ainsi qu'en $x$ suite au choix de la constante $C$, donc $g$ s'annule au moins $n+2$ fois sur l'intervalle contenant les $x_j$ et $x$, donc $g'$ s'annule au moins $n+1$ fois sur ce même intervalle, donc $g''$ s'annule au moins $n$ fois, etc. et finalement $g^{[n+1]}$ s'annule une fois au moins sur cet intervalle. Or

$$g^{[n+1]} = f^{[n+1]} - C(n+1)!$$

car $P$ est de degré inférieur ou égal à $n$ et $\prod_{j=0}^{n}(x-x_j) - x^{n+1}$ est de degré inférieur ou égal à $n$. Donc il existe bien un réel $\xi_x$ dans l'intervalle contenant les $x_j$ et $x$ tel que

$$C = \frac{f^{[n+1]}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

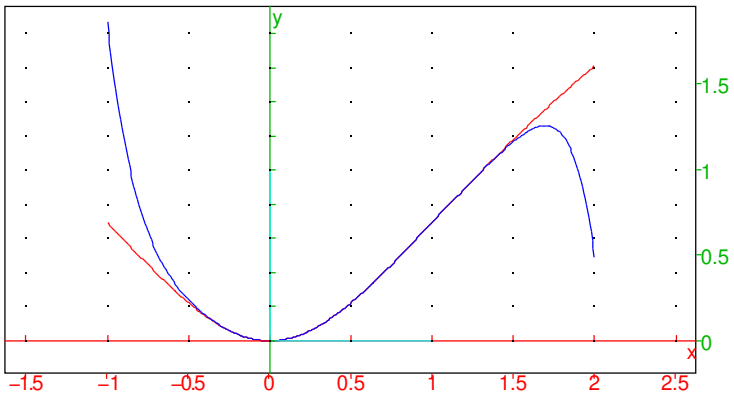
```
f(x):=ln(x^2+1); n:=10; X:=evalf(seq(j/n,j,0,n
)); Y:=map(X,f);
```

$$x \mapsto \ln\left(x^2+1\right), 10, [0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0], [0.0, 0.00995033085317, 0.0392207131533$$

```
P:=interp(X,Y);
```

$$(((((((((-0.0178001249166\,(x-0.9) - 0.0363274736916)\,(x-0.8) + 0.115803003415)\,(x-0.7) - 0.130300$$

```
plot([f(x),P],x=-1..2,color=[red,blue])
```




```
plot(1e7*abs(f(x)-P),x=0..1)
```




Attention, l'erreur d'interpolation peut devenir très grande lorsqu'on utilise beaucoup de points d'interpolation.

### 23.1.3 Calcul efficace du polynôme de Lagrange.

Avec la méthode de calcul précédent, on remarque que le polynôme de Lagrange peut s'écrire à la Horner sous la forme :

$$\begin{aligned} P(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + ... + \alpha_n(x-x_0)...(x-x_{n-1}) \\ &= \alpha_0 + (x-x_0)(\alpha_1 + (x-x_1)(\alpha_2 + ... + (x-x_{n-2})(\alpha_{n-1} + (x-x_{n-1})\alpha_n)...)) \end{aligned}$$

ce qui permet de le calculer rapidement une fois les $\alpha_i$ connus. On observe que

$$\alpha_0 = f(x_0), \quad \alpha_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

On va voir que les $\alpha_k$ peuvent aussi se mettre sous forme d'une différence. On définit les différences divisées d'ordre $n$ par récurrence

$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, ..., x_{k+i+1}] = \frac{f[x_{i+1}, ..., x_{k+i+1}] - f[x_i, ..., x_{k+i}]}{x_{k+i+1} - x_i}$$

On va montrer que $\alpha_k = f[x_0, ..., x_k]$. C'est vrai au rang 0, il suffit donc de le montrer au rang $k+1$ en l'admettant au rang $k$. Pour cela on observe qu'on peut construire le polynôme d'interpolation en $x_0, ..., x_{k+1}$ à partir des polynômes d'interpolation $P_k$ en $x_0, ..., x_k$ et $Q_k$ en $x_1, ..., x_{k+1}$ par la formule :

$$P_{k+1}(x) = \frac{(x_{k+1} - x)P_k + (x - x_0)Q_k}{x_{k+1} - x_0}$$

en effet on vérifie que $P_{k+1}(x_i) = f(x_i)$ pour $i \in [1, k]$ car $P_k(x_i) = f(x_i) = Q_k(x_i)$, et pour $i = 0$ et $i = k+1$, on a aussi $P_{k+1}(x_0) = f(x_0)$ et $P_{k+1}(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$. Or $\alpha_{k+1}$ est le coefficient dominant de $P_{k+1}$ donc c'est la différence du coefficient dominant de $Q_k$ et de $P_k$ divisée par $x_{k+1} - x_0$, c'est-à-dire la définition de $f[x_0, ..., x_{k+1}]$ en fonction de $f[x_1, ..., x_{k+1}]$ et $f[x_0, ..., x_k]$.

Exemple : on reprend $P(0) = 1, P(1) = 2, P(2) = 1$. On a

| $x_i$ | $f[x_i]$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_0, x_1, x_2]$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\boxed{1}$ | | |
| | | $(2-1)/(1-0) = \boxed{1}$ | |
| 1 | 2 | | $(-1-1)/(2-0) = \boxed{\text{-1}}$ |
| | | $(1-2)/(2-1) = -1$ | |
| 2 | 1 | | |

donc $P(x) = \boxed{1} + (x-0)(\boxed{1} + (x-1)(\boxed{\text{-1}})) = 1 + x(2-x)$.

On peut naturellement utiliser l'ordre que l'on souhaite pour les $x_i$, en observant que le coefficient dominant de $P$ ne dépend pas de cet ordre, on en déduit que $f[x_0, ..., x_k]$ est indépendant de l'ordre des $x_i$, on peut donc à partir du tableau ci-dessus écrire $P$ par exemple avec l'ordre 2,1,0, sous la forme

$$P(x) = 1 + (x-2)(-1 + (x-1)(-1)) = 1 + (x-2)(-x)$$

Le nombre d'opérations nécessaires pour faire ce calcul est proportionnel à $n^2$.

La commande Xcas `interp` ou son synonyme `lagrange` effectue ce calcul. Pour avoir les différences divisées, on peut appeler `interp` en ajoutant en dernier paramètre `lagrange`

```
X:=[0,1,2]; A:=lagrange(X,[1,2,1],lagrange);
```

$$[0, 1, 2], [1, 1, -1]$$

ou créer le programme suivant :

```
dd(X,Y):={ // Algorithme des différences divisées
  local k,l,n,A,old,cur;
  si size(X)!=size(Y) alors return "erreur" fsi;
  n:=size(X)-1;
  A:=[Y[0]];
  old:=Y;
  pour k de 1 jusque n faire
    // calcul de cur en fonction de old
```

```
    cur:=[];
    pour l de 0 jusque n-k faire
      cur[l]:=(old[l+1]-old[l])/(X[l+k]-X[l])
    fpour;
    A[k]:=cur[0];
    old:=cur;
  fpour;
  retourne A;
}:;
```

```
X:=[0,1,2];A:=dd(X,[1,2,1])
```

$$[0, 1, 2], [1, 1, -1]$$

(N.B. pour rendre ce programme optimal, il faudrait utiliser l'affectation en place =< au lieu de :=).

L'évaluation d'un polynôme d'interpolation à partir des différences divisées se fait en $O(n)$ opérations par un algorithme à la Horner qui consiste à évaluer de l'intérieur vers l'extérieur la forme semi-factorisée du polynôme en fonction des différences divisées et des points d'interpolation. Cet algorithme est implémenté par la commande `horner` de Xcas, on lui passe les deux listes qui représentent le polynôme :

```
horner(A,X,1.5)
```

$$1.75$$

Remarque : on peut exprimer l'erreur d'interpolation avec les différences divisées. Si $P_n$ est le polynôme d'interpolation de $f$ en $x_0, ..., x_n$ alors

$$P_n(t) = f[x_0] + (t - x_0)f[x_0, x_1] + ... + (t - x_0)..(t - x_{n-1})f[x_0, .., x_n]$$

en ajoutant $x$ comme point d'interpolation on obtient un polynôme $P_{n+1}(t)$ qui coincide avec $f$ en $t = x$ donc

$$f(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + ... + (x - x_0)..(x - x_n)f[x_0, .., x_n, x] \quad (23.2)$$

et en faisant la différence

$$P_n(x) - f(x) = (x - x_0)..(x - x_n)f[x_0, .., x_n, x] \quad (23.3)$$

On en déduit aussi que $f[x_0, ..., x_n, x] = f^{[n+1]}(\xi_x)/(n + 1)!$.

### 23.1.4 Sensibilité aux erreurs sur les données.

Si les $y_j$ sont connus avec une certaine erreur, alors le polynôme d'interpolation est connu de manière approchée. Plus précisément, si on note

$$\pi_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

le $j$-ième polynome de Lagrange valant 1 en $x_j$ et 0 ailleurs, l'erreur vaut :

$$\sum_j (\tilde{y}_j - y_j)\pi_j(x)$$

Si l'erreur relative sur les $y_j$ est majorée par $\epsilon$, l'erreur sur le polynôme d'interpolation est majorée par :

$$\epsilon \max_j |y_j| \sum_j |\pi_j(x)|$$

il y a amplification de l'erreur par un facteur majoré par

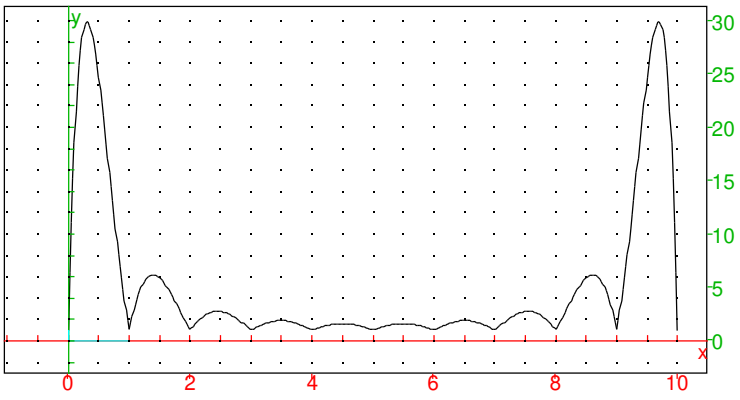
$$\max_{x\in[a,b]} \sum_{j=0}^{n} |\pi_j(x)|$$

Ce facteur s'appelle **constante de Lebesgue** relative à la subdivision $x_0, ..., x_n$ de $[a, b]$. On peut le calculer numériquement pour une subdivision équidistribuée, et montrer qu'il croit comme $\frac{2^{n+1}}{en\ln(n)}$, par exemple pour $n = 40$, il vaut environ `5e9`. Illustration avec Xcas :

```
restart;l(k,n):=product((x-j)/(k-j),j,0,k-1
)*product((x-j)/(k-j),j,k+1,n);
```

$[A, D, F, G, I, J, N, P, P_0, Q, X, Y, a, b, c, d, \mathbf{d}, \text{dunford}, f, \text{fl}, g, h, \text{jacobi}, k, l, m, n, p, q, r, s, \text{seidel}, \text{sy}$

```
n:=10; f:=add(abs(l(k,n)),k,0,n); plot(f,x=0..n)
```




puis essayer avec $n = 20$. Pour $n = 40$, en observant que le max est atteint dans $[0, 1]$, on peut remplacer les valeurs absolues par la bonne puissance de -1

```
n:=40; g:=l(0,n)+add((-1)^(k+n-1)*l(k,n),k,1,n)
```

$$40, -\frac{(-x+1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)(x-12)(x-1}{2\cdot 3}$$

on a alors un polynôme, dont on calcule l'abscisse du maximum par

```
g1:=normal(g'); l:=realroot(g1,1e-12,evalf)
```

$$-\frac{78536544841}{14569915772283888113314486957073498112000000000}x^{39}+\frac{2443359172831}{581136241629556790844452471222304768000}$$

puis `subst(g,x=l[0])`

$$4692451395.31$$

qui donne environ `4.7e9`.

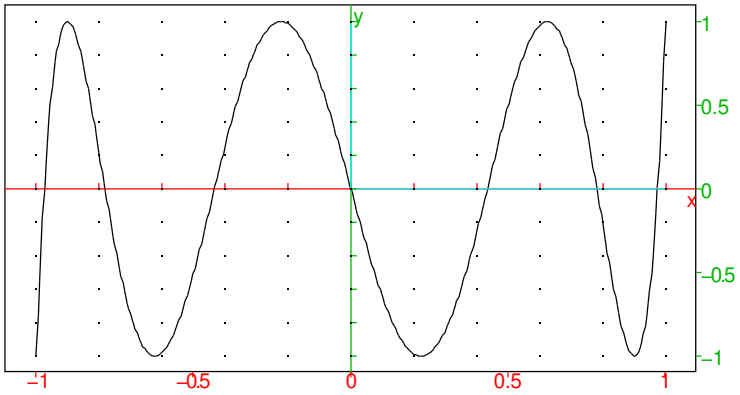
## 23.2 Interpolation aux points de Tchebyshev

L'idée la plus naturelle pour interpoler un polynôme en $n+1$ points d'un intervalle $[a,b]$ consiste à couper en $n$ morceaux de même longueur. Mais ce n'est pas le plus efficace car le terme $|\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)|$ est plus grand près des bords. Il est donc plus judicieux d'avoir plus de points près des bords et moins à l'intérieur. C'est là qu'interviennent les polynômes de Tchebyshev, ils sont définis par développement de $\cos(nx)$ en puissances de $\cos(x)$ :

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

Sur $[-1,1]$, le polynôme $T_n$ vaut en valeur absolue au plus 1, et atteint cette valeur exactement $n+1$ fois lorsque $x = k\pi/n$ donc $X = \cos(x) = \cos(k\pi/n)$.

```
n:=7; plot(tchebyshev1(n),x=-1..1)
```




De plus cette majoration est optimale. En effet soit $U$ un polynôme de degré au plus $n$ qui vérifie $|U|_\infty < 1$ sur $[-1,1]$ et tel que $U$ ait le même co-

efficient dominant que $T_n$. Alors la différence $T_n - U$ est du signe de $T_n$ en $X = \cos(k\pi/n), k \in [0, n]$ puisqu'en ces points $T_n$ est extrêmal de valeur absolue 1. Donc $T_n - U$ s'annule $n$ fois sur $[-1, 1]$, mais son degré est au plus $n - 1$ donc $T_n = U$ absurde.

On a donc intérêt à prendre les abscisses des points d'interpolation en les racines $t_n$ de $T_n$

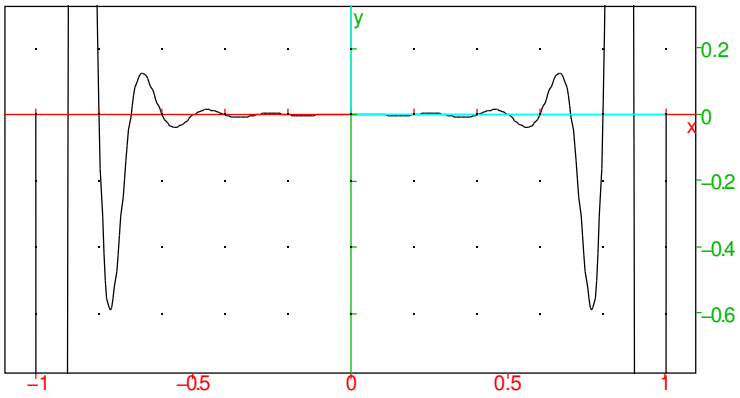
$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} t_n, \quad t_n = \cos((k + \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}), \quad k = 0..n-1$$

On pourra observer que le phénomène de Runge qui apparait par exemple pour $f(x) = 1/(25x^2 + 1)$ sur $[-1, 1]$ avec des points d'interpolation équidistants n'apparait plus si on prend des points de Tchebyshev.

```
f(x):=1/(1+25x^2); n:=20; X:=seq(2*j/n-1.0,j,0,n
);
```

$$x \mapsto \frac{1}{1+25x^2}, 20, [-1.0, -0.9, -0.8, -0.7, -0.6, -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.$$

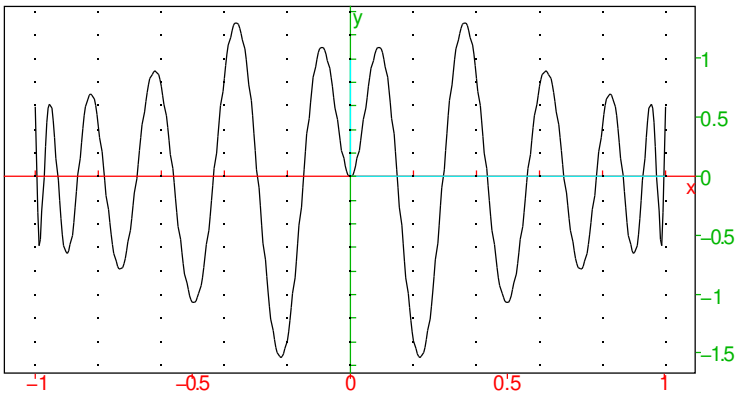
```
l:=lagrange(X,map(X,f)):; plot(l-f(x),x=-1..1)
```




```
T:=seq(cos((j+0.5)*pi/(n+1)),j,0,n);
```

$$\left[0.997203797181, 0.974927912182, 0.930873748644, 0.866025403784, 0.781831482468, 0.680172737\right.$$

```
l:=lagrange(T,map(T,f)):; plot(100*(l-f(x
)),x=-1..1)
```



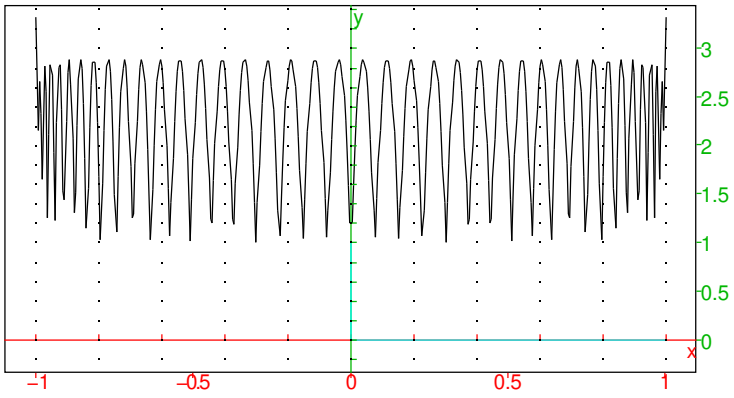

Ceci est relié à la constante de Lebesgue qui pour des points de Tchebyshev vaut un peu moins de 4 pour $n < 100$ (se comporte comme $\frac{2}{\pi}\ln(n)$ pour $n$ grand), on peut montrer que les polynômes de Lagrange aux points de Tchebyshev convergent uniformément vers $1/(25x^2+1)$ (c'est plus généralement vrai pour toute fonction $C^1$ sur l'intervalle).

Remarque : ce n'est pas le polynôme de meilleure approximation, de $f$ (celui qui minimise la norme $L^\infty$ de la différence) car la dérivée $n+1$-ième varie en général sur $[a,b]$. Mais il est trop difficile de le calculer en général.

Exemple de calcul explicite de constante de Lebesgue pour $n = 40$ avec Xcas

```
purge(x);
t(k,n):={
 local T;
 T:=seq(cos(pi*(k+.5)/(n+1)),k,0,n);
 return product((x-T[j])/(T[k]-T[j]),j,0,k-1)*
  product((x-T[j])/(T[k]-T[j]),j,k+1,n);
}:;
```

```
n:=40; f:=add(abs(t(k,n)),k,0,n):;plot(f,x=-1..1)
```




## 23.3 Interpolation de Hermite

Si on fait tendre un des points d'interpolation vers un autre, la donnée de la valeur en ces 2 points serait redondante, elle est remplacée par la valeur de la dérivée. Dans le calcul des différences divisées ci-dessus on fera comme si les 2 points étaient distincts et successifs, disons $x_i$ et $x_{i+1}$, on remplace le rapport indéterminé

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{0}{0}$$

par $f'(x_i)$. On montre qu'une fois ce changement réalisé tout le reste est identique (y compris la majoration d'erreur). On peut bien sur généraliser au cas de plusieurs paires de points identiques ou des multiplicités plus grandes faisant intervenir des dérivées d'ordre supérieures, dans ce cas la différence divisée $f[x_i, ..., x_{i+m}]$ sera remplacée par $f^{[m]}(x_i)/m!$.

## 23.4 Polynômes de Bernstein et courbes de Bézier

Les polynômes de Bernstein de degré $m$ sont les

$$B_k^n(x) = \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k (1-x)^{n-k}$$

On reconnait la probabilité d'avoir $k$ succès si on effectue $n$ tirages indépendants (avec remise) avec probabilité $x \in [0,1]$ de succès par tirage. Ceci donne une relation de récurrence

$$B_{k+1}^{n+1} = (1-x)B_{k+1}^n + xB_k^n$$

qui peut servir à calculer les $B_i^m$. On en déduit aussi que l'espérance de $k$ selon cette loi vaut $nx$ (somme de $n$ variables d'espérance $x$) et l'espérance de $(k-nx)^2$ vaut $nx(1-x)$ (variance de la somme de $n$ variables indépendantes de variance $x$). On en déduit qu'on peut approcher uniformément une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ par des polynômes, en se ramenant à $a=0, b=1$, on pose :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) B_k^n(x)$$

En effet, par continuité uniforme de $f$ sur $[0,1]$, pour $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon/2$, dans

$$P_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} (f(\frac{k}{n}) - f(x)) B_k^n(x)$$

on décompose la somme sur $k$ en deux parties, $|k/n - x| < \delta$ et $|k/n - x| \geq \delta$, pour la première somme, on majore $|f(\frac{k}{n}) - f(x)|$ par $\epsilon/2$ puis par $\sum_{k=0}^n$, pour la deuxième somme, on majore par $2|f|_\infty$ et on utilise $1 < (k/n-x)^2/\delta^2 = 1/n^2/\delta^2(k-nx)^2$ pour se ramener au calcul de la variance de $k$, au final

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{n^2\delta^2} nx(1-x)|f|_\infty$$

il suffit de choisir $n$ assez grand pour rendre le membre de droite plus petit que $\epsilon$.

Les polynômes de Bernstein ne sont pas des polynômes interpolateurs aux points $k/n$, $0 < k < n$, et la convergence n'est pas forcément très rapide. On les utilise pour approcher rapidement des morceaux de courbes, si on se donne des "points de controle" $A_0, ..., A_n$ on construit la courbe paramétrée

$$A(t) = \sum_{k=0}^{n} A_k \left( \begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) x^i (1-x)^{n-i}$$

appelée courbe de Bézier. En pratique on les utilise pour $n = 3$.

## 23.5 Polynômes orthogonaux.

Il s'agit d'une autre méthode d'approximation, particulièrement important pour l'intégration : les polynômes de meilleur approximation au sens de normes $L^2$ ou

$L^2$ à poids $w(x) > 0$ sur l'intervalle de bornes $\alpha$ et $\beta$ (finis ou infinis). On considère le produit scalaire

$$< f|g >= \int_\alpha^\beta w(x)f(x)g(x)\ dx$$

et on projette alors la fonction à approcher sur une base de polynômes orthogonaux de degrés croissants construit par la procédure de Gram-Schmidt à partir de la base canonique pour le produit scalaire ci-dessus.

**Proposition 59** *Le polynôme $P_n$ de degré $n$ obtenu par orthogonalisation de Gram-Schmidt pour le produit scalaire $\int_\alpha^\beta w(x)f(x)g(x)\ dx$ possède $n$ racines réelles.*

En effet, soit $r$ le nombre de racines réelles de $P_n$, on pose $f = P_n$ et $g = \prod_{i=1}^r (x - x_i)$, $wfg$ est de signe constant et non identiquement nul donc $< f|g > \neq 0$ donc $r = n$ sinon $g$ serait de degré strictement plus petit que $n$ donc orthogonal à $P_n$.

On peut aussi construire ces polynômes en cherchant les valeurs propres de

$$T(f) = \frac{1}{w}(awf')'$$

où $a > 0$ est un polynôme de degré au plus 2 sur $]\alpha, \beta[$, tel que $aw$ s'annule (ou dont le produit par un polynôme tend vers 0) aux bornes de l'intervalle d'intégration : si $\alpha$ et $\beta$ sont finis $a(x) = (x - \alpha)(\beta - x)$. On a alors

$$< T(f)|g >= \int_\alpha^\beta (awf')'g = [awf'g]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta awg'f' = -\int_\alpha^\beta awg'f'$$

car le terme tout intégré s'annule (puisque $aw$ s'annule en $\alpha$ et $\beta$). Donc $< T(f)|g >=< f|T(g) >$ est symétrique, les vecteurs propres de $T$ correspondant à des valeurs propres distinctes sont donc orthogonaux entre eux. Pour trouver ces valeurs propres/polynômes vecteurs propres, on écrit $T(P_n) = \lambda_n P_n$ pour un polynôme $P_n$ de degré $n$. Si $aw'/w$ est un polynôme de degré au plus 1, le terme de degré dominant de cette équation donne la valeur de $\lambda_n$ et les termes de degré plus petits permettent en général de déterminer de manière unique les coefficients de $P_n$ en fonction du coefficient dominant.

Pour certains poids $w(x)$ standards, les polynômes obtenus ont un nom :

— Legendre pour $w(x) = 1$ sur $[-1, 1]$, $a(x) = 1 - x^2$
— Hermite pour $w(x) = e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$, $a(x) = 1$
— Laguerre pour $w(x) = x^a e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$,
— Tchebyshev de première espèce pour $w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ sur $[-1, 1]$, $a(x) = 1 - x^2$
— Tchebyshev de deuxième espèce pour $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$ sur $[-1, 1]$, $a(x) = 1 - x^2$

Ainsi, les polynômes de Legendre vérifient

$$((1 - x^2)P_n')' = \lambda_n P_n$$

Le terme de degré $n$ de cette équation donne $\lambda_n = -n(n + 1)$, le terme sous-dominant est nul. Plus généralement, le terme de degré $k$ vérifie

$$(k+2)(k+1)p_{k+2} - k(k+1)p_k = -n(n+1)p_k \Rightarrow p_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+2)(k+1)}p_k \tag{23.4}$$

Ceci permet de calculer le polynôme $P_n$, on normalise $P_n$ par $P_n(1) = 1$.

```
n:=10; p:=makelist(n+1); p[0]:=1;
```

$$10, [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0], [1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$$

```
for k from 0 to size(p)-3 step 2 do p[k+2
]:=(k*(k+1)-n*(n+1))/(k+2)/(k+1)*p[k]; od;
```

$$\left[1, 0, -55, 0, \frac{1430}{3}, 0, -1430, 0, \frac{12155}{7}, 0, -\frac{46189}{63}\right]$$

```
q:=p*1/sum(p); normal(poly2symb(revlist(q
))); legendre(n)
```

$$\left[-\frac{63}{256}, 0, \frac{3465}{256}, 0, -\frac{15015}{128}, 0, \frac{45045}{128}, 0, -\frac{109395}{256}, 0, \frac{46189}{256}\right], \frac{46189}{256}x^{10} - \frac{109395}{256}x^8 + \frac{45045}{128}x^6 - \frac{15015}{128}x^4 + \frac{3}{2}$$

Le calcul de ces polynômes peut aussi se faire par une récurrence à 2 crans du type :

$$P_{n+1} = (a_n x - b_n)P_n - c_n P_{n-1} \tag{23.5}$$

La valeur de $a_n$ est définie par la normalisation de la famille de polynômes, ensuite $b_n$ et $c_n$ sont déterminés respectivement par

$$< P_{n+1}|P_n >= 0 \Rightarrow b_n < P_n|P_n >= a_n < xP_n|P_n >$$

et

$$< P_{n+1}|P_{n-1} >= 0 \Rightarrow c_n < P_{n-1}|P_{n-1} >= a_n < xP_n|P_{n-1} >= a_n < P_n|xP_{n-1} >$$

donc

$$c_n < P_{n-1}|P_{n-1} >= \frac{a_n}{a_{n-1}} < P_n|P_n + b_{n-1}P_{n-1} + c_{n-1}P_{n-2} >= \frac{a_n}{a_{n-1}} < P_n|P_n >$$

Les autres relations d'orthogonalité $< P_{n+1}|P_j >= 0, j < n-1$ sont automatiquement vérifiées puisque $< xP_n|P_j >=< P_n|xP_j >= 0$ et $P_n$ est orthogonal aux polynômes de degré $\leq n-1$.

Dans l'exemple des polynômes de Legendre, les polynômes obtenus sont pairs si $n$ est pair et impairs sinon, la relation de récurrence a donc un coefficient $b_n$ nul. La convention de normalisation usuelle est $P_n(1) = 1$, on peut montrer qu'on a $a_n = (2n+1)/(n+1)$ et $< P_n|P_n >= 2/(2n+1)$ donc $c_n = n/(n+1)$ et

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$$

En effet la normalisation en 1 donne $1 = a_n - c_n$ donc $c_n = a_n - 1$, les termes de degré $n+1$ et $n-1$ de $P_{n+1} = a_n x P_n - c_n P_{n-1}$ donnent

$$p_{n+1,n+1} = a_n p_{n,n}, \quad p_{n+1,n-1} = a_n p_{n,n-2} - (a_n - 1)p_{n-1,n-1}$$

On applique alors (**??**) et on déduit de la deuxième équation ci-dessus :

$$-\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}p_{n+1,n+1} = -\frac{n(n-1)}{2(2n+1)}a_n p_{n,n} - (a_n - 1)p_{n-1,n-1}$$

puis on applique la première :

$$\frac{n(n+1)}{2(2n+1)} - \frac{n(n-1)}{2(2n+1)} = \frac{a_n - 1}{a_n a_{n-1}}$$

d'où

$$a_n = \frac{1}{1 - \frac{n^2}{4n^2-1}a_{n-1}}$$

```
S(f,g):=int(f*g,x,-1,1);
```

$$(f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} fg \,\mathrm{d}x$$

```
gramschmidt([1,x,x^2,x^3,x^4],S);
```

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\frac{\sqrt{6}}{3}}, \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{6}{45}\sqrt{10}}, \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\frac{10}{175}\sqrt{14}}, \frac{-\frac{1}{5} - \frac{6}{7}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + x^4}{\frac{840}{11025}\sqrt{2}}\right]$$

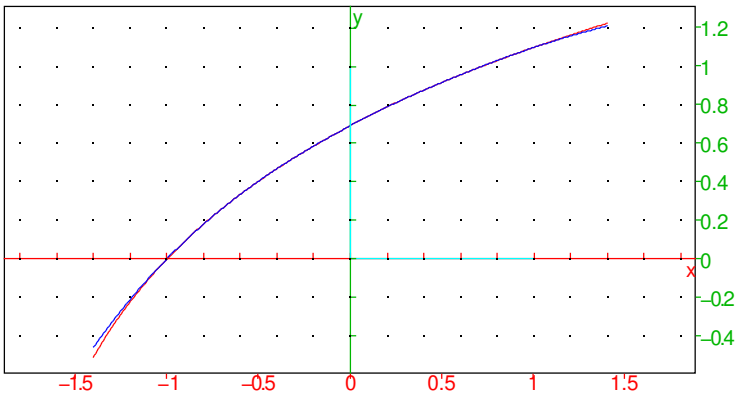
```
f:=ln(x+2);C:=seq(S(f,legendre(k))/S(legendre
(k),legendre(k)),k,0,4);
```

$$\ln(x+2), \left[\frac{3\ln(3) - 2}{2}, \frac{3}{2}\left(\frac{-6\ln(3) + 15}{4} - \frac{7}{4}\right), \frac{5}{2}\left(\frac{6\ln(3) - 15}{2} + \frac{25}{6}\right), \frac{7}{2}\left(\frac{-228\ln(3) + 615}{32}\right.\right.$$

```
g:=sum(C[j]*legendre(j),j,0,4);
```

$$\frac{354375x^4\ln(3) - 389340x^4 - 59850x^3\ln(3) + 65800x^3 - 292950x^2\ln(3) + 321720x^2 + 33750x\ln}{960}$$

```
plot([f,g],x,-1.4,1.4,color=[red,blue]);
```




**Remarques**

— On peut utiliser la récurrence à deux crans pour évaluer le polynôme en un réel, il n'est alors pas nécessaire de calculer $P_n$ dans la base canonique.

— La récurrence à deux crans se généralise pour les degrés plus petits que $d$ au produit scalaire

$$< P|Q >= \sum_{j=0}^{d} P(x_j)Q(x_j)$$

où les $x_j$ sont des abscisses distinctes 2 à 2. Le calcul d'une base orthogonale permet de faire des calculs de régressions polynomiales mieux conditionnés qu'en utilisant la base canonique (et la matrice de Vandermonde).

— On peut voir l'interpolation trigonométrique (séries de Fourier, transformée de Fourier discrète) comme une généralisation en remplaçant une base orthonormalisée de polynômes par une base orthogonale de sinus, cosinus ou exponentielles.

## 23.6 Les splines

Il s'agit de fonctions définies par des polynomes de degré borné sur des intervalles, dont on fixe la valeur aux extrémités des intervalles (comme pour le polynome de Lagrange) ce qui rend la fonction continue, de plus on exige un degré de régularité plus grand, par exemple etre de classe $C^2$. Enfin, on fixe des conditions aux bornes de la réunion des intervalles, par exemple avoir certaines dérivées nulles.

Par exemple supposons qu'on se donne $n$ intervalles, donc $n+1$ points $x_0, ..., x_n$, on se fixe une régularité $C^{d-1}$. Ceci entraine $(n-1)d$ conditions de recollement, on y ajoute $n+1$ conditions de valeur en $x_0, ..., x_n$, on a donc $nd+1$ conditions, la borne sur le degré des polynomes doit donc etre $d$ (ou plus, mais $d$ suffit) ce qui donne $n(d+1)$ degrés de liberté, on peut donc ajouter $d-1$ conditions, par exemple pour les splines naturelles, on impose que les dérivées d'ordre $d/2$ à $d-1$ soient nulles en $x_0$ et $x_n$ (si $d$ est pair, on commence à la dérivée $d/2+1$-ième nulle en $x_n$).

Pour trouver les polynomes, on doit donc résoudre un grand système linéaire. Une méthode permettant de diminuer la taille du système linéaire à résoudre dans le cas des splines naturelles consiste à se fixer $n$ inconnues $z_0, .., z_{n-1}$ représentant les dérivées $d$-ième de la spline $f$ en $x_0$ sur $[x_0, x_1]$ à $x_{n-1}$ sur $[x_{n-1}, x_n]$, et $(d-1)/2$ inconnues $f_j$, représentant la valeur de la dérivée de $f$ en $x_0$ pour $j$ variant de 1 à $(d-1)/2$. On peut alors écrire le polynome sur l'intervalle $[x_0, x_1]$ car on connait son développement de Taylor en $x_0$. On effectue un changement d'origine (par application répétée de Horner) en $x_1$. On obtient alors le polynome sur $[x_1, x_2]$ en remplaçant uniquement la dérivée $d$-ième par $z_1$. On continue ainsi jusqu'en $x_{n-1}$. Le système s'obtient en calculant la valeur du polynome en $x_0, ..., x_n$ et la nullité des dérivées d'ordre $(d-1)/2$ à $d/2$ en $x_n$. On résoud le système et on remplace pour avoir les valeurs numériques des coefficients du polynome.

# Chapitre 24

# Développement de Taylor, asymptotiques, séries entières, fonctions usuelles

Pour approcher les fonctions classiques (exponentielle, sinus, cosinus, log nepérien), on peut utiliser les développements en séries classiques, le polynôme de Taylor en un point donne une bonne approximation près du point, l'équivalent en l'infini appelé développement asymptotique donne une bonne approximation loin de 0, et les approximants de Padé où on approche par le quotient de 2 polynômes (ceci donne parfois de très bons résultats comme pour la fonction exponentielle près de 0 par exemple).

Soit $f$ une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On peut alors effectuer le développement de Taylor de $f$ en $x_0$ à l'ordre $n$

$$T_n(f)(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + ... + (x - x_0)^n \frac{f^{[n]}(x_0)}{n!}$$

et se demander si $T_n(f)$ converge lorsque $n$ tend vers l'infini, si la limite est égale à $f(x)$ et si on peut facilement majorer la différence entre $f(x)$ et $T_n(f)(x)$. Si c'est le cas, on pourra utiliser $T_n(f)(x)$ comme valeur approchée de $f(x)$.

On peut parfois répondre à ces questions simultanément en regardant le développement de Taylor de $f$ avec reste : il existe $\theta$ compris entre $x_0$ et $x$ tel que

$$R_n(x) := f(x) - T_n(f)(x) = (x - x_0)^{n+1} \frac{f^{[n+1]}(\theta)}{(n+1)!}$$

C'est le cas pour la fonction exponentielle que nous allons détailler, ainsi que les fonctions sinus et cosinus.

## 24.1 La fonction exponentielle

Soit $f(x) = \exp(x)$ et $x_0 = 0$, la dérivée $n$-ième de $f$ est $\exp(x)$, donc $R_n(x) = \exp(\theta)x^{n+1}/(n+1)!$ avec $\theta$ compris entre 0 et $x$, ainsi si $x$ est positif $|R_n(x)| \leq e^x x^{n+1}/(n+1)!$ et si $x$ est négatif, $|R_n(x)| \leq x^{n+1}/(n+1)!$. Dans les deux cas, la limite de $R_n$ est 0 lorsque $n$ tend vers l'infini, car pour $n \geq 2x$, on a

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n}{n!}\frac{x}{n+1} \leq \frac{1}{2}\frac{x^n}{n!}$$

on a donc pour tout $x$ réel

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} T_n(f)(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Comment en déduire une valeur approchée de $e^x$ ? Il suffira d'arrêter la sommation lorsque $R := x^{n+1}/(n+1)!$ si $x < 0$ ou lorsque $R := e^x x^{n+1}/(n+1)!$ si $x > 0$ est inférieur à l'erreur absolue souhaitée, le plus tôt étant le mieux pour des raisons d'efficacité et pour éviter l'accumulation d'erreurs d'arrondi. Si on veut connaitre $e^x$ à une erreur relative $\varepsilon$ donnée (par exemple $\varepsilon = 2^{-53}$ pour stocker le résultat dans un double) il suffit que $R/e^x < \varepsilon$, donc si $x$ est positif, il suffit que $x^{n+1}/(n+1)! < \varepsilon$, on peut donc arrêter la sommation lorsque le terme suivant est plus petit que $\varepsilon$.

On observe que plus $x$ est grand, plus $n$ devra être grand pour réaliser le test d'arrêt, ce qui est facheux pour le temps de calcul. De plus, le résultat final peut être petit alors que les termes intermédiaires calculés dans la somme peuvent être grands, ce qui provoque une perte de précision relative, par exemple si on veut calculer $e^{-10}$ ou plus généralement l'exponentielle d'un nombre négatif de grande valeur absolue.

Exercice : combien de termes faut-il calculer dans le développement de l'exponentielle de -10 pour que le reste soit plus petit que $2^{-53}$ ? Quel est la valeur du plus grand terme rencontré dans la suite ? Quelle est la perte de précision relative occasionné par cette méthode de calcul ?

On peut utiliser les propriétés de la fonction exponentielle pour éviter ce problème. Pour les nombres négatifs, on peut utiliser l'équation $e^{-x} = 1/e^x$ (ne change pas l'erreur relative). Pour les grands réels, on peut utiliser $e^{2x} = (e^x)^2$ (multiplie par 2 l'erreur relative). On peut aussi, si on connait une valeur approchée de $\ln(2)$, effectuer la division euclidienne de $x$ par $\ln(2)$ avec reste symétrique :

$$x = a\ln(2) + r, \quad a \in \mathbb{Z}, |r| \leq \frac{ln(2)}{2}$$

puis si $r$ est positif, on somme la série de $T(f)(r)$, si $r$ est négatif, on calcule $T(f)(-r)$ et on inverse, on applique alors :

$$e^x = 2^a e^r$$

Il faut toutefois noter que $\ln(2)$ n'étant pas connu exactement, on commet une erreur d'arrondi absolu sur $r$ d'ordre $a\eta$, où $\eta$ est l'erreur relative sur $\ln(2)$, il faut donc ajouter une erreur d'arrondi relative de $x/\ln(2)\eta$ qui peut devenir grande si $x$ est grand. Puis il faut ajouter la somme des erreurs d'arrondi due au calcul de $e^r$, que l'on peut minimiser en utilisant la méthode de Horner pour évaluer $T_n(f)(r)$ (car elle commence par sommer les termes de plus haut degré qui sont justement les plus petits termes de la somme). Les coprocesseurs arithmétiques qui implémentent la fonction exponentielle ont un format de représentation interne des double avec une mantisse plus grande que celle des double (par exemple 64 bits au lieu de 53), et une table contenant des constantes dont $\ln(2)$ avec cette précision, le calcul de $e^x$ par cette méthode entraine donc seulement une erreur relative d'arrondi au plus proche sur le résultat converti en double (donc de $2^{-53}$).

Notons que en général $x$ lui-même a déjà été arrondi ou n'est connu qu'avec une précision relative. Or si $x > 0$ est connu avec une erreur relative de $\varepsilon$ (donc une erreur absolue de $\varepsilon|x|$, alors

$$e^{x+\varepsilon|x|} = e^x e^{\varepsilon|x|}$$

donc on ne peut pas espérer mieux qu'une erreur relative de $e^{\varepsilon|x|} - 1$ sur l'exponentielle de $x$. Si $\varepsilon x$ est petit cette erreur relative (impossible à éviter, quel que soit l'algorithme utilisé pour calculer l'exponentielle) est d'ordre $\varepsilon|x|$. Si $\varepsilon x$ est grand alors l'erreur relative devient de l'ordre de 1, et la valeur de l'exponentielle calculée peut être très éloignée de la valeur réelle ! Notons que pour les double, il y aura dans ce cas débordement soit vers l'infini soit vers 0 (par exemple si $x$ est supérieur à 709, l'exponentielle renvoie infini).

Exercice : refaire les mêmes calculs pour les fonction sinus ou cosinus. On utilise par exemple $\sin(x + \pi) = -sin(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ pour se ramener au calcul de $\sin(x)$ ou de $\cos(x)$ sur $[0, \pi/4]$.

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Cette méthode a toutefois ces limites, car il peut devenir impraticable de calculer la dérivée $n$-ième d'une fonction (par exemple avec $\tan(x)$), et encore plus de la majorer. D'où l'intérêt de développer une théorie des fonctions qui sont égales à leur développement de Taylor à l'infini d'une part, et d'avoir d'autres méthodes pour majorer le reste, nous présentons ici le cas des séries alternées.

## 24.2 Séries entières.

Les séries de type prendre la limite lorsque $n$ tend vers l'infini du développement de Taylor en x=0 sont de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n := \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n x^n, a_n = \frac{f^{[n]}(0)}{n!}$$

On peut s'intéresser plus généralement à $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ lorsque $a_n$ est un complexe quelconque, c'est ce qu'on appelle une série entière, on peut aussi les voir comme des polynômes généralisés.

S'il existe un point $x_0$ tel que $|a_n x_0^n|$ est borné (ce sera le cas en particulier si la série converge en $x_0$), alors

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n||\frac{x}{x_0}|^n \leq M|\frac{x}{x_0}|^n$$

la série converge donc en $x$ si $|x| < |x_0|$ et on peut majorer le reste de la série au rang $n$ par

$$|R_n| \leq M\frac{|\frac{x}{x_0}|^{n+1}}{1 - |\frac{x}{x_0}|}$$

la vitesse de convergence est donc du même type que pour le théorème du point fixe (le nombre de termes à calculer pour trouver une valeur approchée avec $k$ décimales dépend linéairement $k$, les constantes sont d'autant plus grandes que $|x|$ est grand).

**Théorème 60** *S'il existe un rang $n_0$, un réel $M > 0$ et un complexe $x_0$ tels que pour $n > n_0$, on ait :*

$$|a_n x_0|^n \leq M$$

*alors la série converge pour $|x| < |x_0|$ et pour $n \geq n_0$, on a :*

$$|R_n| \leq M \frac{|\frac{x}{x_0}|^{n+1}}{1 - |\frac{x}{x_0}|} \tag{24.1}$$

On en déduit qu'il existe un réel positif $R \geq 0$ éventuellement égal à $+\infty$ tel que la série converge (la limite de la somme jusqu'à l'infini existe) lorsque $|x| < R$ et n'existe pas lorsque $|x| > R$, ce réel est appelé **rayon de convergence** de la série. Par exemple ce rayon vaut $+\infty$ pour l'exponentielle, le sinus ou le cosinus. Il est égal à 1 pour la série géométrique $\sum x^n$ (car elle diverge si $|x| > 1$ et converge si $|x| < 1$). On ne peut pas dire ce qui se passe génériquement lorsqu'on est à la limite, c'est-à-dire lorsque $|x| = R$ (si $R \neq +\infty$). Mais cela n'a en fait pas trop d'importance en pratique car même si la série converge, elle converge souvent trop lentement pour donner de bonnes approximations. En fait, la vitesse de convergence d'une série entière de rayon $R \neq +\infty$ est en gros la même que celle d'une série géométrique de raison $|x|/R$.

Lorsque 2 séries ont un rayon de convergence non nul, alors on peut effectuer leur somme, leur produit comme des polynômes et la série somme/produit a un rayon de convergence au moins égal au plus petit des 2 rayons de convergence des arguments. On peut inverser une série entière non nulle en 0 en appliquant

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$$

et on obtient une série entière de rayon de convergence non nul. On peut aussi composer deux séries entières $g$ et $f$ en $g \circ f$ (avec les règles de calcul de composition des polynômes) si $f(0) = 0$. On peut enfin dériver et intégrer une série entière terme à terme dans son rayon de convergence.

On dit qu'une fonction est développable en série entière en 0 si elle est égale à son développement de Taylor en 0 sommé jusqu'en l'infini dans un disque de centre 0 et de rayon non nul. Les fonctions exponentielle, sinus, cosinus sont donc développables en série entière en 0. La fonction tangente également car le dénominateur cosinus est non nul en 0, mais son rayon de convergence n'est pas l'infini et le calcul des $a_n$ est assez complexe. La fonction $(1+x)^\alpha$ est développable en séries entières pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ avec un rayon de convergence 1 (ou l'infini pour $\alpha$ entier positif).

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ...$$

Pour $\alpha = -1$, c'est la série géométrique de raison $-x$, en effet si $|x| < 1$ :

$$\sum_{n=0}^{k}(-x)^n = \frac{1-(-x)^{k+1}}{1+x} \to_{k\to\infty} \frac{1}{1+x}$$

En intégrant par rapport à $x$, on obtient que $\ln(1+x)$ est développable en série entière en 0 de rayon de convergence 1 et

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$$

On peut calculer de manière analogue le développement en série entière de $\arctan(x)$ en iintégrant celui de $1/(1+x^2)$, de même pour $\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$ en intégrant celui de $(1-x^2)^{-1/2}$.

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

On peut donc calculer $\ln$, $\arctan$, ... par ces formules, mais il faut répondre à la question où arrête-t-on la somme pour obtenir une précision donnée ? Dans le cas de $\ln(1+x)$, on pourrait répondre comme avec l'exponentielle en majorant la dérivée $n+1$-ième, mais ce n'est plus faisable pour $\arctan, \arcsin, \arccos$. On va donner un autre critère qui ne nécessite pas de calculer cette dérivée mais utilise l'alternance des signes dans la somme.

## 24.3 Série alternée

**Théorème 61** *Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ la somme jusqu'au rang $n$ d'une série de réels tels que la suite des $u_k$ décroit à partir d'un rang $n_0$ et tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$. Alors $S_n$ converge vers une limite $S$. Si $n \geq n_0$, la limite est comprise entre deux sommes partielles succesives $S_n$ et $S_{n+1}$ et le reste est majoré par la valeur absolue du premier terme non sommé :*

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|$$

Démonstration :
on montre que les suites $v_n = S_{2n}$ et $w_n = S_{2n+1}$ sont adjacentes. On a

$$v_{n+1} - v_n = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$$

donc $v_n$ est décroissante, de même $w_n$ est croissante, et $v_n - w_n = u_{2n+1}$ est positif et tend vers 0. On en déduit que $v_n$ et $w_n$ convergent vers la même limite $S$ telle que $v_n > S > w_n$ et les inégalités du théorème s'en déduisent.

**Remarque**
lorsqu'on utilise une suite alternée pour trouver une valeur approchée, il faut que $u_n$ tende assez vite vers 0, sinon il y aura perte de précision sur la mantisse lorsqu'on effectuera $u_{2n} - u_{2n+1}$. On sommera aussi les termes par ordre décroissant pour diminuer les erreurs d'arrondi.

## 24.4 La fonction logarithme

Si nous voulons calculer $\ln(1+x)$ pour $x \in [0,1[$ avec une précision $\varepsilon$, il suffit de calculer

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

pour $n$ tel que la valeur absolue du terme suivant soit plus petit que $\varepsilon$ :

$$n \text{ tel que } \frac{x^{n+1}}{n+1} < \varepsilon$$

en effet, les signes sont alternés et la suite $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ décroit vers 0.

Si la suite décroit lentement vers 0, cette méthode est mauvaise numériquement et en temps de calcul car il y a presque compensation entre termes successifs donc perte de précision sur la mantisse et il y a beaucoup de termes à calculer. C'est le cas pour le logarithme, si $x$ est voisin de 1, il faut calculer $n$ termes pour avoir une précision en $1/n$, par exemple 1 million de termes pour avoir une précision de $1e-6$ (sans tenir compte des erreurs d'arrondi). Si $x$ est proche de $1/2$ il faut de l'ordre de $-\ln(\varepsilon)/\ln(2)$ termes ce qui est mieux, mais encore relativement grand (par exemple 50 termes environ pour une précision en $1e-16$, 13 termes pour $1e-4$). On a donc intérêt à se ramener si possible à calculer la fonction en un $x$ où la convergence est plus rapide (donc $|x|$ le plus petit possible). Par exemple pour le calcul de $\ln(1+x)$ on peut :

— utiliser la racine carrée

$$ln(1+x) = 2ln(\sqrt{1+x})$$

on observe que :

$$X = \sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} \leq \frac{x}{2}$$

il faut toutefois faire attention à la perte de précision sur $X$ par rapport à $x$ lorsque $x$ est petit.

— utiliser l'inverse

$$\ln(1+x) = -\ln(1/(1+x)) = -\ln(1+\frac{-x}{1+x})$$

lorsque $x$ est proche de 1, $-x/(1+x)$ est proche de $-x/2$, on a presque divisé par 2. Attention toutefois, on se retrouve alors avec une série non alternée, mais on peut utiliser (**??**) pour majorer le reste dans ce cas.

— trouver une valeur approchée $y_0$ de $\ln(1+x)$ à une précision faible, par exemple $1e-4$, et utiliser la méthode de Newton pour améliorer la précision. Soit en effet $y = \ln(1+x)$, alors $e^y = 1+x$, on pose $f(y) = e^y - (1+x)$, on utilise la suite itérative

$$y_{n+1} = y_n - \frac{e^{y_n} - (1+x)}{e^{y_n}}$$

Comme $y_0$ est proche à $1e-4$ de $y$, on peut espérer avoir une valeur approchée de $y$ à $1e-16$ en 2 itérations. Notez que $y$ est proche de 0, on est dans un domaine où le calcul de $e^y$ est rapide et précis et de plus la méthode de Newton "corrige" les erreurs intermédiaires.

Nous sommes donc en mesure de calculer précisément le logarithme $\ln(1+x)$ pour disons $|x| < 1/2$. Pour calculer $ln$ sur $\mathbb{R}^+$, on se ramène à $[1,2]$ en utilisant l'écriture mantisse-exposant, puis si $x \in [3/2, 2]$ on peut en prendre la racine carrée pour se retrouver dans l'intervalle souhaité. On peut aussi effectuer une division par $\sqrt{2}$.

Remarquons que si $x$ est connu à une erreur relative $\varepsilon$ près, comme

$$\ln(x(1 \pm \varepsilon)) = \ln(x) + \ln(1 \pm \varepsilon)$$

$\ln(x)$ est connu à une erreur absolue de $|\ln(1 \pm \varepsilon)| \approx \varepsilon$. Si $\ln(x)$ est proche de 0, on a une grande perte de précision relative.

Finalement, nous savons calculer $\ln$ et $\exp$ sous réserve d'avoir dans une table la valeur de $\ln(2)$. Pour calculer $\ln(2)$ précisément, on peut utiliser

$$\ln(2) = -ln(1/2) = -ln(1 - 1/2)$$

et le développement en série calculé en mode exact avec des fractions à un ordre suffisant, on majore le reste en utilisant que le terme général de la série $\ln(1 + x)$ est borné par $M = 1$ en $x = 1$, donc d'après (**??**) :

$$|R_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

(on peut même obtenir $1/(n2^n)$ car on a besoin de $M$ uniquement pour les termes d'ordre plus grand que $n$, on peut donc prendre $M = 1/n$). Par exemple, pour avoir $\ln(2)$ avec une mantisse de 80 bits, on effectue une fois pour toutes avec un logiciel de calcul formel :
`a:=sum((1/2)^k/k,k=1..80)|`
puis la division en base 2 avec 81 bits de précision `iquo(numer(a)*2^81,denom(a))`

Exercice : pour les fonctions trigonométriques, il faut une méthode de calcul de $\pi$. On peut par exemple faire le calcul de $16\arctan(1/5) - 4\arctan(1/239)$ en utilisant le développement de la fonction $\arctan$ à un ordre suffisant.

## 24.5 Approximants de Padé.

Soit une fonction $f(x)$ dont on connait le développement de Taylor $B$ en 0 à l'ordre $n$, on souhaiterait plutot approcher $f$ par une fraction $P/Q$ avec degré$(P) \leq d$ et degré$(Q) \leq n - d$ :

$$f = B + O(x^{n+1}) = \frac{P}{Q} + O(x^{n+1})$$

Si $Q(0) = 0$, ceci équivaut à $P = BQ + x^{n+1}S$ où $S, P, Q$ sont des polynômes inconnus. On reconnait une identité de type Bézout pour les polynômes $A = x^{n+1}$ et $B$. On déroule l'algorithme d'Euclide itératif pour $A$ et $B$, on définit donc 3 suites $U_k, V_k, R_k$ où $R_k$ est la suite des restes d'Euclide de degrés strictement décroissants

$$R_{k+2} = R_k - Q_k R_{k+1},\ U_{k+2} = U_k - Q_k U_{k+1}, V_{k+2} = V_k - Q_k V_{k+1}$$

et les initialisations :

$$U_0 = 1, U_1 = 0, V_0 = 0, V_1 = 1, R_0 = A, R_1 = B$$

On s'arrête au rang $N+1$ tel que degré$(R_N) > d$ et degré$(R_{N+1}) \leq d$. Rappelons qu'on montre par récurrence que :

$$V_k R_{k+1} - V_{k+1} R_k = (-1)^{k+1} X^{n+1}$$

D'autre part la suite des degrés des $V_k$ est strictement croissante à partir du rang 1 (car degré$(Q_k) > 0$), on en déduit que degré$(V_{k+1})$+degré$(R_k) = n + 1$ donc

degré$(V_{N+1}) \leq n-d$. On pose alors $P = R_{N+1}$ et $Q = V_{N+1}$, qui vérifient $P = BQ + AU_{N+1}$. Si $Q(0) \neq 0$ on a existence d'une solution $P/Q$, et cette solution est alors unique, car si on a 2 triplets solutions

$$P = BQ + AS,\ P' = BQ' + AS', \quad A = X^{n+1}$$

alors $PQ' - P'Q$ est un multiple de $X^{n+1}$ donc nul pour des raisons de degré, donc $P/Q = P'/Q'$.

Par exemple, pour $f(x) = e^x$ et $n = 10, d = 5$, `pade(e^x,x,10,6)` renvoie le quotient de deux polynômes de degré 5

$$\frac{P_2 + P_1}{P_2 - P_1},\ P_2 = 30240 + 3360x^2 + 30x^4,\ P_1 = x(15120 + 420x^2 + x^4)$$

fraction que l'on peut évaluer en 12 opérations (5 additions, 1 soustraction, 5 multiplications et 1 division) et qui donne une approximation de meilleure qualité que le développement de Taylor à l'ordre 10.

```
x:=0.5; X:=x*x; a:=(30X+3360)*X+30240;  b:=x*
((X+420)*X+15120); (a+b)/(a-b); exp(0.5);
```

$$0.5, 0.25, 31081.875, 7612.53125, 1.6487212707, 1.6487212707$$

Pour démontrer des estimations sur l'erreur $f(x) - P/Q$, il n'existe pas à ma connaissance de résultat explicite général. Pour la fonction exponentielle, on peut calculer l'erreur relative $g(x) = 1 - e^{-x}P/Q$ puis étudier la fonction.

```
P,Q:=fxnd(pade(exp(x),x,10,6));
g:=1-exp(-x)*P/Q; factor(g');
```

On en déduit que $g$ est une fonction décroissante (nulle en l'origine), son maximum en valeur absolue est donc atteint aux bornes de l'intervalle d'étude, par exemple sur $[-1/4, 1/4]$, l'erreur relative est majorée par `3e-17`, il faudrait aller à l'ordre 12 pour avoir la même précision avec Taylor donc faire 23 opérations, quasiment le double. Visuellement, le graphe de l'exponentielle et de l'approximation de Padé sont encore très proches pour $x = 5$.

```
f(x):={
  local P1,P2,x2;
  x2:=x*x;
  P2:=30240+x2*(3360+30*x2);
  P1:=x*(15120+x2*(420+x2));
  retourne (P2+P1)/(P2-P1);
}:;
plot([f(x),exp(x)],x=-6..6,color=[blue,red]);
```

## 24.6 Autres applications

On peut calculer certaines intégrales de la même manière, par exemple

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$$

mais aussi des fonctions définies par des intégrales (cas de nombreuses fonctions spéciales).

### 24.6.1 Exemple : la fonction d'erreur (error fonction, `erf`)

Cette fonction est définie à une constante multiplicative près par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

On peut développer en séries entières l'intégrand (rayon de convergence $+\infty$), puis intégrer terme à terme, on obtient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!(2n+1)}$$

Ce développement converge très rapidement pour $|x| \leq 1$. Par contre, pour $|x|$ grand, il faut calculer beaucoup de termes avant que le reste soit suffisamment petit pour être négligeable, et certains termes intermédiaires sont grands, ce qui provoque une perte de précision qui peut rendre le résultat calculé complètement faux. Contrairement à la fonction exponentielle, il n'y a pas de possibilité de réduire l'argument à une plage où la série converge vite. Il faut donc

- soit utiliser des flottants multiprécision, avec une précision augmentée de la quantité nécessaire pour avoir un résultat fiable
- soit, pour les grandes valeurs de $x$, utiliser un développement asymptotique (en puissances de $1/x$) de

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$

ainsi que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Le développement asymptotique s'obtient par exemple en changeant de variable $u = t^2$ et en effectuant des intégrations par parties répétées en intégrant $e^{-u}$ et en dérivant $u^{-1/2}$ et ses dérivées successives. Ce type de développement asymptotique a la propriété inverse du développement en 0 : les termes successifs commencent par décroitre avant de croitre et de tendre vers l'infini. Il faut donc arrêter le développement à un rang donné (dépendant de $x$) et il est impossible d'obtenir une précision meilleure pour cette valeur de $x$ par un développement asymptotique (on parle parfois de développement des astronomes).

**Exercice** : donner une valeur approchée de $f(1)$ à $1e-16$ près. Combien de termes faut-il calculer dans la somme pour trouver une valeur approchée de $f(7)$ à $1e-16$ près ? Comparer la valeur de $f(7)$ et la valeur absolue du plus grand terme de la série, quelle est la perte de précision relative si on effectue les calculs en virgule flottante ? Combien de chiffres significatifs faut-il utiliser pour assurer une précision finale de 16 chiffres en base 10 ? Calculer le développement asymptotique en l'infini et déterminer un encadrement de $f(7)$ par ce développement. Combien de termes faut-il calculer pour déterminer $f(10)$ à $1e-16$ près par le développement asymptotique et par le développement en séries ? Quelle est la meilleure méthode pour calculer $f(10)$ ?

### 24.6.2 Recherche de solutions d'équations différentielles

On peut aussi appliquer les techniques ci-dessus pour calculer des solutions de certaines équations différentielles dont les solutions ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles, on remplace dans l'équation la fonction inconnue par son développement en séries et on cherche une relation de récurrence entre $a_{n+1}$ et $a_n$. Si on arrive à montrer par exemple qu'il y a une solution ayant un développement alternée, ou plus généralement, si on a une majoration $|a_{n+1}/a_n| < C$, alors le reste de la série entière est majoré par $|a_n x^n|/(1-|Cx|)$ lorsque $|x| < 1/C$, on peut alors calculer des valeurs approchées de la fonction solution à la précision souhaitée en utilisant le développement en séries entières.

### 24.6.3 Exemple : fonctions de Bessel d'ordre entier

Soit $m$ un entier positif fixé, on considère l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$$

dont on cherche une solution série entière $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. En remplacant dans l'équation, si $x$ est dans le rayon de convergence de la série (rayon supposé non nul), on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (x^2 - m^2)a_k x^k = 0$$

soit encore

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - m^2 + x^2)a_k x^k \\ &= -m^2 a_0 + (1-m^2)a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} [(k^2 - m^2)a_k + a_{k-2}]x^k \end{aligned}$$

Par exemple, prenons le cas $m = 0$. On a alors $a_0$ quelconque, $a_1$ nul et pour $k \geq 2$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k^2}$$

Donc tous les $a$ d'indice impair sont nuls. Les pairs sont non nuls si $a_0 \neq 0$, et ils sont de signe alterné. Soit $x$ fixé, on observe que pour $2k > |x|$,

$$|a_{2k} x^{2k}| < |a_{2k-2} x^{2k-2}|$$

donc la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ est alternée à partir du rang partie entière de $|x|$ plus un. Donc elle converge pour tout $x$ (le rayon de convergence de $y$ est $+\infty$) et le reste de la somme jusqu'à l'ordre $2n$ est inférieur en valeur absolue à :

$$|R_{2n}(x)| \leq |a_{2n+2}x^{2n+2}|$$

Par exemple, pour avoir une valeur approchée à $1e-10$ près de $y(x)$ pour $a_0 = 1$ et $|x| \leq 1$, on calcule $y = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$, on s'arrête au rang $n$ tel que

$$|a_{2n+2}x^{2n+2}| \leq |a_{2n+2}| \leq 10^{-10}$$

On remarque que :

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^2 4^2 ... (2n)^2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!^2}$$

donc $n = 7$ convient.

Pour $m \neq 0$, on peut faire un raisonnement analogue (les calculs sont un peu plus compliqués).

On a ainsi trouvé une solution $y_0$ de l'équation différentielle de départ dont on peut facilement calculer une valeur approchée (aussi facilement que par exemple la fonction sinus pour $|x| \leq 1$), on peut alors trouver toutes les solutions de l'équation différentielle (en posant $y = y_0 z$ et en cherchant $z$).

**Exercice :** faire de même pour les solutions de $y'' - xy = 0$ (fonctions de Airy).

## 24.7 Développements asymptotiques et séries divergentes

Un développement asymptotique est une généralisation d'un développement de Taylor, par exemple lorsque le point de développement est en l'infini. De nombreuses fonctions ayant une limite en l'infini admettent un développement asymptotique en l'infini, mais ces développements sont souvent des séries qui semblent commencer par converger mais sont divergentes. Ce type de développement s'avère néanmoins très utile lorsqu'on n'a pas besoin d'une trop grande précision sur la valeur de la fonction.

Nous allons illustrer ce type de développement sur un exemple, la fonction **exponentielle intégrale**, définie à une constante près par

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

On peut montrer que l'intégrale existe bien, car l'intégrand est positif et inférieur à $e^{-t}$ (qui admet $-e^{-t}$ comme primitive, cette primitive ayant une limite en $+\infty$). Pour trouver le développement asymptotique de $f$ en $+\infty$, on effectue des intégrations par parties répétées, en intégrant l'exponentielle et en dérivant la fraction

rationnelle

$$\begin{aligned}
f(x) &= [\frac{-e^{-t}}{t}]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{-t^2}\, dt \\
&= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt \\
&= \frac{e^{-x}}{x} - ([\frac{-e^{-t}}{t^2}]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{-2e^{-t}}{-t^3}) \\
&= \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{2e^{-t}}{t^3}\, dt \\
&= ... \\
&= e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + ... + \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\right) - \int_x^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)! e^{-t}}{t^{n+2}}\, dt \\
&= S(x) + R(x)
\end{aligned}$$

où

$$S(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + ... + \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\right), \quad R(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)! e^{-t}}{t^{n+2}}\, dt \tag{24.2}$$

Le développement en séries est divergent puisque pour $x > 0$ fixé et $n$ tendant vers l'infini

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{x^{n+1}} = +\infty$$

mais si $x$ est grand, au début la série semble converger, de manière très rapide :

$$\frac{1}{x} >> \frac{1}{x^2} >> \frac{2}{x^3}$$

On peut utiliser $S(x)$ comme valeur approchée de $f(x)$ pour $x$ grand si on sait majorer $R(x)$ par un nombre suffisamment petit. On a

$$|R(x)| \leq \int_x^{+\infty} \frac{(n+1)! e^{-t}}{x^{n+2}} = \frac{(n+1)! e^{-x}}{x^{n+2}}$$

On retrouve une majoration du type de celle des séries alternées, l'erreur relative est inférieure à la valeur absolue du dernier terme sommé divisé par $e^{-x}/x$. Pour $x$ fixé assez grand, il faut donc trouver un rang $n$, s'il en existe un, tel que $(n+1)!/x^{n+1} < \epsilon$ où $\epsilon$ est la précision relative que l'on s'est fixée. Par exemple, si $x \geq 100$, $n = 11$ convient pour $\epsilon = 12!/100^{12} = 5e-16$ (à peu près la précision relative d'un "double"). Ceci permet d'avoir une approximation de la fonction avec une bonne précision et peu de calculs, mais contrairement aux séries entières, il n'est pas possible d'améliorer cette précision de manière arbitraire en poussant le développement plus loin, il y a une précision maximale possible (qui dépend de $x$).

Ce type de développement asymptotique peut être effectué pour d'autres fonctions du même type, par exemple

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt, \quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt, \quad ...$$

**Digression : calcul approché de la constante d'Euler $\gamma$**

On peut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \tag{24.3}$$

existe (par exemple en cherchant un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ qui vaut $\frac{-1}{2n^2}$) et on définit $\gamma$ comme sa limite. Malheureusement, la convergence est très lente et cette définition n'est pas applicable pour obtenir la valeur de $\gamma$ avec une très grande précision. Il y a un lien entre $\gamma$ et la fonction exponentielle intégrale, plus précisément lorsque $x \to 0$, $f(x)$ admet une singularité en $-\ln(x)$, plus précisément $f(x) + \ln(x)$ admet un développement en séries (de rayon de convergence $+\infty$), car :

$$\begin{aligned} f(x) + \ln(x) &= \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt \end{aligned}$$

Que vaut la constante du membre de droite :

$$C = \int_0^1 (e^{-t}-1)\frac{1}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{t}\,dt$$

Il se trouve que $C = -\gamma$ (voir plus bas une démonstration condensée) et donc :

$$\gamma = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - f(x) - \ln(x) \tag{24.4}$$

Pour obtenir une valeur approchée de $\gamma$, il suffit donc de prendre un $x$ assez grand pour pouvoir calculer $f(x)$ par son développement asymptotique à la précision requise, puis de calculer l'intégrale du membre de droite par le développement en séries en $x = 0$ (en utilisant une précision intermédiaire plus grande puisque ce développement en séries va sembler diverger au début avant de converger pour $n$ suffisamment grand). Par exemple, on pose $x = 13$, on calcule $f(13)$ par (**??**) avec $n = 13$ (qui correspond au moment où le terme général de la série est minimum puisque le rapport de deux termes successifs est en $n/x$) et une erreur absolue inférieure à $e^{-13}13!/13^{14} = 4e-12$

$f(13) \approx$ `exp(-13)*sum((-1)^n*n!/13.^(n+1),n=0..13)`

puis on remplace dans (**??**), avec

$$\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$$

dont on obtient une valeur approchée, en faisant la somme jusqu'au rang 49 (pour lequel le terme général est de l'ordre de `1e-12`), le reste de cette somme $R_{50}$ est positif et est inférieur à `(-1)^50*13.^51/51/51!)` qui est de l'ordre de `8e-12`

```
evalf(sum((-1)^n*13^(n+1)/(n+1)/(n+1)!,n=0..49))
```

La somme argument de `evalf` étant exacte, il n'y a pas de problèmes de perte de précision, on peut aussi faire les calculs intermédiaires en arithmétique approchée, on doit alors prendre 4 chiffres significatifs de plus pour tenir compte de la valeur du plus grand terme sommé dans la série, terme que l'on détermine par exemple par

```
seq(13.^(n+1)/(n+1)/(n+1)!,n=0..20)
```

ce terme vaut `13^11/11/11!` soit 4000 environ)

```
Digits:=16; sum((-1)^n*13.^(n+1)/(n+1)/(n+1)!,n=0..49)
```

On obtient finalement comme valeur approchée de $\gamma$

```
-exp(-13)*sum((-1)^n*n!/13.^(n+1),n=0..13)-ln(13)+
      sum((-1)^n*13^(n+1)/(n+1)/(n+1)!,n=0..49)
```

soit `0.577215664897` avec une erreur inférieure à `1.2e-11`. Bien entendu, cette méthode est surtout intéressante si on veut calculer un grand nombre de décimales de la constante d'Euler, sinon on peut par exemple appliquer la méthode d'accélération de Richardson à la suite convergente (**??**) qui définit $\gamma$ ou d'autres méthodes d'accélération (en transformant par exemple la série en série alternée). On calcule alors de deux manières différentes $f(x)$ pour $x$ plus grand (déterminé par la précision qu'on peut obtenir par le développement aymptotique de $f$).

On peut calculer $\pi$ de la même manière avec le développement en séries et asymptotique de la fonction **sinus intégral** (on remplace exponentielle par sinus dans la définition de $f$) et l'égalité (dont un schéma de preuve est aussi donné plus bas)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \tag{24.5}$$

**Calcul de $C$ (et preuve de (??))** :
Pour cela on effectue une intégration par parties, cette fois en intégrant $1/t$ et en dérivant l'exponentielle (moins 1 dans la première intégrale).

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 (e^{-t}-1)\frac{1}{t}\, dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{t}\, dt \\ &= [(e^{-t}-1)\ln(t)]_0^1 + \int_0^1 \ln(t)e^{-t}\, dt + [e^{-t}\ln(t)]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\, dt \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, on utilise l'égalité (qui se démontre par récurrence en faisant une intégration par parties) :

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$$

On va à nouveau intégrer par parties, on intègre un facteur multiplicatif 1 et on dérive l'intégrand, on simplifie, puis on intègre $t$ et on dérive l'autre terme, puis

$t^2/2$, etc.

$$\begin{aligned}
C &= [te^{-t}\ln(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} te^{-t}(\frac{1}{t} - \ln(t))\ dt \\
&= 0 - \int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt + \int_0^{+\infty} te^{-t}\ln(t)\ dt \\
&= -1 + [\frac{t^2}{2}e^{-t}\ln(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2}e^{-t}(\frac{1}{t} - \ln(t))\ dt \\
&= -1 - \int_0^{+\infty} \frac{t}{2}e^{-t} + \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2}e^{-t}\ln(t)\ dt \\
&= -1 - \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{2}e^{-t}\ln(t)\ dt \\
&= ... \\
&= -1 - \frac{1}{2} - ... - \frac{1}{n} + \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!}e^{-t}\ln(t)\ dt \\
&= -1 - \frac{1}{2} - ... - \frac{1}{n} + \ln(n) + I_n
\end{aligned}$$

où

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!}e^{-t}(\ln(t) - \ln(n))\ dt$$

Pour déterminer $I_n$ on fait le changement de variables $t = nu$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{(nu)^n}{n!}e^{-nu}\ln(u)n\ du \\
&= \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^{+\infty} e^{n(ln(u)-u)}\ln(u)\ du
\end{aligned}$$

Or en faisant le même changement de variables $t = nu$ :

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\ dt = n^{n+1}\int_0^{+\infty} e^{n(ln(u)-u)}\ du$$

Donc

$$I_n = \frac{\int_0^{+\infty} e^{n(ln(u)-u)}\ln(u)\ du}{\int_0^{+\infty} e^{n(ln(u)-u)}\ du}$$

Lorsque $n$ tend vers l'infini, on peut montrer que $I_n \to 0$, en effet les intégrales sont équivalentes à leur valeur sur un petit intervalle autour de $u = 1$, point où l'argument de l'exponentielle est maximal, et comme l'intégrand du numérateur a une amplitude $\ln(u)$ qui s'annule en $u = 1$, il devient négligeable devant le dénominateur. Finalement on a bien $C = -\gamma$.

On peut remarquer qu'en faisant le même calcul que $C$ mais en remplacant $e^{-t}$ par $e^{-\alpha t}$ pour $\Re(\alpha) > 0$, donne $\lim I_n = -\ln(\alpha)$ (car le point critique où la dérivée de la phase s'annule est alors $1/\alpha$). Ceci peut aussi se vérifier pour $\alpha$ réel en faisant le changement de variables $\alpha t = u$

$$\int_0^1 (e^{-\alpha t} - 1)\frac{1}{t}\ dt + \int_1^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{1}{t}\ dt = -\gamma - \ln(\alpha)$$

En faisant tendre $\alpha$ vers $-i$, $-\ln(\alpha)$ tend vers $\ln(i) = i\frac{\pi}{2}$ et on obtient

$$\int_0^1 (e^{it}-1)\frac{1}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} e^{it}\frac{1}{t}\,dt = -\gamma + i\frac{\pi}{2}$$

dont la partie imaginaire nous donne (**??**), et la partie réelle une autre identité sur $\gamma$ faisant intervenir la fonction cosinus intégral.

## 24.8 Séries formelles.

On peut aussi s'intéresser aux séries d'un point de vue purement algébrique en mettant de coté tous les aspects liés à la convergence. On parle alors de série formelle. Si le corps de base est de caractéristique quelconque on peut faire les opérations arithmétiques usuelles sur les séries formelles $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$. Si la caractéristique est nulle, on peut également calculer les fonctions usuelles. Dans Xcas, on déclare la variable de série formelle par la commande `series` avec en argument le caractère désignant la variable, par exemple `series("h")` utilisera `h` comme variable, `series("h",8)` utilisera `h` comme variable et fixera l'ordre par défaut pour les développements à 8. Si la variable `O` n'est pas affectée, elle sera définie pour donner l'ordre de la série. Ainsi `1+h+O(h^7)` sera une série dont on connait les termes jusqu'à l'ordre 6 inclus. Les opérations usuelles sont implémentées dans Xcas

- addition `+`, opposé `-`, multiplication `*`
- inverse `inv` si le coefficient de puissance 0 n'est pas inversible, Xcas renvoie une série de Laurent $\sum_{k\geq -N} a_k x^k$.
- composition de deux séries `@`
- inverse pour la composition `revert`
- les conversions se font avec la commande `convert`, par exemple `a:=convert(sin(x),ser`
  `b:=convert(a,polynom)`.

On peut aussi appliquer les fonctions usuelles en caractéristique 0, par exemple

```
restart;series("h");
```

$$[C, S, T, X, a, b, f, g, g_1, k, l, n, p, q, t, x]\,, h$$

```
a:=ln(1+h+O(h^8));
```

$$h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5} - \frac{h^6}{6} + \frac{h^7}{7} + h^8\text{order_size}\,(h)$$

```
exp(a);
```

$$1 + h + h^8\text{order_size}\,(h)$$

Pour travailler avec un autre corps de base, il suffit de donner des coefficients dans ce corps. Si la caractéristique du corps est assez grande, les fonctions usuelles sont aussi applicables.

```
GF(11,3);
```

$$GF(11, k^3 + 9k^2 + 8k + 9, [k, K, g]\,, \text{undef})$$

```
a:=ln(1+g*h+O(h^6));
```

$$(g)\,h+\left(5\cdot g^2\right)h^2+\left(\left(-3\cdot g^2+g-3\right)\right)h^3+\left(\left(g^2-2\cdot g-1\right)\right)h^4+\left(\left(5\cdot g+5\right)\right)h^5+h^6\mathrm{order_size}\,(h)$$

```
exp(a);
```

$$1+(g)\,h+h^6\mathrm{order_size}\,(h)$$

Les opérations sur les séries sont implémentées sans optimisation particulière, leur utilisation principale dans Xcas étant le calcul de développement de Taylor ou asymptotique sur $\mathbb{Q}$.

# Chapitre 25

# La transformée de Fourier discrète.

## 25.1 Définition et propriétés

Soit $N$ un entier fixé. Une suite $x$ périodique de période $N$ est déterminée par le vecteur $x = [x_0, x_1, ...x_{N-1}]$. La transformée de Fourier discréte (DFT) notée $F_N$ fait correspondre à une suite $x$ périodique de période $N$ une autre suite $y$ périodique de période $N$, définie pour $k = 0..N-1$ par :

$$(F_N(x))_k = y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega_N^{-k \cdot j},$$

où $\omega_N$ est une racine $N$-ième primitive de l'unité, on prend $\omega = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ si $x$ est à coefficients réels ou complexes.

On observe que si la suite $x$ est la suite des valeurs d'une fonction périodique $f$ sur une discrétisation de la période, alors la transformée de Fourier discrète est la suite des valeurs approchées des coefficients de Fourier obtenus en appliquant la méthode des trapèzes sur cette discrétisation.

Cette transformation est linéaire, la transformée de la somme de 2 suites est la somme des transformées, et la transformée du produit par une constante d'une suite est le produit par cette constante de la transformée de la suite.

La transformée de Fourier discréte $F_N$ est une transformation bijective dont la réciproque est donnée par :

$$F_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{F_N}, \quad (F_N^{-1}(y))_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j \omega_N^{k \cdot j}$$

On le prouve en remplaçant $y$ par sa valeur :

$$\begin{aligned}
\left(F_N^{-1}(y)\right)_k &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} x_l \omega_N^{-j\cdot l}\omega_N^{k\cdot j} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} x_l \omega_N^{j(k-l)} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x_l \sum_{j=0}^{N-1} (\omega_N^{(k-l)})^j \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x_l \begin{cases} \frac{1-(\omega_N^{(k-l)})^N}{1-\omega_N^{(k-l)}} & \text{si} \quad \omega_N^{(k-l)} \neq 1 \\ N & \text{si} \quad \omega_N^{(k-l)} = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Or si $\omega_N^{k-l} = e^{2i\pi(k-l)/N} = 1$ si et seulement si $k = l$ d'où le résultat.

**Remarque** : dans le cas complexe $\omega = e^{2i\pi/N}$, on peut interpréter la DFT en termes du produit scalaire hermitien

$$< x|y >= \sum_{j=0}^{N-1} \overline{x}_j y_j$$

sur l'espace $\mathbb{C}^N$, on a une base orthogonale donnée par les $\{W_k = (\omega^{jk})_{j=0..N-1}, k = 0..N-1\}$, la DFT d'une suite $x$ est le calcul des produits scalaires $< W_k|x >$, et la récriproque est l'écriture de $x$ dans cette base orthogonale.

**Propriété**

La transformée de Fourier discrète d'une suite réelle vérifie $y_{N-k} = \overline{y_k}$.
La preuve est immédiate en appliquant la définition.

Un des intérêts de la DFT est de mettre en évidence rapidement d'éventuelles périodicités de $x$ divisant $N$. Plus précisément soit $j$ est un entier divisant $N$. Considérons une suite réelle $x$ dont la DFT $y$ est nulle sauf $y_l$ et $y_{N-l}$. Par linéarité, on peut se ramener à 2 cas $y_l = y_{N-l} = 1$ et $y_l = i, y_{N-l} = -i$. Dans le premier cas, on obtient $x_k = \omega_N^{lk} + \omega_N^{-lk} = 2\cos(2\pi kl/N)$, dans le deuxième cas, on obtient $x_k = -2\sin(2\pi kl/N)$, qui sont périodiques de période $N/l$.

Réciproquement, si $x$ a comme période $T = N/l$, alors en posant $j = Tm + r$ avec $m \in [0, l[$ et $r \in [0, T-1]$, on a $x_j = x_r$ donc :

$$\begin{aligned}
y_k &= \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega_N^{-k\cdot j} \\
&= \sum_{m=0}^{l-1}\sum_{r=0}^{T-1} x_r \omega_N^{-k(Tm+r)} \\
&= \sum_{r=0}^{T-1} x_r \sum_{m=0}^{l-1} \omega_N^{-k(Tm+r)} \\
&= \sum_{r=0}^{T-1} x_r \omega_N^{-kr} \sum_{m=0}^{l-1} (\omega_N^{-kT})^m \\
&= \sum_{r=0}^{T-1} x_r \omega_N^{-kr} \frac{1-(\omega_N^{-kT})^l}{1-\omega_N^{-kT}}
\end{aligned}$$

si $\omega_N^{-kT} \neq 1$. Comme $(\omega_N^{-kT})^l = \omega_N^{-klT} = 1$, $y_k = 0$ si $kT = kN/l$ n'est pas un multiple de $N$. Finalement si $k$ n'est pas un multiple de $l$, alors $y_k = 0$.

Voyons maintenant le cas de "pseudo-périodes", supposons donc que $x$ est périodique de période $N$ mais que de plus pour un $T > 0$ quelconque (ne divisant pas forcément $N$), on ait

$$x_{j+T} = x_j, \quad \forall j \in [0, N-T]$$

On peut refaire le raisonnement ci-dessus, modulo des erreurs. plus précisément :

$$y_k - \sum_{j=N}^{\text{ceil}(N/T)T} x_j \omega_N^{-k\cdot j} = \sum_{m=0}^{\text{ceil}(N/T)} \sum_{r=0}^{T-1} x_r \omega_N^{-k(Tm+r)}$$

On calcule donc $y_k$ à une erreur de ceil$(N/T)T - N$ termes majorés par $|x_j|$ près. Et le membre de droite vaudra :

$$\sum_{r=0}^{T-1} x_r \omega_N^{-kr} \frac{1 - \omega_N^{-k\text{ceil}(N/T)T}}{1 - \omega_N^{-kT}}$$

Le module de la fraction est égal à

$$|\frac{\sin(\pi k \text{ceil}(N/T)T/N)}{\sin(\pi kT/N)}| = |\frac{\sin(\pi k(\text{ceil}(N/T)T/N - 1))}{\sin(\pi kT/N)}|$$

il est petit si $k$ n'est pas proche d'un multiple de ceil$(N/T)$. Par exemple, prenons $N = 2^16 = 65536$ et $T \approx N/10 = 6554$. Dans ce cas ceil$(N/T)T = 10 \times 6554 = 65540$, il y a donc une erreur de 4 termes sur le calcul de $y_k$. Si $k$ n'est pas proche d'un multiple de 10, on doit trouver $y_k$ proche de 0 relativement à la valeur des $|x_j|$.

Les périodes et pseudo-périodes de $x$ correspondent donc aux valeurs de $y_k$ grandes par la règle $k$ * période =$N$.

## 25.2 La transformée de Fourier rapide

Le calcul de la DFT est relativement lent, il nécessite de l'ordre de $N^2$ opérations, car il revient à calculer la valeur du polynôme de degré $N-1$ :

$$P(X) = \sum_{j=0}^{N-1} x_j X^j$$

aux $N$ points $1, \omega_N$, ..., $\omega_N^{N-1}$ (on a $y_k = P(\omega_N^k)$). Mais si $N$ est une puissance de 2, on peut calculer de manière plus astucieuse et réduire le nombre d'opérations à un ordre $T(N) = O(N \ln(N))$. En effet $N = 2M$, on prend les puissances paires et impaires de $P$

$$P(x) = Q(x^2) + xR(x^2)$$

On a alors

$$P(\omega^k) = Q((\omega^2)^k) + \omega^k R((\omega^2)^k)$$

On calcule les DFT de $Q$ et $R$, puis pour chaque valeur de $k$ on a 1 multiplication et 1 addition donc $4M$ opérations plus le calcul de deux DFT d'ordre $M$ (on peut économiser $M$ multiplications en utilisant $\omega^{k+M} = -\omega^k$). On a donc $T(2M) = cM + 2T(M)$ avec $c = 4$ ou $c = 3$. Si $N = 2^n$ on a

$$T(2^n) = c2^{n-1} + 2T(2^{n-1}) = c2^{n-1} + 2(c2^{n-2} + 2T(2^{n-2}) = ... = nc2^{n-1} + 2^n T(0)$$

donc $T(2^n) \approx cn2^{n-1}$ opérations, donc $O(N \ln(N))$ opérations.

Une méthode alternative consiste à découper $P$ en 2 parties de même longueur :

$$P(x) = x^M Q(X) + R(X)$$

on a alors

$$\begin{aligned} P(\omega^{2k}) &= (Q+R)((\omega^2)^k), \\ P(\omega^{2k+1}) &= (-Q+R)_\omega((\omega^2)^k) \qquad \text{où } S_\omega(x) = \sum s_k \omega^k x^k \end{aligned}$$

On est donc ramené à deux additions de 2 polynômes de degré $M$, une multiplication coefficient par puissances sur un polynôme de degré $M$ (soit $3M$ opérations), et au calcul des deux DFT de $Q + R$ et $R - Q$. Lorsqu'on implémente cette méthode de manière efficace, on calcule le résultat de la DFT en place (en écrasant $P$ par sa DFT) il faut utiliser un espace mémoire de travail de même longueur que le polynme de départ, on en utilise la première partie pour calculer $Q + R$ et la seconde partie pour $(R - Q)_\omega$. On calcule les deux DFT en utilisant comme espaces mémoire de travail la zone qui contient $P$ (qui sera donc perdu), puis on effectue les permutations donnant la DFT de $P$ à partir de celles de $Q$ et $R$ en écrasant la zone qui contenait $P$.

On appelle alors FFT cette méthode de calcul (DFT=FFT si $N = 2^n$).

Cette méthode se généralise à des $N$ qui ne sont pas des puissances de 2.

## 25.3 Applications.

La DFT peut servir à trouver des périodes dans des données expérimentales datées. On peut par exemple le voir sur des enregistrements de son (par exemple avec le logiciel libre `audacity`), mais dans bien d'autres domaines, par exemple si on l'applique aux données issues des paléoclimats, on voit apparaitre les périodicités des paramètres orbitaux de la Terre, en phase avec la théorie de Milankovitch.

En calcul exact, la FFT permet d'obtenir une complexité optimale pour calculer des produits de grands entiers ou de polynômes en une variable. La session `multfft`du menu `Aide, Exemples, arit` de Xcas implémente le principe du calcul du produit $P$ de deux polynômes $A$ et $B$ à coefficients entiers en utilisant un seul nombre premier $p$ tel que

- 1 admette une racine primitive $2^n$-ième de l'unité modulo $p$ pour un $n$ assez grand ($2^n$ strictement plus grand que le degré du produit $P$)
- tel que $p > 2|P|_\infty$ pour déterminer $P$ à partir de son écriture en représentation symétrique.

On écrit les coefficients de $A$ et $B$ dans un vecteur de longueur $2^n$ en complétant par des 0, on calcule la DFT de $A$ et de $B$, puis on fait le produit élément par élément puis on calcule la DFT inverse.

Exemple : on cherche des nombres premiers de la forme $p = k2^n + 1$ par exemple $p = 7 \times 2^{20} + 1$ est premier,

```
isprime(p:=7*2^20+1)
```

true

on cherche un générateur de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

```
for(g:=2;g<p;g++){
  if (powmod(g,(p-1)/2,p)!=1 and powmod(g,(p-1)/7,p)!=1) break;
}:; g;
```

on en déduit une racine primitive $2^{20}$-ième de l'unité

```
g;r:=powmod(g,7,p);
```

$3, 2187$

puis en prenant la puissance $2^{n-k}$-ième de $r$ on obtient une racine $2^k$-ième de 1 qui permettra de multiplier deux polynômes dont la somme des degrés est strictement inférieure à $2^k$, par exemple pour $a$ et $b$ de degrés 5 et 7, on prendra $k = 4$

```
a:=randpoly(5,[]); b:=randpoly(7,[]);w:=powmod
(r,2^16,p);
```

$[1, -82, -26, -90, -37, 56], [1, -83, -28, -79, -7, 7, 60, 73], 5712452$

on allonge $a$ et $b$ avec des 0 pour les amener à la taille $16 = 2^k$

```
ar:=[op(a),op(seq(0,(16-size(a))))];br:=
[op(b),op(seq(0,(16-size(b))))]
```

$[1, -82, -26, -90, -37, 56, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [1, -83, -28, -79, -7, 7, 60, 73, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

on calcule les transformées de Fourier rapide de $a$ et $b$

```
A:=fft(ar,w,p); B:=fft(br,w,p);
```

$[7339855, 1431334, 3947432, 5090580, 6538891, 7210471, 4498157, 599631, 54, 6410786, 5878605, 1741952, 801$

puis on fait le produit terme à terme et on applique la transformée de Fourier inverse

```
C:=irem(A.*B,p); c:=ifft(C,w,p);
```

$[9968, 6511191, 2556684, 5352090, 1500404, 1835926, 4409798, 5185064, 5832, 2522856, 4080909, 1336980, 584$

On peut comparer avec le produit calculé par Xcas

```
a*b;
```

$[1, -165, 6752, 4285, 14632, 8282, 3166, -3044, -12341, -7949, -8398, 659, 4088]$

```
smod(c,p);
```

$[1, -165, 6752, 4285, 14632, 8282, 3166, -3044, -12341, -7949, -8398, 659, 4088, 0, 0, 0]$

Bien entendu les tailles de $a$ et $b$ prises ici en exemple sont trop petites pour que l'algorithme soit efficace.

Pour une implémentation efficace, on utilise plusieurs nombres premiers et les restes chinois (en fait à deux reprises). On calcule le produit des polynômes modulo plusieurs nombres premiers $p_i$, dont le produit $\prod p_i$ est supérieur à deux fois la norme infinie de $P$ pour pouvoir en déduire $P$. Pour calculer un des produits $AB \pmod{p_i}$, on réduit $A$ et $B$ modulo $p_i$, on multiplie les polynômes réduits $\overline{AB}$ comme s'ils étaient à coefficients entiers et on r'eduit le résultat modulo $p_i$. Le calcul de chaque $\overline{AB}$ ($p_i$ fixé) se fait en utilisant 2 ou 3 premiers choisis une fois pour toutes qui sont proches de $2^{31}$ et ont des racines $2^n$-ième de l'unité pour $n$ assez proche de 31. Ainsi, Law et Monagan, proposent dans"A parallel implementation for polynomial multiplication modulo a prime", PASCO 2015,

— $n_1 = 2013265921 = 15 \times 2^{27} + 1$ ($r = 1227303670$ est racine d'ordre $2^{27}$, il suffit de prendre un générateur de $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})^*$ à la puissance 15, ce qui se fait en testant 2, 3,...).
— $n_2 = 1811939329 = 27 \times 2^{26}$ ($r = 814458146$ est racine d'ordre $2^{26}$)
— $n_3 = 469762049$ ($r = 2187$ est racine d'ordre $2^{26}$)

On peut retrouver ces nombres premiers avec une boucle comme suit

```
p:=2^25; for k from 64 downto 1 do if isprime
(k*p+1) then print(k,k*p+1); fi od
```

$$33554432, 0$$

et la valeur d'une racine $2^n$-ième comme suit

```
n:=2013265921;
pour k de 2 jusque 100 faire
 a:=powmod(k,(n-1)/3,n); b:=powmod(k,(n-1)/5,n); c:=powmod(k,(n-1)/2,
 print(k,a,b,c);
 si a!=1 et b!=1 et c!=1 alors break; fsi;
fpour;
r:=powmod(k,15,n);
powmod(r,2^26,n); powmod(r,2^27,n);
```

Ce choix de valeurs de $n_1, n_2, n_3$ permet de multiplier des polynômes dont le degré du produit est strictement inférieur à $2^{26}$ (environ 67 millions). Si on utilise deux de ces 3 premiers, $n_1$ et $n_2$, on peut prendre des $p_i$ dont la taille en bits est plus petite que (60 bits moins le nombre de bits du degré minimal de $A$ et $B$) divisé par 2. Avec les trois $n_1$, $n_2$ et $n_3$ on peut prendre $p_i$ ayant 31 bits, mais il faut travailler si on veut éviter de faire des restes chinois avec des entiers de plus de 64 bits (ce qui est possible avec des entiers 128 bits mais au prix de réductions modulo couteuses).

# Chapitre 26

# Le rayonnement solaire.

## 26.1 L'insolation au cours de l'année.

Pour connaitre la quantité d'énergie recue à un moment donné, il faut calculer l'angle entre la verticale du lieu et la direction du Soleil. Plus généralement, on va calculer les composantes du vecteur Terre-Soleil et les composantes des vecteurs de la base locale (verticale locale, direction du Sud et direction du parallèle). On choisit d'abord comme référence le plan $Txy$ de l'écliptique (plan de l'orbite de la Terre autour du Soleil), avec $Ty$ orthogonal à l'axe de rotation de la Terre (donc $Tx$ la projection de l'axe de rotation de la Terre sur ce plan). Soit $\theta$ l'angle que fait la Terre avec la direction du passage au périhélie, et $\theta_0$ l'angle de la position de la Terre au solstice d'hiver avec la direction du périhélie, l'angle entre la direction Terre-Soleil et $Tx$ est donc $\theta - \theta_0$
Dans $Txyz$ le vecteur unitaire $s$ de la direction Terre-Soleil a pour coordonnées :

$$s = -(\cos(\theta - \theta_0), \sin(\theta - \theta_0), 0)$$

On effectue ensuite une rotation autour de $Ty$ d'angle $i$ l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre. On obtient ainsi un repère $TXyZ$ ($TX$ et $TZ$ se déduisent de $Tx$ et $Tz$ par rotation d'angle $i$). Dans ce repère le vecteur untaire $s$ a pour coordonnées :

$$s = -(\cos(\theta - \theta_0)\cos(i), \sin(\theta - \theta_0), \cos(\theta - \theta_0)\sin(i))$$

Calculons maintenant dans ce repère $TXyZ$ les coordonnées des vecteurs de la base locale. On se place en un point de latitude $l$ et de longitude $\phi$, on note $J$ la durée d'une période de révolution de la Terre sur elle-même (23 heures 56 minutes, c'est un peu moins d'un jour car il faut encore en moyenne 4 minutes pour compenser le déplacement de la Terre sur son orbite autour du Soleil). La verticale locale a pour coordonnées :

$$v = (\cos(l)\cos(\phi + 2\pi t/J), \cos(l)\sin(\phi + 2\pi t/J), \sin(l))$$

L'énergie solaire recue au lieu donné (sur une surface horizontale ; pour un panneau solaire, il faudrait calculer les coordonnées d'un vecteur perpendiculaire au panneau) est proportionnelle à

$$\frac{s.v}{\rho^2}$$

où $\rho(\theta) = a(1-e^2)/(1+e\cos(\theta))$ désigne la distance Terre-Soleil. Le calcul de $s.v$ donne, en notant $\varphi = \phi + 2\pi t/J$ :

$$-s.v = \cos(l)\cos(\varphi)\cos(\theta-\theta_0)\cos(i)+\cos(l)\sin(\varphi)\sin(\theta-\theta_0)+\sin(l)\cos(\theta-\theta_0)\sin(i)$$

On rassemble les deux premiers termes qui dépendent rapidement du temps par l'intermédiaire de $\varphi$ (le 3ème terme n'en dépend que par $\theta$ qui ne varie que d'environ 1 degré pendant une journée) et on applique la formule de trigonométrie :

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha-\alpha_0), \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \cos(\alpha_0) & = & \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin(\alpha_0) & = & \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{array} \right.$$

Ici, après avoir factorisé $\cos(l)$, on a :

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{\cos(\theta-\theta_0)^2\cos(i)^2+\sin(\theta-\theta_0)^2} = \sqrt{1-\sin(i)^2\cos(\theta-\theta_0)^2}$$

On peut aussi calculer

$$\tan(\alpha_0) = \frac{B}{A} = \frac{\tan(\theta-\theta_0)}{\cos(i)}$$

qui donne $\alpha_0$ modulo $\pi$ et compléter en regardant le quadrant où se trouve $(A,B)$, ici $\alpha_0$ et $\theta-\theta_0$ sont tous deux dans $[0,\pi]$ ou tous deux dans $[-\pi,0]$. Finalement, on obtient le

**Théorème 62** *L'énergie solaire recue au sol est proportionnelle à*

$$(1+e\cos(\theta))^2 s.v$$

*où $s.v$ est donné par :*

$$s.v = -\cos(l)\sqrt{1-\sin(i)^2\cos(\theta-\theta_0)^2}\cos(\varphi-\varphi_0) - \sin(l)\cos(\theta-\theta_0)\sin(i)$$

*et*

- *$e$ est l'excentricité de l'orbite elliptique (environ 0.0167 actuellement)*
- *$i$ est l'obliquité (inclinaison de l'axe de rotation de la Terre, environ 23 degré 27 minutes actuellement)*
- *$\theta$ est l'angle fait par la direction Terre-Soleil avec la direction du demi grand axe (Soleil-périhélie), $\theta_0$ le même angle au solstice d'hiver de l'hémisphère Nord (environ -13 degrés). En première approximation, on peut faire varier $\theta$ proportionnellement au temps, voir la fin de la section* **??** *pour un calcul plus précis.*
- *$l$ est la latitude, $\varphi$ la longitude tenant compte de la rotation de la Terre (somme de la longitude géographique $\phi$ et du terme dépendant du temps $2\pi t/J$)*
- *$\varphi_0 \in [-\pi,\pi]$ est de même signe que $\theta-\theta_0$ et est défini par :*

$$\tan\varphi_0 = \frac{\tan(\theta-\theta_0)}{\cos(i)} \tag{26.1}$$

**Variations de $s.v$ au cours d'une journée dans l'approximation où $\theta$ ne varie pas** :
On obtient une sinusoide entre les deux valeurs extrêmes :

$$\pm\cos(l)\sqrt{1-\sin(i)^2\cos(\theta-\theta_0)^2}-\sin(l)\cos(\theta-\theta_0)\sin(i)$$

Le maximum est atteint pour

$$\varphi=\varphi_0+\pi\ \Rightarrow\ 2\pi t/J=\varphi_0-\phi+\pi,\quad J=23h56m$$

le moment correspondant est appelé culmination (c'est le midi solaire si le maximum est positif) et ne dépend pas de la latitude (bien entendu la valeur du maximum en dépend). Si le maximum est négatif ou nul, la nuit dure 24h. Si le minimum est positif ou nul, le jour dure 24h. Par exemple au solstice d'hiver, $\theta=\theta_0$, selon la latitude on obtient un maximum négatif pour $l=\pi/2$ (pole Nord), positif pour $l=-\pi/2$ (pole Sud), le minimum et le maximum croissent entre ces 2 valeurs. Si le maximum est positif et le minimum est négatif, il y a 2 instants ou $s.v=0$ (lever et coucher du soleil).

L'énergie solaire recue pendant une journée par une surface horizontale est proportionnelle à l'intégrale entre le lever et le coucher de $s.v/\rho^2$. S'il n'y a pas de lever/coucher, soit on ne recoit rien (nuit polaire), soit on recoit l'intégrale entre 0 et 24h de $s.v$ (jour polaire).

L'intervalle entre 2 culminations n'est pas constant au cours de l'année, car $\varphi_0$ n'est pas une fonction linéaire de $\theta$ (qui lui même n'est pas linéaire en fonction du temps sauf en première approximation avec une orbite terrestre circulaire). On peut le calculer en dérivant (**??**). Par exemple dans l'approximation d'une excentricité nulle, au solstice d'hiver ($\theta=\theta_0$), on obtient

$$\varphi_0=0,\quad (1+0^2)d\varphi_0=(1+0^2)\frac{d\theta}{\cos(i)}$$

avec $d\theta$ qui correspond à 4 minutes, on trouve $d\varphi_0$ correspondant à 4.36 minutes. L'écart entre 2 culminations est donc d'environ 24h 20secondes. Au moment du solstice, le Soleil se lève et se couche donc environ 20 secondes plus tard entre un jour et son lendemain, dans l'hypothèse d'un mouvement circulaire de la Terre autour du Soleil. En réalité, l'orbite terrestre étant faiblement elliptique, l'écart est un peu moins de 30 secondes en hiver et de 15 secondes en été, le mouvement de la Terre autour du Soleil étant plus rapide d'environ 3% au solstice d'hiver et moins rapide d'environ 3% au solstice d'été. Comme 3% de l'écart moyen entre 2 culminations (4 minutes=240 secondes) correspond à 7 secondes cela explique la différence.

## 26.2 Les saisons

Les solstices sont définis par les 2 points de l'orbite où la projection de l'axe de rotation terrestre est parallèle à l'axe Terre-Soleil. Les équinoxes sont définis par les 2 points où il y a perpendicularité. Au solstice d'hiver, on voit que les parallèles situés aux hautes latitudes Nord ne sortent jamais de l'obscurité. Aux latitudes intérmédiaires, le morceau de parallèle situé au jour est nettement plus petit que celui situé dans l'obscurité. À l'équinoxe de printemps, chaque parallèle est à moitié au jour et à moitié dans l'obscurité (derrière la grille). Au printemps, la situtation est analogue. Au solstice d'été, on est dans la situation inverse de l'hiver.

## 26.3 L'orbite de la Terre.

En première approximation, l'orbite de la Terre est uniquement influencée par la force de gravitation entre la Terre et le Soleil, ce dernier pouvant être considéré comme fixe en raison de sa masse (on peut éviter cette approximation en remplaçant le Soleil par le centre de gravité du système Terre-Soleil). La force de gravitation qui dérive d'un potentiel inversement proportionnel à la distance Terre-Soleil est de la forme

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F}}{m_T} = K\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad K = -\mu < 0$$

où $\mathbf{r}$ désigne le vecteur Terre-Soleil, $m_T$ est la masse de la Terre, $\mu = Gm_S$ est le produit de la constante de gravitation universelle par la masse du Soleil. Le moment cinétique de la rotation de la Terre autour du Soleil est défini par :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

On vérifie que sa dérivée est nulle, donc $\mathbf{L}$ garde une direction fixe $\mathbf{k}$, orthogonale à $\mathbf{r}$, l'orbite de la Terre reste donc dans le plan défini à un instant donné par l'axe Terre-Soleil et le vecteur vitesse de la Terre. De plus la conservation de $\mathbf{L}$ entraine la loi des aires, l'aire balayée par le rayon Soleil-Terre est proportionnelle au temps.

On utilise un repère en coordonnées polaires centré au Soleil, $\rho$ désignant la distance Terre-Soleil et $\theta$ l'angle fait par rapport à une direction fixe, on a alors

$$\mathbf{L} = \rho^2\frac{d\theta}{dt}\mathbf{k}$$

car si on calcule en coordonnées polaires $d\mathbf{r}/dt$, la composante sur le vecteur radial $\mathbf{e_r}$ est $d\rho/dt$, et la composante sur le vecteur perpendiculaire $\mathbf{e}_\theta$ est $\rho d\theta/dt$.

### 26.3.1 Calcul en utilisant le vecteur excentricité.

Montrons que le vecteur

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathbf{dr}}{dt} \wedge \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{\rho}$$

est aussi conservé (où on rappelle que $\mu$ provient de la force de gravitation $\mathbf{F}' = \mathbf{F}/m_T = -\mu\mathbf{r}/r^3$). Le deuxième terme est proportionnel au vecteur radial $-\mathbf{e_r}$, dont la dérivée est le vecteur orthogonal $-d\theta/dt\mathbf{e}_\theta$. Comme $\mathbf{L}$ est constant, la dérivée du premier terme est

$$\frac{1}{\mu}\mathbf{F}' \wedge \mathbf{L} = \frac{-\mathbf{e_r}}{\rho^2} \wedge L\mathbf{k} = \frac{L}{\rho^2}\mathbf{e}_\theta = -\frac{d\theta}{dt}\rho^2$$

Notons que $\mathbf{E}$ est dans le plan de l'orbite, prenons comme origine des angles pour repérer la Terre par rapport au Soleil la direction de $\mathbf{E}$. En faisant le produit

scalaire de $\mathbf{E}$ avec $\mathbf{r}$, on obtient en notant $e$ la norme de $E$

$$\begin{aligned} e\rho\cos(\theta) &= \mathbf{E}.\mathbf{r} \\ &= (\frac{1}{\mu}\frac{\mathbf{dr}}{dt} \wedge \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{\rho}).\mathbf{r} \\ &= (\frac{1}{\mu}\frac{\mathbf{dr}}{dt} \wedge \mathbf{L}).\mathbf{r} - \rho \\ &= \frac{1}{\mu}(\mathbf{r} \wedge \frac{\mathbf{dr}}{dt}).\mathbf{L} - \rho \\ &= \frac{1}{\mu}\mathbf{L}.\mathbf{L} - \rho \\ &= \frac{L^2}{\mu} - \rho \end{aligned}$$

d'où :

$$\rho = \frac{L^2}{\mu(1 + e\cos(\theta))}$$

### 26.3.2 Calcul par l'équation différentielle.

On a les équations de conservation de l'énergie et du moment cinétique :

$$\frac{K}{\rho} + \frac{m}{2}\left(\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\rho\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = C_1, \quad \rho^2\frac{d\theta}{dt} = L, \quad K < 0, m > 0$$

On change de variable dépendante pour $\rho$, en prenant $\theta$ au lieu de $t$, comme $\frac{d\rho}{dt} = \rho'\frac{d\theta}{dt}$ (où $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$), on a :

$$\frac{K}{\rho} + \frac{m}{2}\left((\rho'^2 + \rho^2)\left(\frac{L}{\rho^2}\right)^2\right) = C_1$$

On effectue ensuite le changement de variable $\rho = 1/u$, $\rho' = -u'/u^2$, d'où :

$$Ku + \frac{m}{2}\left(\left(\frac{u'^2}{u^4} + \frac{1}{u^2}\right)L^2u^4\right) = C_1$$

soit :

$$Ku + \frac{mL^2}{2}(u'^2 + u^2) = C_1$$

donc :

$$K'u + u^2 + u'^2 = C_3, \quad K' = \frac{2K}{mL^2} < 0, C_3 = \frac{2C_1}{mL^2}$$

On pose maintenant $v = u + K'/2$, d'où :

$$v^2 + v'^2 = C_3 + \frac{K'^2}{4} = C_4$$

On montre (en exprimant $v'$ en fonction de $v$ puis en séparant les variables), que cette équation différentielle a pour solution générale

$$v = \sqrt{C_4}\cos(\theta - \theta_0)$$

D'où :

$$\rho = \frac{1}{u} = \frac{1}{v - \frac{K'}{2}} = \frac{1}{\sqrt{C_4}\cos(\theta - \theta_0) - \frac{K'}{2}}$$

Comme $K' < 0$ et comme la trajectoire de la Terre autour du Soleil passe par tous les angles (donc $\rho$ est défini pour tout $\theta$, le dénominateur ne peut pas s'annuler), on a :

$$\rho = \frac{\frac{2}{-K'}}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}, \quad e \in [0, 1[$$

On définit ensuite $a$ par $\frac{2}{-K'} = a(1-e^2)$, et on obtient finalement l'équation d'une ellipse dont l'origine (le Soleil) est un des foyers :

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

On suppose maintenant quitte à faire pivoter l'axe des $x$ que $\theta_0 = 0$.

### 26.3.3 Lois de Képler.

L'orbite de la Terre est donc une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers (1ère loi de Képler). On a aussi vu que $L = \rho^2 d\theta/dt$ est constant, ceci entraine la loi des aires, infinitésimalement on a :

$$\frac{1}{2}\rho^2 d\theta = \frac{1}{2}Ldt$$

ce qui se traduit par l'aire balayée par le rayon vecteur Soleil-Terre est proportionnelle au temps (2ème loi de Képler). Au cours d'une période $T$, l'aire parcourue est celle de l'ellipse, donc

$$\pi a^2\sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2}LT$$

En prenant le carré, et en appliquant

$$\frac{L^2}{\mu} = a(1 - e^2)$$

on en déduit la troisième loi de Képler :

$$4\pi^2 a^3 = \mu T^2 \Leftrightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}$$

où on rappelle que $\mu$ est le produit de la constante de gravitation universelle par la masse du Soleil. (On peut évidemment faire le même calcul pour la Lune autour de la Terre).

## 26.4 Quelques propriétés de l'ellipse

**Définition**

L'ellipse $E$ de foyers $F_1$ et $F_2$ de demi-grand axe $a$ est l'ensemble des points $M$ du plan tels que

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

On note $2c = F_1F_2$ la distance entre les deux foyers, qui doit être plus petite que $2a$ pour que l'ellipse soit non vide. L'excentricité de l'ellipse est définie par $e = c/a < 1$. Si $e = 0$, on obtient un cercle de centre $F_1 = F_2$ et de rayon $a$. Si $e \neq 0$, on va voir qu'il s'agit d'un cercle contracté selon l'axe perpendiculaire à $F_1F_2$ dans un rapport de $\sqrt{1-e^2}$. On va également calculer l'équation en coordonnées polaires de $E$ pour montrer que l'équation obtenue ci-dessus est bien celle d'une ellipse dont le Soleil occupe un foyer.

Soit $O$ le milieu de $F_1$ et $F_2$, on se place dans le repère orthonormé dont le premier axe $Ox$ contient $F_1$ et $F_2$ donc les coordonnées de $F_1$ sont $(c, 0)$ et celles de $F_2$ sont $(-c, 0)$. Soit $M(x, y)$ un point de l'ellipse, on a d'une part :

$$MF_1^2 - MF_2^2 = (x-c)^2 - (x+c)^2 = -4cx$$

et d'autre part :

$$MF_1^2 - MF_2^2 = (MF_1 + MF_2)(MF_1 - MF_2) = 2a(MF_1 - MF_2)$$

donc :

$$MF_1 - MF_2 = \frac{-2cx}{a}$$

en additionnant avec $MF_1 + MF_2 = 2a$ et en appliquant $c = ea$, on en déduit :

$$MF_1 = a - \frac{cx}{a} = a - ex \tag{26.2}$$

En prenant le carré, on a :

$$(x - ea)^2 + y^2 = (a - ex)^2$$

d'où :

$$y^2 + x^2(1-e^2) = a^2(1-e^2)$$

finalement :

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2$$

qui est bien la contraction selon $Oy$ de rapport $\sqrt{1-e^2}$ du cercle de centre $O$ et de rayon $a$ (appelé grand cercle de l'ellipse).

En coordonnées polaires, on note $\rho$ la distance de $F_1$ à $M$, et $\theta$ l'angle entre l'axe $Ox$ et $F_1M$. L'abscisse de $M$ est donc :

$$x = ea + \rho\cos(\theta)$$

que l'on combine avec (**??**) pour obtenir :

$$\rho = a - ex = a(1-e^2) - e\rho\cos(\theta)$$

donc :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta)}$$

ce qui nous permet d'affirmer que l'orbite de la Terre dans l'approximation du point matériel soumis uniquement au Soleil supposé fixe est une ellipse dont le Soleil occupe un foyer.

## 26.5 Influence de l'ellipse sur les saisons

Il faut prendre garde à ne pas confondre les solstices et équinoxes avec le moment où la Terre coupe le grand axe de son ellipse autour du Soleil. Il n'y a aucune raison que la projection de l'axe de rotation de la Terre sur le plan de l'ellipse soit parallèle ou perpendiculaire au grand axe de l'ellipse, et actuellement ce n'est pas le cas, le solstice d'hiver a lieu le 21 décembre alors que le passage au plus proche du Soleil a lieu vers le 3 janvier (donc pendant l'hiver de l'hémisphère Nord) et le passage au plus loin du Soleil a lieu début juillet (pendant l'été). C'est pour cette raison que les saisons sont moins marquées dans l'hémisphère Nord que dans l'hémisphère Sud. De plus la loi des aires oblige la Terre a se déplacer plus vite lorsqu'elle est proche du Soleil que lorsqu'elle en est éloignée ce qui diminue la durée de l'hiver boréal et augmente la durée de l'été boréal (c'est peut-être pour cette raison que février n'a que 28 jours alors que juillet et aout ont 31 jours).

## 26.6 L'équation du temps, la durée des saisons.

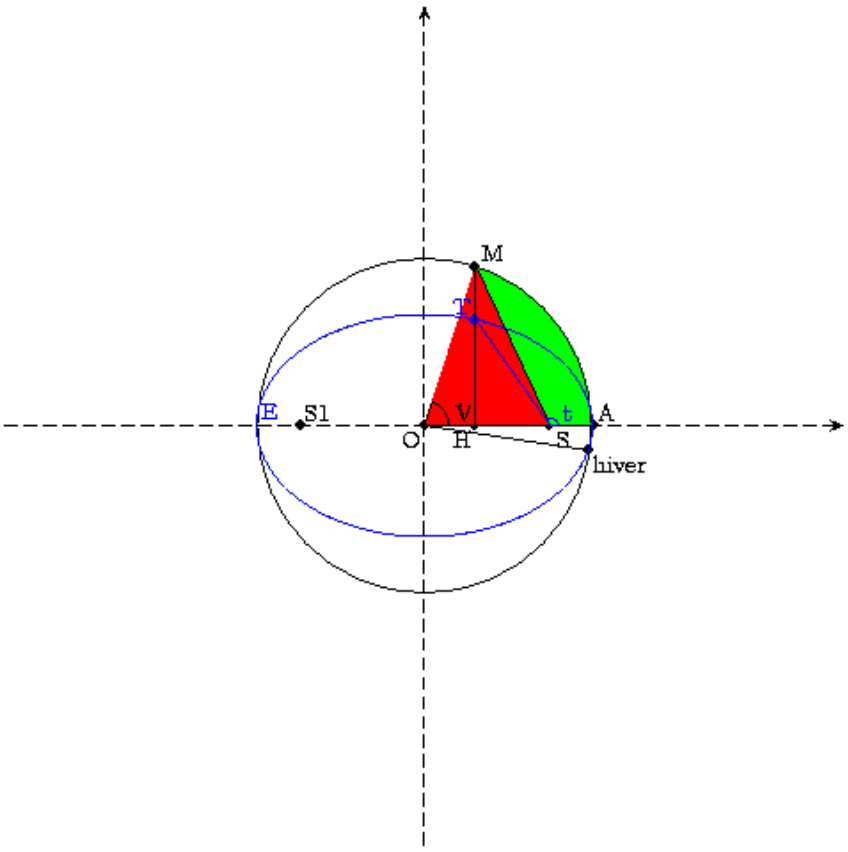



FIGURE 26.1 – Ellipse et équation du temps

La trajectoire elliptique $E$ de la Terre autour du Soleil est représentée sur la figure **??** en bleu, l'excentricité de l'orbite a été énormément exagérée, il s'agit d'une ellipse de foyers $S$ (le Soleil) et $S'$. Le point $A$ désigne le périhélie de l'orbite

(passage de la Terre au plus proche du Soleil), qui a lieu vers le 4 janvier. En noir, on a dessiné le grand cercle de l'ellipse (l'ellipse s'obtient par contraction du grand cercle de rapport $\sqrt{1-e^2}$ où $e$ est l'excentricité de l'orbite). L'aire décrite par le rayon Soleil-Terre ($ST$) est proportionnelle au temps (loi des aires qui découle de la conservation du moment cinétique), il en est donc de même de l'aire (en vert) du décrite par le rayon $SM$. Si on ajoute à cette aire verte l'aire en rouge du triangle $OSM$, on obtient l'aire de l'arc de cercle $OAM$. Donc

$$\frac{1}{2}V \times OA^2 - \frac{1}{2}OS \times HM$$

est proportionnel au temps écoulé depuis le passage au périhélie. Comme $HM = OM\sin(V)$ et $OS = e \times OA$, on en déduit que

$$V - e\sin(V) = Ct = 2\pi\frac{t}{T} \tag{26.3}$$

où la constante $C$ s'obtient en faisant varier $V$ de 0 à $2\pi$ ce qui correspond à la durée $T$ d'une révolution de la Terre autour du Soleil (1 an).

La relation entre $\theta$ (noté $t$ sur la figure) et $V$ s'obtient par exemple en calculant l'abscisse de $M$

$$\begin{aligned} x &= a\cos(V) \\ &= ea + \rho\cos(\theta) \\ &= ea + a\frac{1-e^2}{1+e\cos(\theta)}\cos(\theta) \end{aligned}$$

Les angles $V$ et $\theta$ sont de même signe et

$$\cos(V) = \frac{\cos(\theta)+e}{1+e\cos(\theta)} \tag{26.4}$$

et réciproquement :

$$\cos(\theta) = \frac{\cos(V)-e}{1-e\cos(V)} \tag{26.5}$$

**Durée des saisons** :
Il suffit de connaitre l'angle $\theta$ lors du solstice d'hiver et de lui ajouter $k\pi/2$ pour $k = 1, 2, 3$ pour connaitre l'angle $\theta$ au printemps, en été et à l'automne, on en déduit $V$ par (**??**) puis le temps écoulé depuis le périhélie avec (**??**).

**Calcul de $\theta$ en fonction du temps écoulé depuis le passage au périhélie** :
Il faut calculer $V$ par des méthodes numériques (point fixe ou méthode de Newton) en appliquant (**??**), on en déduit $\theta$ avec (**??**). En résumé, on a le :

**Théorème 63** *Soit $\theta$ l'angle entre le demi grand axe de l'ellipse et la direction Soleil-Terre, $t \in [-T/2, T/2]$ le temps écoulé depuis le passage au périhélie ($t = 0$ lorsque $\theta = 0$, $T = 1$ an). Soit $V \in [-\pi, \pi]$ la solution de*

$$V - e\sin(V) = 2\pi\frac{t}{T}$$

*où $e$ est l'excentricité de l'ellipse. Alors $\theta$ est donné par*

$$\cos(\theta) = \frac{\cos(V)-e}{1-e\cos(V)}$$

## 26.7 Les variations des paramètres orbitaux

La Terre n'est pas une sphère idéale, elle a un renflement au niveau de l'équateur, due à rotation de la Terre sur elle-même (la force centrifuge y est plus importante). Ce renflement est dans un plan qui fait un angle avec le plan de l'écliptique, le Soleil exerce donc un couple sur ce renflement. Ce phénomène est à l'origine de la précession des équinoxes, le passage au périhélie de la Terre se décale dans le temps. De plus, la Terre n'est pas seulement soumise à l'influence du Soleil, mais aussi des autres planètes, en particulier Jupiter. Cela modifie sur de très longues périodes tous les paramètres de l'orbite terrestre, en particulier l'excentricité, la précession des équinoxes, mais aussi l'obliquité (inclinaison de l'axe de rotation terrestre par rapport à la perpendiculaire au plan de l'écliptique). Le calcul de ces variations est bien au-delà des prétentions de ce texte, le lecteur intéressé pourra se référer par exemple aux publications de Laskar (chercher ce mot-clef ou des mots comme orbite, perturbation, symplectique, hamiltonien, ...). On se bornera ici à indiquer que le demi-grand axe ne varie pas, ce qui donne une relation entre les variations de la constante des aires et de l'excentricité

$$L \text{ est proportionnel à } \sqrt{1-e^2}$$

Les variations des paramètre orbitaux modifient à long terme l'ensolleillement de la Terre (la valeur de l'énergie reçue en un lieu sur une surface horizontale $s.v/\rho^2$ dépend de la latitude, de la position de la Terre sur son orbite mais aussi de l'excentricité de l'orbite, de l'obliquité et de la date du périhélie par rapport aux saisons) et sa répartition sur le globe par latitude, il est naturel de supposer qu'elles influent sur le climat de la Terre. Par exemple, l'énergie moyenne recue par la Terre au cours d'une période $T$ de une année est donnée par

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{\rho^2} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{L} = \frac{2\pi}{TL}$$

est proportionnelle à $\frac{1}{(TL)}$ donc à $(1-e^2)^{-1/2}$ (car $T$ est aussi constant d'après la 3ème loi de Képler). Au premier ordre, la variation de $e$ entraine donc une variation de l'ensolleillement global de

$$\frac{1}{2}e^2$$

Pour la Terre, cela représente au plus 2.5 pour mille (la période la plus favorable aux glaciations étant celle où l'orbite est circulaire), soit, sans rétroactions, une variation globale de 0.2 degrés Kelvin.

# Chapitre 27

# La moyenne arithmético-géométrique.

La moyenne arithmético-géométrique est un processus itératif qui converge très rapidement et est très utile pour calculer les fonctions transcendantes réciproques en multi-précision. On peut alors trouver les fonctions transcendantes directes par application de la méthode de Newton.

## 27.1 Définition et convergence

Soient $a$ et $b$ deux réels positifs, on définit les 2 suites

$$u_0 = a, v_0 = b, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \tag{27.1}$$

On va montrer que ces 2 suites sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune notée $M(a, b)$ et il se trouve que la convergence est très rapide, en raison de l'identité :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 = \frac{1}{2(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2}(u_n - v_n)^2 \tag{27.2}$$

la convergence est quadratique.

On suppose dans la suite que $a \geq b$ sans changer la généralité puisque échanger $a$ et $b$ ne change pas la valeur de $u_n$ et $v_n$ pour $n > 0$. On a alors $u_n \geq v_n$ (d'après (**??**) pour $n > 0$) et $u_{n+1} \leq u_n$ car

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq 0$$

et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{v_n v_n} = v_n$. Donc $(u_n)$ est décroissante minorée (par $v_0$), $(v_n)$ est croissante majorée (par $u_0$), ces 2 suites sont convergentes et comme $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, elles convergent vers la même limite $l$ qui dépend de $a$ et $b$ et que l'on note $M(a, b)$. On remarque aussi que $M(a, b) = bM(a/b, 1) = aM(1, b/a)$.

Précisons maintenant la vitesse de convergence lorsque $a \geq b > 0$. On va commencer par estimer le nombre d'itérations nécessaires pour que $u_n$ et $v_n$ soient du même ordre de grandeur. Pour cela, on utilise la majoration

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(v_{n+1}) \leq \ln(u_n) - \ln(v_{n+1}) = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln(v_n))$$

donc

$$\ln \frac{u_n}{v_n} = \ln(u_n) - \ln(v_n) \leq \frac{1}{2^n}(\ln(a) - \ln(b)) = \frac{1}{2^n} \ln \frac{a}{b}$$

Donc si $n \geq \frac{\ln(\ln(a/b)/m)}{\ln(2)}$ alors $\ln \frac{u_n}{v_n} \leq m$ (par exemple, on peut prendre $m = 0.1$ pour avoir $u_n/v_n \in [1, e^{0.1}]$). Le nombre minimum d'itérations $n_0$ est proportionnel au log du log du rapport $a/b$. Ensuite on est ramené à étudier la convergence de la suite arithmético-géométrique de premiers termes $a = u_{n_0}$ et $b = v_{n_0}$ et même en tenant compte de $M(a, b) = aM(1, b/a)$ à $a = 1$ et $b = v_n/u_n$ donc $0 \leq a - b \leq 1 - e^{-0.1}$. Alors l'équation (**??**) entraine

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{8}(u_n - v_n)^2$$

puis (par récurrence)

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{8^{2^n-1}}(a - b)^{2^n}$$

Donc comme $M(a, b)$ est compris entre $v_n$ et $u_n$, l'erreur relative sur la limite commune est inférieure à une précision donnée $\epsilon$ au bout d'un nombre d'itérations proportionnel au $\ln(\ln(1/\epsilon))$.

Typiquement dans la suite, on souhaitera calculer $M(1, b)$ avec $b$ de l'ordre de $2^{-n}$ en déterminant $n$ chiffres significatifs, il faudra alors $O(\ln(n))$ itérations pour se ramener à $M(1, b)$ avec $b \in [e^{-0.1}, 1]$ puis $O(\ln(n))$ itérations pour avoir la limite avec $n$ chiffres significatifs.

**Le cas complexe**

On suppose maintenant que $a, b \in \mathbb{C}$ avec $\Re(a) > 0, \Re(b) > 0$. On va voir que la suite arithmético-géométrique converge encore.

**Étude de l'argument**

On voit aisément (par récurrence) que $\Re(u_n) > 0$; de plus $\Re(v_n) > 0$ car par définition de la racine carrée $\Re(v_n) \geq 0$ et est de plus non nul car le produit de deux complexes d'arguments dans $]-\pi/2, \pi/2[$ ne peut pas être un réel négatif. On en déduit que $\arg(u_{n+1}) = \arg(u_n + v_n)$ se trouve dans l'intervalle de bornes $\arg(u_n)$ et $\arg(v_n)$ et que $\arg(v_{n+1}) = \frac{1}{2}(\arg(u_n) + \arg(v_n))$ donc

$$|\arg(u_{n+1} - \arg(v_{n+1})| \leq \frac{1}{2}|\arg(u_n) - \arg(v_n)|$$

Après $n$ itérations, on a

$$|\arg(u_n) - \arg(v_n)| \leq \frac{\pi}{2^n}$$

Après quelques itérations, $u_n$ et $v_n$ seront donc presque alignés. Faisons 4 itérations. On peut factoriser par exemple $v_n$ et on est ramené à l'étude de la suite de termes initiaux $a = u_n/v_n$ d'argument $\arg(u_n) - \arg(v_n)$ petit (inférieur en valeur absolue à $\pi/16$) et $b = 1$. On suppose donc dans la suite que

$$|\arg(\frac{u_n}{v_n})| \leq \frac{\pi/16}{2^n}$$

**Étude du module**

On a :

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{u_n}{v_n}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{u_n}{v_n}}}\right)$$

Posons $\frac{u_n}{v_n} = \rho_n e^{i\theta_n}$, on a :

$$\begin{aligned}
|\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}| &= \frac{1}{2}\left|\sqrt{\rho_n}e^{i\theta_n/2} + \frac{1}{\sqrt{\rho_n}}e^{-i\theta_n/2}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(\sqrt{\rho_n} + \frac{1}{\sqrt{\rho_n}})\cos\frac{\theta_n}{2} + i(\sqrt{\rho_n} - \frac{1}{\sqrt{\rho_n}})\sin\frac{\theta_n}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{\rho_n} + \frac{1}{\sqrt{\rho_n}})^2\cos^2\frac{\theta_n}{2} + (\sqrt{\rho_n} - \frac{1}{\sqrt{\rho_n}})^2\sin^2\frac{\theta_n}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\rho_n + \frac{1}{\rho_n} + 2\cos\theta_n}
\end{aligned}$$

Si $\rho$ désigne le max de $\rho_n$ et $1/\rho_n$, on a alors la majoration

$$|\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\rho + \rho + 2\rho} = \sqrt{\rho}$$

donc en prenant les logarithmes

$$\ln\rho_{n+1} \leq \frac{1}{2}\ln\rho = \frac{1}{2}|\ln\rho_n| \tag{27.3}$$

On rappelle qu'on a la majoration

$$|\arg(\frac{u_n}{v_n})| = |\theta_n| \leq \frac{\pi/16}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

qui va nous donner la minoration de $\rho_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\rho_{n+1} = |\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}| &= \frac{1}{2}\sqrt{\rho_n + \frac{1}{\rho_n} + 2 - 2(1-\cos\theta_n)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\rho_n + \frac{1}{\rho_n} + 2 - 4\sin^2(\frac{\theta_n}{2})} \\
&\geq \frac{1}{2}\sqrt{\rho_n + \frac{1}{\rho_n} + 2 - \theta_n^2} \\
&\geq \frac{1}{2}\sqrt{\rho_n + \frac{1}{\rho_n} + 2} \times \sqrt{1 - \frac{\theta_n^2}{\rho_n + \frac{1}{\rho_n} + 2}} \\
&\geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} + 2\frac{1}{\rho}} \times \sqrt{1 - \frac{\theta_n^2}{4}} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{\rho}}\sqrt{1 - \frac{\theta_n^2}{4}} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{\rho}}\sqrt{1 - \frac{1}{4\times 2^{2n+2}}}
\end{aligned}$$

en prenant les log et en minorant $\ln(1-x)$ par $-2x$

$$\ln \rho_{n+1} \geq \frac{1}{2}(-|\ln \rho_n| + \ln(1 - \frac{1}{4 \times 2^{2n+2}})) \geq -\frac{1}{2}(|\ln \rho_n| + \frac{1}{2^{2n+3}})$$

Finalement avec (**??**)

$$|\ln \rho_{n+1}| \leq \frac{1}{2}(|\ln \rho_n| + \frac{1}{2^{2n+3}})$$

On en déduit

$$|\ln \rho_n| \leq \frac{1}{2^n} \ln \rho_0 + \frac{1}{2^{n+3}} + ... + \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n+2}} = \frac{1}{2^n} \ln \rho_0 + \frac{1}{2^{n+2}}$$

La convergence du $\ln(u_n/v_n)$ vers 0 est donc géométrique, donc $u_n$ et $v_n$ convergent quadratiquement.

## 27.2 Lien avec les intégrales elliptiques

Le calcul de la limite commune des suites $u_n$ et $v_n$ en fonction de $a$ et $b$ n'est pas trivial au premier abord. Il est relié aux intégrales elliptiques, plus précisément on peut construire une intégrale dépendant de deux paramètres $a$ et $b$ et qui est invariante par la transformation $u_n, v_n \to u_{n+1}, v_{n+1}$ (**??**)

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

On a en effet

$$I(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{((\frac{a+b}{2})^2+u^2)(ab+u^2)}}$$

On pose alors

$$u = \frac{1}{2}(t - \frac{ab}{t}), \quad t > 0$$

où $t \to u$ est une bijection croissante de $t \in ]0, +\infty[$ vers $u \in ]-\infty, +\infty[$, donc

$$\begin{aligned} I(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt/2(1+ab/t^2)}{\sqrt{((\frac{a+b}{2})^2 + 1/4(t-ab/t)^2)(ab + 1/4(t-ab/t)^2)}} \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} = I(a,b) \end{aligned}$$

On note au passage que $I$ est définie si $a, b \in \mathbb{C}$ vérifient $\Re(a) > 0, \Re(b) > 0$, on peut montrer que la relation ci-dessus s'étend (par holomorphie).

Lorsque $a = b = l$ (par exemple lorsqu'on est à la limite), le calcul de $I(l,l)$ est explicite

$$I(l,l) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(l^2+t^2)} = \frac{\pi}{l}$$

donc

$$I(a,b) = I(M(a,b), M(a,b)) = \frac{\pi}{M(a,b)}$$

On peut transformer $I(a,b)$ en posant $t = bu$

$$I(a,b) = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+b^2u^2)(1+u^2)}} = \frac{2}{a}\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(1+(b/a)^2u^2)(1+u^2)}}$$

Puis en posant $u = \tan(x)$ ($du = (1+u^2)dx$)

$$I(a,b) = \frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1+\tan(x)^2}{1+(b/a)^2\tan(x)^2}}\, dx$$

et enfin en posant $\tan^2(x) = \frac{\sin(x)^2}{1-\sin(x)^2}$

$$I(a,b) = \frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{1-(1-\frac{b^2}{a^2})\sin(x)^2}}\, dx$$

Si on définit pour $m < 1$

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-m\sin(x)^2}}$$

alors on peut calculer $K$ en fonction de $I$, en posant $m = 1 - b^2/a^2$ soit $b^2/a^2 = 1-m$

$$K(m) = \frac{a}{2}I(a, a\sqrt{1-m}) = \frac{a}{2}\frac{\pi}{M(a, a\sqrt{1-m})} = \frac{\pi}{2M(1,\sqrt{1-m})}$$

d'où l'on déduit la valeur de l'intégrale elliptique en fonction de la moyenne arithmético-géométrique :

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-m\sin(x)^2}} = \frac{\pi}{2M(1,\sqrt{1-m})} \tag{27.4}$$

Dans l'autre sens, pour $x$ et $y$ positifs

$$K((\frac{x-y}{x+y})^2) = \frac{\pi}{2M(1,\sqrt{1-(\frac{x-y}{x+y})^2})} = \frac{\pi}{2M(1,\frac{2}{x+y}\sqrt{xy})} = \frac{\pi}{2\frac{2}{x+y}M(\frac{x+y}{2},\sqrt{xy})} = \frac{\pi}{4}\frac{x+y}{M(x,y)}$$

et finalement

$$M(x,y) = \frac{\pi}{4}\frac{x+y}{K\left((\frac{x-y}{x+y}\right)^2)}$$

## 27.3 Application : calcul efficace du logarithme.

On peut utiliser la moyenne arithmético-géométrique pour calculer le logarithme efficacement, pour cela on cherche le développement asymptotique de $K(m)$ lorsque $m$ tend vers 1. Plus précisément, on va poser $1-m = k^2$ avec $k \in ]0,1]$, donc

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin(x)^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1-(1-k^2)\cos(y)^2}}$$

en posant $y = \pi/2 - x$, et

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{\sin(y)^2 + k^2\cos(y)^2}}$$

la singularité de l'intégrale pour $k$ proche de 0 apparait lorsque $y$ est proche de 0. Si on effectue un développement de Taylor en $y = 0$, on trouve

$$\sin(y)^2 + k^2\cos(y)^2 = k^2 + (1-k^2)y^2 + O(y^4)$$

Il est donc naturel de comparer $K(m)$ à l'intégrale

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{k^2 + (1-k^2)y^2}}$$

qui se calcule en faisant par exemple le changement de variables

$$y = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\sinh(t)$$

ou directement avec Xcas,

```
supposons(k>0 && k<1);
J:=int(1/sqrt(k^2+(1-k^2)*y^2),y,0,pi/2)
```

qui donne après réécriture :

$$J = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left(\ln\left(\frac{\pi}{k}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-k^2+4\frac{k^2}{\pi^2}} + \sqrt{1-k^2}\right)\right)\right) \quad (27.5)$$

et on peut calculer le développement asymptotique de $J$ en 0

```
series(J,k=0,5,1)
```

qui renvoie :

$$J = \ln\left(\frac{\pi}{k}\right) + O(\left(\frac{-1}{\ln(k)}\right)^5)$$

on peut alors préciser ce développement par

```
series(J+ln(k)-ln(pi),k=0,5,1)
```

qui renvoie (après simplifications et où la notation $\tilde{O}$ peut contenir des logarithmes)

$$\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{\ln(\pi) - \ln(k) - 1}{2}\right)k^2 + \tilde{O}(k^4)$$

donc

$$J = -\ln(k) + \ln(\pi) + \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{\ln(\pi) - \ln(k) - 1}{2}\right)k^2 + \tilde{O}(k^4) \quad (27.6)$$

Examinons maintenant $K - J$, il n'a plus de singularité en $y = 0$, et il admet une limite lorsque $k \to 0$, obtenue en remplacant $k$ par 0

$$(K-J)_{|k=0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin(y)} - \frac{1}{y}\right)\, dy = \left[\ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right) - \ln(y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln(\frac{4}{\pi})$$

D'où pour $K$

$$K_{k\to 0} = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + O(\left(\frac{-1}{\ln(k)}\right)^5)$$

Pour préciser la partie du développement de $K$ en puissances de $k$, nous allons majorer $K - J - \ln(4/\pi)$, puis $J - \ln(\pi/k)$. Posons

$$A = \sin(y)^2 + k^2\cos(y)^2, \quad B = y^2 + (1-y^2)k^2$$

**Majoration de** $K - J - \ln(4/\pi)$
L'intégrand de la différence $K - J - \ln(\frac{4}{\pi})$ est

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{B}} - \left(\frac{1}{\sin(y)} - \frac{1}{y}\right) &= \frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{A}\sqrt{B}} - \frac{y-\sin(y)}{y\sin(y)} && (27.7)\\
&= \frac{B-A}{\sqrt{A}\sqrt{B}(\sqrt{A}+\sqrt{B})} - \frac{y-\sin(y)}{y\sin(y)} && (27.8)\\
&= \frac{(y^2-\sin(y)^2)(1-k^2)}{\sqrt{A}\sqrt{B}(\sqrt{A}+\sqrt{B})} - \frac{y-\sin(y)}{y\sin(y)} && (27.9)
\end{aligned}$$

Soit

$$K-J-\ln(\frac{4}{\pi}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(y-\sin(y))[(1-k^2)y\sin(y)(y+\sin(y)) - \sqrt{AB}(\sqrt{A}+\sqrt{B})]}{\sqrt{A}\sqrt{B}(\sqrt{A}+\sqrt{B})y\sin(y)} \quad (27.10)$$

On décompose l'intégrale en 2 parties $[0,k]$ et $[k,\pi/2]$. Sur $[0,k]$ on utilise (**??**), on majore chaque terme séparément et on minore $A$ et $B$ par

$$A = k^2 + (1-k^2)\sin(y)^2 \geq k^2, \quad B = k^2 + (1-k^2)y^2 \geq k^2$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\int_0^k| &\leq \int_0^k \frac{|B-A|}{2k^3}\,dy + \int_0^k (\frac{1}{\sin(y)} - \frac{1}{y})\,dy\\
&\leq \int_0^k \frac{y^2-\sin(y)^2}{2k^3}\,dy + \ln(\tan(\frac{k}{2})) - \ln(\frac{k}{2})\\
&\leq \frac{\frac{1}{3}k^3 + \frac{-1}{2}k + \frac{1}{4}\sin(2k)}{2k^3} + \ln(\sin(\frac{k}{2})) - \ln(\frac{k}{2}) - \ln(\cos(\frac{k}{2}))\\
&\leq \frac{\frac{1}{3}k^3 + \frac{-1}{2}k + \frac{1}{4}(2k - \frac{8k^3}{6} + \frac{32k^5}{5!}}{2k^3} - \ln(\cos(\frac{k}{2}))\\
&\leq \frac{k^2}{30} - \ln(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{k}{2}\right)^2)\\
&\leq \frac{k^2}{30} + \frac{k^2}{4}
\end{aligned}$$

Sur $[k,\pi/2]$, on utilise (**??**) et on minore $A$ et $B$ par

$$A = \sin(y)^2 + k^2\cos(y)^2 \geq \sin(y)^2, \quad B = y^2 + (1-y^2)k^2 \geq y^2$$

on obtient

$$|\int_k^{\frac{\pi}{2}}| \leq \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{(y-\sin(y))|C|}{y\sin(y)(y+\sin(y))},$$

où :

$$\begin{aligned} C &= (1-k^2)y\sin(y)(y+\sin(y)) - A\sqrt{B} + B\sqrt{A} \\ &= -A(\sqrt{B}-y) - B(\sqrt{A}-\sin(y)) - Ay - B\sin(y) + (1-k^2)y\sin(y)(y+\sin(y)) \\ &= -A(\sqrt{B}-y) - B(\sqrt{A}-\sin(y)) - k^2(y+\sin(y)) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |C| &\leq A(\sqrt{B}-y) + B(\sqrt{A}-\sin(y)) + k^2(y+\sin(y)) \\ &\leq A\frac{B-y^2}{\sqrt{B}+y} + B\frac{A-\sin(y)^2}{\sqrt{A}+\sin(y)} + k^2(y+\sin(y)) \\ &\leq A\frac{k^2}{2y} + B\frac{k^2}{2\sin(y)} + k^2(y+\sin(y)) \end{aligned}$$

et

$$|\int_k^{\frac{\pi}{2}}| \leq \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{(y-\sin(y))k^2(\frac{A}{2y} + \frac{B}{2\sin(y)} + (y+\sin(y)))}{y\sin(y)(y+\sin(y))}$$

On peut majorer $y - \sin(y) \leq y^3/6$, donc

$$|\int_k^{\frac{\pi}{2}}| \leq \frac{k^2}{6}\int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{Ay}{2\sin(y)(\sin(y)+y)} + \frac{By^2}{\sin(y)^2(\sin(y)+y)} + \frac{y^2}{\sin(y)}$$

On majore enfin $A$ et $B$ par 1,

$$|\int_k^{\frac{\pi}{2}}| \leq \frac{k^2}{6}\int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{2\sin(y)^2} + \frac{y^2}{\sin(y)}$$

Le premier morceau se calcule par intégration par parties

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{6}\int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{2\sin(y)^2} &= \frac{k^2}{6}\left([-\frac{y}{\tan(y)}]_k^{\pi/2} + \int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan(y)}\right) \\ &= \frac{k^2}{6}\left(\frac{k}{\tan(k)} + [\ln(\sin(y))]_k^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{k^2}{6}\left(\frac{k}{\tan(k)} - \ln(\sin(k))\right) \\ &\leq \frac{k^2}{6}(1-\ln(k)) \end{aligned}$$

Le deuxième morceau se majore en minorant $\sin(y) \geq (2y)/\pi$

$$\frac{k^2}{6}\int_k^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^2}{\sin(y)} \leq \frac{k^2}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}y = \frac{k^2\pi^3}{96}$$

Finalement

$$|K - J - \ln(\frac{4}{\pi})| \leq k^2\left(-\frac{1}{6}\ln(k) + \frac{\pi^3}{96} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{4}\right)$$

où $J$ est donné en (**??**).

**Majoration de** $J - ln(\pi/k)$

On a

$$|J - \ln\left(\frac{\pi}{k}\right)| = \left|(\frac{1}{\sqrt{1-k^2}} - 1)\ln\left(\frac{\pi}{k}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-k^2+4\frac{k^2}{\pi^2}} + \sqrt{1-k^2}\right)\right)\right|$$

et on va majorer la valeur absolue de chaque terme de la somme. Pour $k \leq 1/2$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2}} - 1 = \frac{k^2}{\sqrt{1-k^2}+1-k^2} \leq \frac{k^2}{3/4+\sqrt{3}/2}$$

Pour le second terme, on majore le facteur $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ par $\frac{2}{\sqrt{3}}$, l'argument du logarithme est inférieur à 1 et supérieur à

$$\frac{1}{2}(1 - \frac{k^2}{2} + 1 - \frac{k^2(1-\frac{4}{\pi^2})}{2}) = 1 - k^2(1 - \frac{1}{\pi^2}) > 1 - k^2$$

donc le logarithme en valeur absolue est inférieur à

$$2k^2$$

donc, pour $k \leq 1/2$,

$$|J - \ln\left(\frac{\pi}{k}\right)| \leq \frac{k^2}{3/4+\sqrt{3}/2}\ln\left(\frac{\pi}{k}\right) + k^2\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Finalement, pour $k < 1/2$

$$|K - \ln\left(\frac{4}{k}\right)| \leq k^2\left(\frac{\ln\pi}{3/4+\sqrt{3}/2} + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{\pi^3}{96} + \frac{9}{20} - (\frac{1}{3/4+\sqrt{3}/2} + \frac{1}{6})\ln(k)\right) \tag{27.11}$$

que l'on peut réécrire

$$|\frac{\pi}{2M(1,k)} - \ln\left(\frac{4}{k}\right)| \leq k^2(3.8 - 0.8\ln(k)) \tag{27.12}$$

La formule (**??**) permet de calculer le logarithme d'un réel positif avec (presque) $n$ bits lorsque $k \leq 2^{-n/2}$ (ce à quoi on peut toujours se ramener en calculant le logarithme d'une puissance $2^m$-ième de $x$ ou le logarithme de $2^m x$, en calculant au préalable $\ln(2)$). Par exemple, prenons $k = 2^{-27}$, on trouve (en 8 itérations) $M(1, 2^-27) = M_1 = 0.0781441403763$. On a, avec une erreur inférieure à $19 \times 2^{-54} = 1.1 \times 10^{-15}$

$$M(1, 2^-27) = M_1 = \frac{\pi}{2\ln(2^{29})} = \frac{\pi}{58\ln(2)},$$

On peut donc déduire une valeur approchée de $\pi$ si on connait la valeur approchée de $\ln(2)$ et réciproquement. Si on veut calculer les deux simultanément, comme les relations entre $\ln$ et $\pi$ seront des équations homogènes, on est obligé d'introduire une autre relation. Par exemple pour calculer une valeur approchée de $\pi$ on calcule la différence $\ln(2^{29}+1) - \ln(2^{29})$ dont on connait le développement au premier ordre, et on applique la formule de la moyenne arithmético-géométrique. Il faut faire attention à la perte de précision lorsqu'on fait la différence des deux logarithmes qui sont très proches, ainsi on va perdre une trentaine de bits (de même pour les moyennes). On peut aussi calculer $\pi$ directement avec $M(1, \sqrt(2))$ en utilisant des propriétés des intégrales elliptiques

```
f(n):={
  local x,y,z,p;
  x:=evalf(1/sqrt(2),2^n);
  y:=(1+x)/2/sqrt(x);
  z:=1/sqrt(x);
  p:=evalf(2+sqrt(2),2^n);
  for k from 1 to n do
    p,y,z:=p*(1+y)/(1+z),(1+y)/sqrt(y)/2,(1+y*z)/(1+z)/sqrt(y);
  od;
  retourne p;
}:;
```

L'intérêt de cet algorithme apparait lorsqu'on veut calculer le logarithme avec beaucoup de précision, en raison de la convergence quadratique de la moyenne arithmético-géométrique (qui est nettement meilleure que la convergence linéaire pour les développements en série, ou logarithmiquement meilleure pour l'exponentielle), par contre elle n'est pas performante si on ne veut qu'une dizaine de chiffres significatifs. On peut alors calculer les autres fonctions transcendantes usuelles, telle l'exponentielle, à partir du logarithme, ou les fonctions trigonométriques inverses (en utilisant des complexes) et directes.

On trouvera dans Brent-Zimmermann quelques considérations permettant d'améliorer les constantes dans les temps de calcul par rapport à cette méthode (cela nécessite d'introduire des fonctions spéciales $\theta$) et d'autres formules pour calculer $\pi$.

On peut ensuite à partir du logarithme, calculer l'exponentielle en utilisant la méthode de Newton.

# Annexe A

# Bonus : le “making of” de Giac/Xcas

## A.1 Comment le projet Giac/Xcas est né.

Lorsque j’étais au lycée au début des années 80, nous avions des calculatrices scientifiques mais les calculatrices graphiques n’existaient pas encore, et les particuliers n’avaient pas d’ordinateurs ni de téléphone portable (cela doit paraitre incroyable à un lycéen actuel, pourtant cela fait à peine plus de 30 ans !). On pouvait programmer le calcul d’une fonction pour faire un tableau de valeurs, par une suite d’opérations ressemblant un peu à de la programmation en langage assembleur, avec quelques régistres pour stocker des résultats intermédiaires et un nombre très limité de mémoires et de pas de programmes (environ 50 instructions). J’ai ensuite appris à programmer sur un Apple II en Basic puis en assembleur, puis en Pascal sur un PC compatible IBM (avec 512K de RAM, pour plus de 10kg), mais sans jamais essayer de logiciels de maths, tout cela en amateur, puisque je faisais mes études de maths, conclues en 1992 par un doctorat en physique mathématique à Orsay : je n’ai donc jamais suivi un seul cours d’informatique ni même de cours où on utilise l’outil informatique, j’ai sans doute perdu quelques enseignements utiles, mais je n’ai pas été déformé par l’enseignement de certains, je pense par exemple à ceux qui n’ont jamais écrit de gros programmes et préconisent de ne pas utiliser `break` ou `return` dans une boucle alors que cela rend le code beaucoup plus lisible que d’ajouter un booléen artificiel, ou qui sont incapables de mettre au point un programme.

Je n’avais donc jamais entendu parler de calcul formel avant 1993, et c’est Gilles, un de mes étudiants de Deug (on dirait licence 1ère année aujourd’hui) qui m’a montré le calcul d’une dérivée symbolique et d’un inverse de matrice sur une calculatrice HP (qui était le leader du marché haut de gamme avant que TI ne sorte la TI92 puis la TI89). L’idée de pouvoir faire ce type de calculs sur calculatrices m’a séduit, j’étais assez insatisfait des exercices que l’on donnait en examen aux étudiants où la différence entre un 8 et un 12 se fait souvent sur une petite étourderie dans une résolution de système linéaire et pas du tout sur la compréhension des notions au programme. J’ai donc décidé de rattraper mon retard dans le domaine, d’acheter une calculatrice et de la documentation pour la programmer l’été suivant. C’était indispensable, car le moteur de calcul formel fourni sur les HP48

était très limité. D'un certain point de vue, c'était une chance, puisqu'il y avait tout à faire donc tout à apprendre. Au cours des années qui ont suivi, j'ai amélioré ces programmes, et je les ai mis à disposition de la communauté des utilisateurs de calculatrices HP sous le nom d'Erable (en clin d'oeil à Maple). Erable fait partie de ce que l'on peut qualifier de système de calcul formel "jouets", j'entends par là capable de résoudre les exercices calculatoires donnés du lycée à la licence de maths. En même temps, j'enseignais l'algorithmique en licence (avec toute une équipe très sympathique : Renée, Roland, Gérard, Frédéric). On programmait en Pascal au début, puis rapidement on a basculé les enseignements en C/C++. Renée s'intéressait aussi aux calculatrices et pensait qu'il fallait contacter HP (il y a un centre HP en banlieue de Grenoble), ce qui ne fut pas évident mais finit par déboucher sur la création d'un module optionnel calculatrices en Deug (avec des calculatrices prêtées par HP), puis en 1997 des contacts avec la nouvelle équipe calculatrices de HP en Australie. En 1998/99, j'ai effectué une délégation pour mettre au point la HP49 avec l'équipe australienne, afin d'y intégrer Erable. Un an plus tard nous sortons la HP40, version lycée simplifiée et moins chère de la HP49, projet porté par Jean Tavenas chez HP Grenoble. Mais HP décide alors que les calculatrices graphiques ne sont pas assez rentables, les efforts de Jean pour faire la publicité de la HP40 sont stoppés juste au moment où ils commençaient à porter leurs fruits (avec une calculatrice formelle au prix de la TI83, la HP40 avait pourtant toutes ses chances, c'était d'ailleurs encore vrai en 2014, la HP40GS était la calculatrice formelle la moins chère du marché, à un prix équivalent aux graphiques d'entrée de gamme de TI et Casio.

C'est cette expérience avec HP qui m'a fait prendre conscience qu'il était possible d'écrire un logiciel de calcul formel compétitif. Ma décision d'abandonner le développement sur HP49/40 fut alors la conséquence d'une part de la mise en retrait de HP du marché, d'autre part de la modification de l'épreuve d'option de l'agrégation de maths, qui devenait un oral de modélisation avec utilisation de logiciels. À l'époque seuls les logiciels propriétaires "leaders du marché" étaient autorisés (Maple et Mathematica pour ne pas les nommer), il n'y avait pas un seul logiciel libre de calcul formel et cela m'avait beaucoup choqué. Au début j'argumentais pour l'ajout de Mupad qui était sinon libre au moins gratuit (Mupad n'existe plus isolément aujourd'hui). Quelques années plus tard, Maxima et d'autres logiciels libres ont été rajoutés à la liste des logiciels, mais sans connaitre beaucoup de succès parmi les candidats. Au lancement du projet Giac/Xcas en 2000, j'avais comme objectif que Xcas soit un jour intégré dans la liste des logiciels de l'oral de modélisation (ce fut le cas en 2005, mais les premiers candidats à l'utiliser ne l'ont fait que vers 2007 ou 2008...).

## A.2 L'enfance d'Xcas : 2000-2006

L'année 2000 marque sans doute un tournant dans ma carrière, je viens d'achever l'année de délégation pour mettre au point la HP49, et le travail se poursuit pour sortir la HP40 à la rentrée scolaire. Le tandem se met en place avec Renée qui rédige le manuel de calcul formel de la HP40G. C'est la dernière année où je travaille activement en recherche sur des thèmes de physique mathématique. Au moment où nous avions décider de basculer l'enseignement d'algorithmique du

Pascal au C (fin des années 90), j'avais regardé les possibilités de bibliothèque pour faire un peu de calcul en précision arbitraire à défaut de faire du calcul formel (on a essayé LiDiA, PARI, mais sans vraiment être satisfait). En mai 2000, alors que le projet HP40 s'achève, je me lance dans un projet d'extension de la librairie C++ de calcul symbolique GiNaC, il s'agissait dans un premier temps d'améliorer les fonctions polynômiales avec des représentations non symboliques, pour avoir de la simplification et de la factorisation. Après plusieurs mois, je me rends compte que la philosophie de GiNaC ne me convient pas, je bascule vers un projet complètement indépendant, que je nomme Giac, en référence à GiNaC [1]. Au début il s'agissait juste d'avoir une librairie C++ capable de faire des opérations sur les polynômes de manière efficace. Pendant 2 ans, j'implémente les algorithmes de base d'un CAS pour la licence de maths (pgcd, factorisation, intégration, limites...), puis je crée une petite interface pour pouvoir tester le tout sans avoir à écrire un programme C++ à chaque fois. La première version publique de Xcas est disponible en 2002, elle est très influencée par les interfaces de calculatrices. En 2003/2004, premier contact avec le milieu de la recherche en calcul formel, dont certains membres veulent créer une alternative aux grands logiciels propriétaires du domaine, soit par conviction, soit tout simplement pour des raisons de budget. Une conférence a lieu à Lyon puis une école d'été, où sont présents de mombreux développeurs de logiciels libres (Axiom, Fricas, Maxima, texmacs, pari, gap, MPFR... mais aussi des gens de Mupad même s'il n'est pas libre). Cette conférence n'a de mon point de vue abouti à rien de concret, chacun tirant pour sa chapelle. La présentation des objectifs du projet Giac/Xcas n'a pas du tout attiré les autres participants, d'une part à cause de mes déficiences en anglais, d'autre part parce que l'objectif prioritaire de Xcas (pour l'enseignement) est souvent assez éloigné des objectifs d'un logiciel pour la recherche en calcul formel, sans parler de l'orientation calculatrice de l'interface de Xcas à l'époque. C'est plutôt vers le projet Sage que la communauté recherche de calcul formel "libre" se tournera un peu plus tard. Les deux projets Giac/Xcas et Sage coopèrent aujourd'hui au sens où Giac est un paquet standard de Sage, mais restent concurrents voir plus bas section **??**.

Parallèlement, Renée a lancé à l'IREM de Grenoble un groupe de travail sur l'utilisation des calculatrices formelles au lycée, à l'automne 2000 : HP mettait à disposition des profs de lycée participants des valises de HP40G prêtées aux élèves. Peu après, HP se désintéresse des calculatrices, l'idée de tester le Xcas (d'alors) en classe est venue tout naturellement. Ce sont Michèle Gandit et Christianne Serret qui se lancent dans l'aventure, c'est bien le mot, parce qu'il fallait y croire avec les très nombreux bugs et manques de l'interface de l'époque. C'est l'observation des problèmes rencontrés par les élèves qui m'a fait prendre conscience qu'une révision complète de l'interface s'imposait, et j'y ai consacré une bonne année de travail, aboutissant à une interface proche de l'actuelle. C'est cette nouvelle interface qui a permis le décollage de Xcas, que l'on peut juger au nombre de téléchargements, ainsi que par les interactions avec des utilisateurs inconnus.

1. acronyme récursif de GiNac Is Not A Cas, jeu de mot identique à Gnu is Not Unix, alors que Giac est l'acronyme de Giac Is A Cas

## A.3 La montée en puissance : 2007-2013

En 2007, Xcas participe aux Trophées du Libre, (concours de logiciels libres qui n'existe plus aujourd'hui), et obtient la 3ième place dans la catégorie logiciels scientifiques. J'espérais que cela marquerait une étape décisive dans la montée en puissance, par exemple en faisant entrer Xcas dans des distributions Linux, mais cela n'a pas servi (et encore aujourd'hui Giac n'a pas réussi à entrer dans les distributions Linux majeures, même si l'entrée dans Fedora semble imminente). En fait la montée en puissance s'est faite progressivement, avec environ une dizaine de % d'utilisateurs en plus chaque année, grâce aux améliorations implémentées par l'interaction avec les profs de maths sur le forum de Xcas ou par email. C'est aussi vers 2008 que l'interface est devenue suffisamment intuitive pour que les étudiants de la préparation à l'agrégation de Grenoble option calcul formel basculent de Maple vers Xcas (avec une période de transition où certains travaillaient avec Maple en même temps que d'autres avec Xcas). Suivis peu de temps après par Jussieu (F. Han). Puis progressivement dans certains enseignements de licence à Grenoble et sans doute ailleurs.

Le projet Giac va aussi prendre en 2011 une direction un peu imprévue, c'est la valorisation. Le noyau de Giac va en effet pour la première fois être intégré à une application commerciale, PocketCAS. Ce qui nécessitera de contacter les services de valorisation de l'université, début d'un épisode difficile que je ne peux pas commenter plus pour des raisons de confidentialité.

## A.4 2013-2017

Le nombre de téléchargements de Xcas dépasse maintenant les 50 000 par an avec des pointes mensuelles en septembre et octobre à plus de 12 000 (principalement sous Windows). Xcas est présent dans la grande majorité des livres de maths de Terminale S, on en parle aussi en ES (une copie d'écran de Xcas se trouve d'ailleurs dans le sujet du bac ES 2014). La couverture en France est donc plutôt bonne, c'est vers l'étranger qu'il faut maintenant gagner des parts de marché (ce qui nécessitera une amélioration de la documentation en anglais).

Au concours de l'agrégation externe, Xcas est choisi par une fraction significative des candidats en modélisation option C (un tiers environ en 2012). Parallèlement à la montée en puissance de Xcas, l'arrivée de Sage, la fin de Maple (et Mathematica) en classes préparatoires et le succès de Scilab en calcul numérique et probabilités, ont fait que la situation s'est renversée, en 2015, seuls les logiciels libres sont autorisés à cette épreuve de modélisation, on peut dire que c'est un beau succès pour les logiciels libres, auquel Xcas a contribué. En 2013/14, j'ai retravaillé pour les candidats aux options A et surtout B : refonte de la page agrégation externe, ajout de fonctionnalités, testées dans un cours de méthodes numériques niveau licence 3ième année. Il y a en effet une part de marché à conquérir parmi tous les candidats qui utilisaient auparavant Maple, en particulier pour tous les certifiés qui ne sont pas inscrits à une préparation, Xcas est un choix qui semble rationnel : ceux qui ont appris Maple peuvent utiliser leurs connaissances, Xcas est aussi proposé à l'agrégation interne et les professeurs peuvent utiliser Xcas avec leurs élèves ce qui est certainement un excellent entrainement pour la mise au point d'un petit programme le jour du concours. Xcas est aussi présent pour les oraux du

Capes, mais je n'ai pas de retour sur son utilisation réelle par les candidats, même si plusieurs préparations semblent utiliser Xcas.

La collaboration entamée avec Geogebra en 2013 se concrétise avec la version 4.4 sortie en décembre 2013 qui interface Giac (module natif java et version web) avec la fenêtre CAS de Geogebra. Les interfaces vers d'autres langages s'améliorent, module Python, interface avec Sage (F. Han), utilisation depuis Javascript. Plusieurs projets libres utilisent Giac comme moteur de calcul : Qcas (interface alternative, qui pourrait remplacer Xcas un jour), Smartcas (calculatrice CAS dans votre navigateur), Xcas Pad (sur tablettes)...

Coté valorisation, Giac fait aujourd'hui l'objet de plusieurs contrats de commercialisation (en dual-licensing), le plus important avec HP pour le CAS des calculatrices HP-Prime.

## A.5 Le présent et le futur proche

La collaboration avec Geogebra m'ayant fait développer une version compilée en Javascript de Giac, j'avais écrit une petite interface web pour la tester. Décidé à pouvoir utiliser Xcas sur mon smartphone, je l'avais amélioré petit à petit. En mars 2018 elle commence à être une alternative envisageable à la version native de Xcas. On y retrouve l'essentiel des fonctionnalités de Xcas (il manque certaines fonctionnalités, mais dans des domaines comme la géométrie interactive où les utilisateurs travaillent avec des logiciels concurrents), en bien plus transparent pour l'utilisateur qui n'a pas besoin d'installer quoi que ce soit, et qui peut échanger bien plus facilement des sessions de calculs par email. Toujours avec le moteur Javscript de Giac, j'implémente un jeu de commandes utilisables dans un fichier LaTeX pour en avoir une sortie HTML+Mathml consultable depuis un navigateur, ce qui permet de faire des documents mathématiques interactifs où le lecteur peut exécuter des commandes du document après les avoir éventuellement modifiés.

En 2017, les programmes d'algorithmique de seconde changent, en introduisant la notion de fonction en algorithmique, ce qui donne une nouvelle opportunité d'utiliser Xcas au lycée. Mais même si les programmes officiels n'imposent aucun langage, la hiérarchie de l'Éducation Nationale veut imposer Python ce qui va fatalement empêcher l'adoption de Xcas. À la rentrée 2017, une nouvelle calculatrice graphique sort, la Numworks, avec micro-Python comme langage de programmation, elle sera d'ailleurs suivie par Casio en mars 2018. Il devient donc stratégiquement important de faciliter le passage de Python à Xcas, je décide de créer un traducteur. Six mois plus tard, il permet de faire fonctionner de nombreux scripts niveau lycée avec des modifications mineures, voire tels quels dans les cas favorables. Combiné avec l'interface Xcas pour Firefox, on peut imaginer dans un futur proche que des élèves de lycée programment directement sur leur smartphone ou tablette avec Xcas en mode compatible Python. La compatibilité Python devrait également être appréciée par les possesseurs de calculatrices HP Prime.

## A.6 Les concurrents open-source.

Les principaux concurrents open-source de Giac/Xcas sont Maxima et Sage. Il existe d'autres logiciels libres de calcul formel généralistes, mais ils ne semblent

pas avoir beaucoup d'utilisateurs.

L'utilisation de Giac et de Maxima est assez proche, ce sont tous deux des logiciels qui fonctionnent localement (sans avoir besoin de connexion Internet), installables facilement sous Windows, Linux et Mac OS, avec une prise en main rapide aidée par un typage faible et par l'interface (Xcas ou Wxmaxima). Maxima est plus connu dans le monde anglo-saxon car il est plus ancien, alors que Xcas est maintenant bien implanté en France (et sans doute dans d'autres pays francophones) grace à la documentation en français. Xcas évolue plus vite. Giac dispose d'algorithmes beaucoup plus performants pour de (gros) calculs polynomiaux pour la recherche (meilleur moteur open-source de calcul de bases de Groebner à l'heure actuelle par exemple) et est bien adapté à un usage en enseignement dès le lycée (en particulier par son intégration comme CAS de geogebra). Un challenge pour Xcas pour les années à venir va être d'augmenter la part de marché dans le monde anglo-saxon, il nous faudrait un amateur motivé parlant nativement anglais prêt à consacrer du temps pour améliorer la documentation en anglais.

Sage est très différent de Xcas et Maxima. On peut certes l'utiliser comme un logiciel local en ligne de commande, mais pour une interface plus conviviale il faut utiliser le modèle client-serveur, l'interface étant alors dans le navigateur. Les ressources nécessaires sont significativement plus importantes si on l'installe localement, et l'accès Internet est indispensable sinon [2]. Le langage de Sage est beaucoup plus typé que celui de Giac, il est philosophiquement plus proche de Magma que de Maple ou Mathematica, donc plus difficile à apprendre pour qui n'a pas la fibre algébriste : il faut commencer par déclarer dans quel ensemble on travaille, est-ce un anneau, un corps, un anneau de polynômes par rapport à quelle(s) variable(s) [3]. Sage se fonde sur un énorme corpus de logiciels et bibliothèques (dont Maxima, appelé pour les calculs symboliques, Giac en est aussi un composant mais peu utilisé par défaut), qu'il fait communiquer entre eux, un peu à la manière d'une distribution linux qui fait cohabiter des composants logiciels, mais de manière plus intime, Python servant de colle entre les briques logicielles écrits en différents langages (c'est aussi là une différence importante avec Giac qui utilise C/C++ pour dialoguer avec d'autres bibliothèques ou logiciels, tout en restant utilisable comme module Python). C'est la force et la faiblesse de Sage, car on bénéficie de certains composants très performants, mais le code propre de Sage est très dépendant de l'évolution de ces composants :

— son composant d'infrastructure le plus fondamental, la version de Python utilisée est figée depuis plusieurs années en 2.7 (alors que le module giacpy pour accéder à giac depuis Python fonctionne en versions 2.7 et 3.x),
— toutes les opérations de calcul formel non spécialisé font très souvent appel à Maxima, si une intégrale rend un résultat incorrect, il faut en informer les développeurs de Maxima
— les opérations polynomiales rapides font appel à des bibliothèques C/C++ et dépendent donc des performances de ces bibliothèques : par exemple le

2. Il serait d'ailleurs intéressant de calculer le cout énergétique d'un même calcul fait par Sage, Maxima, Xcas et une calculatrice formelle ! Pour avoir un ordre de grandeur, une recherche sur google émettrait 7g de CO2, soit environ 16Wh, de quoi faire fonctionner un ordinateur portable un quart d'heure et une calculatrice haut de gamme pendant une journée

3. sauf si on utilise l'anneau symbolique, analogue à ce qui se passe dans Xcas, Maple ou Mathematica

calcul de base de Groebner sur les entiers utilise Singular, dont la version actuelle est très inefficace sur $\mathbb{Z}$

De ce fait, le portage est difficile : sans même parler des OS de tablettes et smartphones, ce n'est que fin 2016 qu'apparait une version Windows, sinon il faut faire communiquer le navigateur sous Windows avec un serveur sage dans une machine virtuelle sous linux, ce qui nécessite significativement plus de ressources [4] que pour Giac, qui peut même tourner sur des calculatrices.

Les deux stratégies de développement de Giac et Sage sont assez opposées [5] : Giac se contente de peu de ressources et cible le public enseignement dès le lycée (calculatrices, geogebra) alors que W. Stein, le fondateur de Sage se tourne vers le cloud computing : "Measured by the mission statement, Sage has overall failed. The core goal is to provide similar functionality to Magma (and [Maple, Mathematica Matlab]) across the board, and the Sage development model and community has failed to do this across the board, since after 9 years, based on our current progress, we will never get there. There are numerous core areas of research mathematics that I'm personally familiar with (in arithmetic geometry), where Sage has barely moved in years and Sage does only a few percent of what Magma does." "The longterm plan is to start a separate for-profit company if we build a sufficient customer base. If this company is successful, it would also support fulltime development of Sage (e.g., via teaching buyouts for faculty, support of students, etc.), similar to how Magma (and Mathematica, etc.) development is funded." (`http://sagemath.blogspot.co.uk/2014/08/what-is-sagemathcloud-lets-clear-some.html`).

4. 512M de RAM pour la machine virtuelle linux, à quoi il faut ajouter le logiciel VirtualBox et le navigateur. De plus la taille des calculs possibles est limitée par la RAM allouée à la machine virtuelle.

5. Ce qui est peut-être une bonne chose, on peut le voir comme deux stratégies complémentaires pour le calcul formel libre

# Annexe B

# Quelques opinions.

## B.1 Languages

La question du choix de langage en informatique est récurrente. J'ai choisi C++ pour Giac/Xcas, en fait c'est plutôt du C– (au sens où Giac définit très peu de classes lui-même, mais utilise les facilités de la bibliothèque C++).

Lorsque j'ai développé pour la HP48 dans les années 90, le langage était du RPL, un dérivé du Forth, sorte de Lisp restreint écrit en polonaise inversé, spécialement conçu pour créer des programmes compacts (le CAS de la HP49 occupe environ 200K, l'ensemble du système environ 1M). C'était un langage où on pouvait tout manipuler, y compris la pile des retours de fonction. Mais c'était un langage difficile à maitriser et où le moindre changement nécessitait de reconcevoir complètement le programme. C'était aussi un langage interprété donc lent, et comme pour tout langage interprété, optimiser nécessite une longue pratique et rend le programme optimisé encore plus incompréhensible que dans d'autres langages. Et bien sur c'est un langage propriétaire, complètement inutilisable en-dehors des HP48/49/50.

C'est donc avec ces défauts en tête que j'ai choisi le langage de Giac : portabilité, facilités pour optimiser, mettre au point et modifier, vitesse. Ce qui excluait tout langage interprété. Le choix de C/C++ c'était aussi la possibilité d'utiliser des opérateurs sur le type générique de giac, pour pouvoir écrire `b*b-4*a*c` et pas `sub(mult(b,b),mult(4,mult(a,c)))` comme en Java.

Je ne regrette pas un instant ce choix. Si on regarde les logiciels de calcul formel, on a essentiellement 3 langages :

- Lisp utilisé par Maxima. Cela affecte le nombre de développeurs potentiels du système, et nécessite d'avoir un interpréteur Lisp sur certaines plateformes (avec des problèmes de lenteur)
- C/C++ utilisé par Xcas, Maple, Mathematica mais aussi par de nombreux logiciels et librairies mathématiques : GMP, MPFR, NTL, Pari-GP, Singular...
- Python utilisé par Sage et Sympy. Sage doit toutefois être un peu mis à part, la plupart de ses fonctionnalités sont en fait héritées de bibliothèques C ou logiciels interfacés et les développeurs ont recours à une sorte de traducteur C (cython) pour optimiser certaines portions de code Python natif. Sympy se classe pour le moment encore dans les systèmes de calcul formel jouets, et est structurellement très lent comparé à giacpy.

Je pense que le potentiel de portabilité et réutilisation de code est maximal en C/C++, on peut s'intégrer dans du Python (module giacpy et interface giac/sage de F. Han, l'inverse est beaucoup plus difficile et nécessite plus de ressources, essayez d'appeler du code sage depuis un programme C/C++ !), du java (module natif javagiac utilisé par geogebra), du Javascript (le langage de base du web ! Giac se compile en Javascript), du code natif pour le navigateur google-chrome, en embarqué (sur les HP Prime, mais aussi ailleurs, la plus petite version de giac existante à ce jour occupe moins de 5M et tourne sur calculatrices TI nspire) ou enfoui dans un autre programme (C/C++ ou avec un langage interfaçable, par exemple de la liste fournie par SWIG). La durée de vie de code C/C++ est aussi excellente, le langage C/C++ est au coeur de la très grande majorité des applications utilisées aujourd'hui. L'avenir de Javascript ou de Python parait aujourd'hui assuré, mais c'était la situation de Java il y a une dizaine d'années, alors qu'aujourd'hui on ne peut plus en dire autant.

Bien sur, écrire un programme en C/C++ nécessite un peu plus d'apprentissage qu'écrire un programme en Python ou en tout autre langage interprété, mais c'est je pense aussi plus formateur, on comprend mieux les avantages et inconvénients d'utiliser un conteneur, un type de donnée précis ou un algorithme avec un langage plus proche de la machine réelle qu'avec une machine abstraite filtrée par les possibilités mises à disposition par l'interpréteur (avec souvent un biais lorsqu'on optimise, on favorise l'instruction implémentée le plus efficacement par l'interpréteur au détriment de l'algorithme le plus efficace, ce qui conduit par exemple à choisir un style fonctionnel plus difficile à concevoir, relire et modifier et moins efficace dans un langage compilé).

## B.2 Le libre, la recherche et l'éducation

Le logiciel libre a fini par se faire une place au soleil, mais cela n'a pas été facile. Au sein de l'éducation nationale, c'est probablement les restrictions budgétaires qui ont été le meilleur allié du libre, et Open Office ou LIbre Office, Geogebra, Xcas sont maintenant bien présents dans les lycées et manuels, mais l'OS reste Windows et l'évolution dans le monde des calculatrices va dans le mauvais sens.

L'idée de mettre en place un mode examen en 2018 va à l'encontre de la possibilité pour l'acheteur de tirer parti de sa calculatrice comme il l'entend, il suffit de voir la guerre entre les développeurs de TI et la communauté Ndless, digne de la lutte menée par Apple contre les"jailbreaks" qui permettent d'utiliser l'Ipad avec des logiciels en-dehors du marché controlé par Apple ou avec d'autres opérateurs téléphoniques. L'institution devrait bien réfléchir avant de se lancer dans l'aventure. Certes, le mode examen évitera le recours parfois abusif aux anti-sèches, mais cela va décourager le développement de programmes par les élèves sur leurs calculatrices (car ces programmes seront effacés le jour de l'examen) et renforcer les inégalités, en particulier pour l'accès au calcul formel (qui est possible sur des modèles d'entrée de gamme aujourd'hui).

Je pense que si on veut vraiment des calculatrices avec mode examen, alors c'est à l'institution de les acheter, puis de les prêter aux élèves. L'éducation nationale devrait aussi avoir plus de contrôle sur les logiciels embarqués, qui ne devraient pas tant dépendre des constructeurs et donc des programmes de l'enseigne-

ment US. Cela permettrait aussi de mettre fin à des rentes pour les constructeurs en situation de position dominante, que l'on songe par exemple au bénéfice sur les modèles de calculatrices les plus conseillées et vendues, calculatrices qui ne se sont guère améliorées depuis 20 ans.

Si ce sont les élèves qui sont propriétaires du matériel, alors ils doivent pouvoir y installer les logiciels de leur choix. En fait, avec la baisse du prix des tablettes et autres netbooks où chacun peut installer le logiciel de son choix, est-il raisonnable de continuer à utiliser des calculatrices graphiques (à plus de disons 20 euros) ? Il vaudrait peut-être mieux prévoir des dispositifs de brouillage des communications de type wifi, ou/et des sujets avec une partie sans outil informatique pour controler les questions de cours.

Coté recherche, l'esprit "libre" progresse mais il y a encore beaucoup de chemin à accomplir. L'édition scientifique est encore essentiellement basée sur le paradigme du 20ième siècle : revue papier vendue à prix d'or aux bibliothèques, droits d'auteurs cédés par les auteurs des articles sans aucune contrepartie, accès en ligne payant. Les éditeurs privés s'approprient ainsi la connaissance financée par les fonds publics, un comble ! Heureusement les archives en ligne permettent la plupart du temps de contourner ces accès payants. Il reste que les crédits utilisés pour payer les abonnements seraient bien mieux utilisés à financer les journaux en ligne et en les rendant publics.

Concernant le dèveloppement logiciel, il y a beaucoup de logiciels scientifiques libres de qualité aujourd'hui, mais il y a des freins :

— la publication de code source de logiciel scientifique n'est pas considéré comme équivalent à la publication d'un article : certains qualifient d'ailleurs cette activité par "pisser du code". Conséquence, l'auteur d'un morceau de code n'a pas intérêt à en diffuser le source car cela n'accélérera en rien sa carrière, il est souvent plus rentable de diffuser un article qui parle du code source, sans rentrer trop dans les détails qui rendent un algorithme efficace. Éventuellement on diffuse un exécutable, comme cela toute personne utilisant le code pour un autre travail de recherche devra collaborer ou remercier d'une autre manière. Dans certains domaines, on me dit que la situation en arrive au point où il faut communiquer les données à l'auteur du code qui renvoie le résultat. On est vraiment aux antipodes de la démarche scientifique, encore plus en maths où on attend de pouvoir consulter tous les détails d'une preuve.
— On peut sans doute dire la même chose concernant le développement de logiciels éducatifs. Il n'y a pas de reconnaissance de l'institution et les encouragements sont rares (en tout cas c'est le ressenti de notre visite de présentation de Xcas au ministère de l'Education Nationale il y a quelques années, peut-être que ce serait différent aujourd'hui).
— Un autre frein au libre, c'est le droit qui est différent pour les logiciels et pour les écrits scientifiques, la personne qui dispose des droits patrimomiaux sur un logiciel c'est l'employeur de l'auteur et pas l'auteur lui-même, or les responsables de projets, universités et autres organismes publics de recherche sont beaucoup plus réticentes au logiciel libre que les auteurs eux-mêmes ... surtout s'ils ont des organismes de valorisation. Ce n'est pas seulement une question financière mais tout simplement de qui controle quoi, une fois un logiciel libéré, le contrôle est dans les mains

des personnes qui codent, et échappe aux services de valorisation ou aux scientifiques qui dirigent le projet (ainsi Allan Steel, le principal codeur du logiciel Magma, dont l'attractivité doit tout au génie algorithmique de cet auteur, n'apparait même pas dans la citation recommendée du logiciel).

— Plus généralement, le financement de la recherche aujourd'hui n'est pas favorable aux projets de long terme. Le manque de confiance des décideurs envers les chercheurs est une cause majeure de perte d'efficacité des chercheurs, en raison de l'inflation du temps passé à chercher des crédits, à évaluer des projets, à évaluer les collègues (pour les nominations et promotions aujourd'hui, bientot peut-être pour les services d'enseignement !). Le système actuel favorise d'ailleurs la politique d'édition dénoncée plus haut, avec une floraison d'indices utilisant les publications dans les journaux prestigieux. Il serait bien plus rentable de faire confiance aux chercheurs avec des financements pérennes et la fin des contrôles systématiques, bien sur il y aura toujours quelques abus, mais globalement on gagnerait en efficacité.

## B.3 Les maths et les outils de calcul.

En un demi-siècle les outils de calcul informatiques ont gagné en puissance de manière radicale. Aujourd'hui, pour une centaine d'euros, on a la puissance de calcul qui était réservée, il y a une vingtaine d'années, aux centres de calculs spécialisés.

Cela a des conséquences visibles dans tous les domaines de la vie quotidienne, il est impossible de les ignorer en maths sauf peut-être dans certains domaines de recherche. En tout cas pas dans le domaine de l'enseignement. Bien entendu, les maths c'est pour partie du raisonnement, mais pour l'écrasante majorité des gens, y compris scientifiques, c'est surtout un outil et pas une fin en soi (sur une classe d'age, deux à trois pour mille vont être des professionnels des maths, en comptant tous les enseignants de maths). Je pense que si les matheux veulent survivre en tant que discipline, il faut qu'ils adaptent leur enseignement pour un usage *intelligent* des outils de calcul, sinon ils finiront comme les langues anciennes. On ne devrait par exemple plus étudier les courbes sans utiliser un logiciel ou une calculatrice pour en avoir une représentation graphique : avant on faisait l'étude complète pour aboutir au tracé parce qu'on n'avait pas le choix de faire autrement, aujourd'hui il faut faire le tracé et l'étude simultanément, létude analytique servant à expliquer les particularités du tracé.

Utiliser des outils de calcul n'est pas contradictoire avec faire du calcul, en particulier faire suffisamment de calcul mental pour avoir une idée de la plausibilité d'un résultat obtenu par un logiciel (ordre de grandeur). C'est de l'hygiène intellectuelle, analogue à faire de l'exercice physique. Faire quelques calculs avec papier et stylo est aussi une façon de s'approprier de nouveaux concepts. Mais une fois cette étape franchie, je ne vois aucune raison de devoir continuer à apprendre à faire des calculs fastidieux ou techniques, alors que l'ordinateur fait cela beaucoup mieux que nous. Il est beaucoup plus judicieux de savoir diriger un logiciel pour cela, et donc de passer un peu de temps (le temps autrefois consacré à faire des calculs techniques) à connaitre leurs possibilités et limites (à la fois en termes de

fonctionnalités et de temps de calcul).

Prenons l'exemple de la résolution des équations du second degré. Au moment où on enseigne cette technique, je pense qu'il est important de faire faire quelques calculs de racines de trinômes (sans calculatrices), et d'expliquer comment ce genre de calculs peut se faire avec un logiciel de calcul formel (ce qui d'ailleurs permettra aux élèves de vérifier les résultats de leurs calculs faits à la main). Un an ou deux ans après, je ne vois pas l'intérêt de forcer des élèves à continuer à faire ces calculs à la main s'ils savent les faire avec un logiciel ou une calculatrice. En les bloquant sur un point technique, on ne fera que les braquer et on les empêchera de comprendre à quoi cela peut servir (par exemple faire un tableau de variations). Il faut arrêter de croire que tous les scientifiques fonctionnent comme les matheux qui veulent comprendre de A à Z, c'est d'ailleurs souvent devenu impossible en recherche en maths, les autres disciplines ont leurs propres règles (je pense par exemple qu'un bon physicien n'a pas forcément besoin de savoir démontrer rigoureusement quelque chose, l'essentiel est qu'il ait une bonne intuition des bonnes approximations à faire pour calculer correctement, calcul qu'il n'hésitera par à déléguer à la machine). Interdire les outils de calculs (ou les réserver à ceux qui savent déjà les faire à la main), c'est pour moi une pratique élitiste, on donne l'accès à certaines connaissances non pas à ceux qui sont capables de les comprendre, mais à ceux qui sont suffisamment virtuoses du calcul à la main.

Certains enseignants mettent sur le dos de l'usage des outils de calcul tous les maux du système actuel alors qu'à mon avis cela n'a rien à voir. Je pense que le problème principal des maths au lycée, c'est que les maths de S sont à la fois dures pour des non matheux et inintéressantes pour des matheux (au sens large), conséquence de l'universalité des débouchés accessibles en sortant de S. Dans le supérieur (hors prépas), le problème principal c'est la multiplication des parcours, la semestrialisation et l'atomisation des enseignements en unités beaucoup trop petites, qui augmentent les effets frontières, sont contradictoires avec les échelles de temps pour assimiler des notions, créent des casses-têtes pour faire les emplois du temps, multiplient les sessions d'examens. A cela s'ajoute la perte d'attractivité des métiers de l'enseignement et de la recherche en maths, que ce soit dans le secondaire (conditions de travail, reconnaissance par la société) ou dans le supérieur (dégradation des conditions d'exercice de la recherche, mais aussi de l'enseignement). Rien d'étonnant à ce que les jurys du CAPES et de l'agrégation n'arrivent pas à pourvoir tous les postes.

Les programmes des classes préparatoires aux grandes écoles ont supprimé récemment l'apprentissage d'un logiciel de calcul formel, peut-être une victoire des enseignants qui sont contre l'usage des outils de calcul formel. Ce sont les mêmes qui conseillent à leurs élèves l'achat de calculatrices graphiques non formelles au lycée (ce qui arrange bien les constructeurs qui peuvent ainsi faire payer au prix fort le modèle formel). Je pense que ce combat d'arrière-garde est voué à l'échec : les calculatrices graphiques de milieu de gamme commencent à avoir des logiciels de calcul formel jouets (comme par exemple Eigenmath sur Casio Graph 35+USB et 75/85/95), et à moyen terme (10 ans ?), ces calculatrices auront suffisamment de capacité mémoire pour permettre le portage de logiciels de calcul formel complets comme Giac.

## B.4 Calculatrices, tablettes ou PC ?

Si on est convaincu de l'intérêt d'utiliser un outil de calcul, se pose alors la question du choix de l'outil. Voici quelques éléments de réflexion.

— Les calculatrices ont pour avantages : la disponibilité immédiate (on appuie sur ON, en 1 seconde on peut travailler), l'encombrement faible, la robustesse, le clavier scientifique dédié (avec sur les calculatrices graphiques haut de gamme une interface facilitant la saisie d'intégrales, limites, etc.), la consommation faible (des piles qui durent plusieurs mois ou des batteries dont la charge tient plusieurs semaines), l'absence de connection Internet (pour les examens).
Les inconvénients : prix élevé, taille d'écran trop petite pour faire des gros calculs (et puissance parfois insuffisante), plus difficile de charger/sauvegarder des données dans des fichiers, pas de souris, l'utilisation du clavier peut être pénible pour programmer ou saisir une ligne de commandes un peu longue (le clavier des TI92 et des TI Nspire CX est un bon compromis, l'écran tactile des HP Prime permet de se passer de souris, il faudrait un hybride des deux !)
Bien adapté à l'enseignement (y compris dans le supérieur même si elles y sont souvent dénigrées par les enseignants).

— Les avantages des ordinateurs (portables) : clavier, écran, puissance de calcul, convient pour d'autres usages que le calcul.
Les inconvénients : poids/encombrement/fragilité, durée de charge des batteries (souvent 3-4h), connectivité Internet pour les examens.
Idéal en usage stationnaire.

— Les avantages des tablettes : disponibilité immédiate, écran large, convient pour d'autres usages que le calcul.
Les inconvénients : saisie de données fastidieuse, encombrement et fragilité, usage sans recharge limité à une (petite) journée, connectivité Internet en examen.
Peut être intéressant en mobilité si on a beaucoup de documents à consulter en ligne avec de temps en temps un petit calcul à faire. Les tablettes avec possibilité de branchement de clavier ont un potentiel intéressant pour un usage en mobilité avec un peu plus de données à saisir.